УДК: 539.123.17

Ошибка профессора Сопера

Р.И. Храпко

Невозможность получения тензора Максвелла электродинамики в рамках лагранжевого формализма подтверждается ошибкой, допущенной Д.Е. Сопером на этом пути. Тем не менее, эвристический метод позволяет использовать лагранжевые тензоры энергии-импульса и спина для получения классического тензора спина электродинамики.

1. Желание

Современная классическая теория электромагнитного поля использует лагранжианы свободного поля, не зависящие явно от координат, например, канонический лагранжиан [1]

$$\underset{c}{\mathscr{L}} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4, \tag{1.1}$$

или простой лагранжиан векторного безмассового поля [2]

$$\underset{v}{\mathscr{L}} = -\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu /2, \tag{1.2}$$

или лагранжиан Дирака-Фока-Подольского [3]

$$\underset{D}{\mathscr{L}} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4 - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu /2. \tag{1.3}$$

Складывая какой-нибудь лагранжиан свободного поля с лагранжианом взаимодействия [1]

$$\underset{j}{\mathscr{L}} = -A_\mu j^\mu \tag{1.4}$$

этого поля с его источником, то есть с 4-током, получают уравнения поля как уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0. \tag{1.5}$$

Например, для суммы

$$\mathscr{L} = \underset{c}{\mathscr{L}} + \underset{j}{\mathscr{L}} \tag{1.6}$$

с помощью (1.5) получают уравнения Максвелла [1]

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu. \tag{1.7}$$

Однако, при получении так называемых сохраняющихся величин, именно тензора энергии-импульса и тензора момента импульса, обычно используют лагранжиан только свободного поля. Например, при использовании канонического лагранжиана (1.1) получают каноническую пару тензоров: канонический тензор энергии-импульса $\underset{c}{T}^{\lambda\mu}$ и канонический тензор момента импульса $\underset{c}{\mathscr{J}}^{\lambda\mu\nu}$:

$$\underset{c}{T}^{\lambda\mu} = \partial^\lambda A_\alpha \frac{\partial \underset{c}{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} - g^{\lambda\mu} \underset{c}{\mathscr{L}} = -\partial^\lambda A_\alpha F^{\mu\alpha} + g^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4, \tag{1.8}$$

$$\underset{c}{\mathscr{J}}^{\lambda\mu\nu} = 2x^{[\lambda} \underset{c}{T}^{\mu]\nu} + \underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}, \quad \underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda} \delta^{\mu]}_\alpha \frac{\partial \underset{c}{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} = -2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu}, \tag{1.9}$$

где $\underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}$ - канонический тензор спина.

К сожалению, канонический тензор энергии-импульса (1.8) сильно отличается от реального тензора энергии-импульса электромагнитного поля, которым является тензор Максвелла

$$T^{\lambda\mu} = -F^\lambda{}_\alpha F^{\mu\alpha} + g^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4. \tag{1.10}$$

Разница между тензором Максвелла и каноническим тензором не является полной дивергенцией,

$$T^{\lambda\mu} - \underset{c}{T}^{\lambda\mu} = \partial_\alpha A^\lambda F^{\mu\alpha}, \tag{1.11}$$

а дивергенция канонического тензора довольно бессмысленна,

$$\partial_\mu \underset{c}{T}^{\lambda\mu} = -\partial^\lambda A_\alpha j^\alpha, \tag{1.12}$$

тогда как дивергенция тензора Максвелла равна известному выражению для 4-силы, действующей на поле со стороны источников поля:

$$\partial_\mu T^{\lambda\mu} = -F^{\lambda\alpha} j_\alpha. \tag{1.13}$$

Все это ставит под сомнение адекватность лагранжевого формализма и для снятия этого сомнения вызывает желание каким-нибудь путем получить тензор Максвелла, используя лагранжевый формализм, или хотя бы приблизиться к тензору Максвелла на расстояние полной дивергенции.

Движимый этим желанием, профессор Сопер [4] использовал в формуле (1.8) для тензора энергии-импульса, вместо канонического лагранжиана $\underset{c}{\mathscr{L}}$, суммарный лагранжиан (1.6) $\mathscr{L} = \underset{c}{\mathscr{L}} + \underset{j}{\mathscr{L}}$, содержащий явную зависимость от координат, $j^\mu(x)$. Вследствие такой замены, добавив к каноническому лагранжиану $\underset{c}{\mathscr{L}}$ лагранжиан взаимодействия $\underset{j}{\mathscr{L}} = -A_\mu j^\mu$, Сопер должен был получить в формуле (1.8) добавку к тензору энергии-импульса в виде свертки

$$\underset{j}{T}^{\lambda\mu} = \partial^\lambda A_\alpha \frac{\partial \underset{j}{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} - g^{\lambda\mu} \underset{j}{\mathscr{L}} = g^{\lambda\mu} A_\alpha j^\alpha. \tag{1.14}$$

Однако, ослепленный своим желанием, он записывает вместо свертки (1.14) произведение (формула Сопера (8.3.8))

$$\underset{I}{T}^{\lambda\mu} = A^\lambda j^\mu, \tag{1.15}$$

с дивергенцией

$$\partial_\mu \underset{I}{T}^{\lambda\mu} = \partial_\mu A^\lambda j^\mu, \tag{1.16}$$

как раз такой, чтобы его суммарный тензор

$$\underset{S}{T}^{\lambda\mu} = \underset{c}{T}^{\lambda\mu} + \underset{I}{T}^{\lambda\mu} = -\partial^{\lambda} A_{\alpha} F^{\mu\alpha} + g^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} / 4 + A^{\lambda} j^{\mu}, \tag{1.17}$$

имел бы правильную дивергенцию, то есть дивергенцию, совпадающую с дивергенцией тензора Максвелла:

$$\partial_{\mu} \underset{S}{T}^{\lambda\mu} = \partial_{\mu} (\underset{c}{T}^{\lambda\mu} + \underset{I}{T}^{\lambda\mu}) = -\partial^{\lambda} A^{\alpha} j_{\alpha} + \partial^{\alpha} A^{\lambda} j_{\alpha} = -F^{\lambda\alpha} j_{\alpha}. \tag{1.18}$$

Равенство (1.18) показывает, что придуманный Сопером тензор (1.17) отличается от тензора Максвелла на некоторую дивергенцию от антисимметричной величины. Действительно,

$$\underset{S}{T}^{\lambda\mu} - T^{\lambda\mu} = -\partial_{\alpha} (A^{\lambda} F^{\mu\alpha}). \tag{1.19}$$

Поскольку подобное отличие тензоров энергии-импульса друг от друга рассматривается современными физиками как не существенное, Сопер утверждает, что он получил тензор Максвелла, используя лагранжевый формализм.

Такой вывод, конечно, ошибочен, потому что использованный Сопером лагранжиан взаимодействия (1.4) дает в качестве добавки к тензору энергии-импульса не произведение (1.15), а выражение (1.14). Поэтому в действительности суммарный лагранжиан (1.6) $\mathscr{L} = \underset{c}{\mathscr{L}} + \underset{j}{\mathscr{L}}$ дает не тензор Сопера (1.17), а сумму

$$\underset{c}{T}^{\lambda\mu} + \underset{j}{T}^{\lambda\mu}, \tag{1.20}$$

дивергенция которой

$$\partial_{\mu} (\underset{c}{T}^{\lambda\mu} + \underset{j}{T}^{\lambda\mu}) = A_{\alpha} \partial^{\lambda} j^{\alpha}, \tag{1.21}$$

так же бессмысленна, как и дивергенция (1.12) канонического тензора энергии-импульса. Кроме того, довольно бессмысленно приписывать электромагнитному полю в качестве тензора энергии-импульса выражение (1.17), явно зависящее от тока. Кроме того, вопреки распространенному мнению, добавление каких-либо членов к истинному тензору энергии-импульса вообще недопустимо. Поэтому в любом случае тензор Сопера (1.17) не имеет ничего общего ни с тензором Максвелла, ни со здравым смыслом.

2. Верный путь

Казус Сопера, а также весь опыт теоретической физики показывают, что, по-видимому, лагранжевый формализм не способен привести к тензору Максвелла для электромагнитного поля. Следует констатировать, что канонический лагранжиан (1.1) приводит к каноническому тензору энергии-импульса (1.8), который отличается от тензора Максвелла на величину (1.11). Другими словами, факт заключается в том, что для получения тензора Максвелла следует «рукой» прибавить к каноническому тензору (1.8) выражение (1.11).

Обратимся теперь к проблеме спина. Лагранжевый тензор спина $\underset{\mathscr{L}}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}$ свободного поля получается каноническим формализмом одновременно с тензором энергии-импульса по формулам, приведенным в уравнениях (1.8), (1.9). Имеет смысл говорить о лагранжевой паре $\underset{\mathscr{L}}{T}^{\lambda\mu}, \underset{\mathscr{L}}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}$. Канонический лагранжиан (1.1) дает каноническую пару

$$\underset{c}{T}^{\lambda\mu} = -\partial^{\lambda} A_{\alpha} F^{\mu\alpha} + g^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} / 4, \qquad \underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda}\delta_{\alpha}^{\mu]} \frac{\partial \underset{c}{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_{\nu} A_{\alpha})} = -2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu}, \tag{2.1}$$

а лагранжиан векторного поля (1.2) дает пару векторного поля:

$$\underset{v}{T}^{\mu\nu} = -\partial^{\mu} A_{\alpha} \partial^{\nu} A^{\alpha} + g^{\mu\nu} \partial_{\alpha} A_{\beta} \partial^{\alpha} A^{\beta} / 2, \qquad \underset{v}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = 2A^{[\lambda} \partial^{|\nu|} A^{\mu]}. \tag{2.2}$$

Мы заметили интересный факт. При всей неадекватности канонических тензоров, выражение для плотности 4-спина, который поступает в электромагнитное поле от источников, то есть выражение

$$\partial_{\nu} \underset{\mathscr{L}}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} - 2\underset{\mathscr{L}}{T}^{[\lambda\mu]}, \tag{2.3}$$

одинаково для канонической пары и для пары векторного поля:

$$\partial_{\nu} \underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} - 2\underset{c}{T}^{[\lambda\mu]} = \partial_{\nu} \underset{v}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} - 2\underset{v}{T}^{[\lambda\mu]} = 2A^{[\lambda} j^{\mu]}. \tag{2.4}$$

Выражение (2.3) является плотностью 4-спина, поступающего в поле от внешних источников, потому что полный момент 4-импульса $J^{\lambda\mu}$, выходящий из 4-объема Ω через его границу V, может быть представлен в виде интеграла от суммы орбитальной плотности

$$2r^{[\lambda} \partial_{\nu} T^{\mu]\nu} \tag{2.5}$$

и спиновой плотности

$$\partial_{\nu} \Upsilon^{\lambda\mu\nu} - 2T^{[\lambda\mu]}, \tag{2.6}$$

поступающих в поле внутри Ω от внешних источников, расположенных внутри Ω:

$$J^{\lambda\mu} = \oint_{V} (2r^{[\lambda} T^{\mu]\nu} + \Upsilon^{\lambda\mu\nu}) dV_{\nu} = \int_{\Omega} (-2T^{[\lambda\mu]} + 2r^{[\lambda} \partial_{\nu} T^{\mu]\nu} + \partial_{\nu} \Upsilon^{\lambda\mu\nu}) d\Omega. \tag{2.7}$$

Так вот, наша идея в отношении спина заключается в следующем. Нам известно, что для превращения канонического тензора энергии-импульса электродинамики (1.8) в истинный максвелловский тензор надо прибавить к каноническому тензору величину (1.11), которую мы назовем $\underset{c}{t}^{\lambda\mu}$:

$$T^{\lambda\mu} = \underset{c}{T}^{\lambda\mu} + \underset{c}{t}^{\lambda\mu} = \underset{c}{T}^{\lambda\mu} + \partial_{\alpha} A^{\lambda} F^{\mu\alpha}. \tag{2.8}$$

Исходя из этого, мы предлагаем для превращения канонического тензора спина из (1.9) в тензор спина электродинамики прибавить к каноническому тензору спина величину $\underset{c}{s}^{\lambda\mu\nu}$, которая в паре с $\underset{c}{t}^{\lambda\mu}$ не содержит источников спина, то есть удовлетворяет уравнению

$$\partial_\nu \underset{c}{s}^{\lambda\mu\nu} - 2\underset{c}{t}^{[\lambda\mu]} = 0\,. \tag{2.9}$$

Уравнению (2.9) удовлетворяет простое выражение

$$\underset{c}{s}^{\lambda\mu\nu} = 2A^{[\lambda}\partial^{\mu]}A^\nu\,, \tag{2.10}$$

так что предлагаемый тензор спина классической электродинамики выглядит так

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = \underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} + \underset{c}{s}^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda}F^{\mu]\nu} + 2A^{[\lambda}\partial^{\mu]}A^\nu = 2A^{[\lambda}\partial^{|\nu|}A^{\mu]}\,. \tag{2.11}$$

Это же выражение получается мгновенно, если исходить не из канонической пары (2.1), а из пары векторного поля (2.2). Ввиду симметрии тензора энергии-импульса векторного поля, добавка к нему тоже симметрична, $\underset{v}{t}^{[\lambda\mu]} = 0$, уравнение (2.9) для векторного поля имеет вид

$$\partial_\nu \underset{v}{s}^{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{2.12}$$

с очевидным решением $\underset{v}{s}^{\lambda\mu\nu} = 0$. Поэтому предлагаемый тензор спина электродинамики совпадает с тензором спина векторного поля из (2.2).

Результат (2.11) был направлен в журнал «Письма в ЖЭТФ» 14 мая 1998года и в «ЖЭТФ» 27 января 1999 года. Оба раза статьи были отклонены, потому что их публикация была признана нецелесообразной. С тех пор материал настоящей статьи был отклонен свыше трехсот раз всеми научными журналами мира, включая arXiv. Единственным исключением явился журнал «Измерительная техника», свободный от номенклатурных теоретиков [10, 11].

Выражение (2.11), полученное, по сути, эвристически, не является окончательным. Его модернизация и применение представлены в работах [5 – 15] и на сайте http://www.mai.ru/projects/mai_works/. Там рассчитано поглощение луча круговой поляризации, дано объяснение результату классического опыта Бета, рассмотрено излучение вращающегося диполя.

Я глубоко благодарен профессору Роберту Ромеру за публикацию моего вопроса [16], а также профессору Тимо Ниеминену за плодотворную дискуссию в интернете (Newsgroups: sci.physics.electromag).

Список литературы

1. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1973.- 504с.

2. Боголюбов Н.Н. и Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М.: ГИТТЛ, 1957.- 442с.

3. Dirac P.A.M., Fock W.A., Podolsky B. // Phys. Zs. Sowjetunion. – 1932, **2**.- p.468.

4. Soper D.E. Classical Field Theory. – N.Y.: John Wiley, 1976.- 654 p.

5. Храпко Р.И. Истинные тензоры энергии-импульса и спина среды однозначны.// Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности и гравитации. X Российская гравитационная конференция, Владимир. 1999: Тез. докл. - Москва, 1999. - с.47.

6. R.I. Khrapko. True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero. - http://arXiv.org/abs/physics/0102084 (10.08.2001)

7. R.I. Khrapko. Violation of the gauge equivalence. - http://arXiv.org/abs/physics/0105031 (11.12.2001)

8. Храпко Р.И. Локализация энергии-импульса и спин.// Вестник Российского университета дружбы народов, *Серия* Физика. – 2002, № 10(1).- с.35-39.

9. Храпко Р.И. Спин классической электродинамики. // Вестник Российского университета дружбы народов, *Серия* Физика. – 2002, № 10(1).- с.40-47.

10. Khrapko R.I. Experimental verification of Maxwellian electrodynamics. // Measurement Techniques – 2003, **46**, No. 4.- p.317.

11. Храпко Р.И. Экспериментальная проверка электродинамики Максвелла.// Измерительная техника. – 2003, № 4.- с.3-5.

12. R.I.Khrapko. The Beth's experiment is under review. - mp_arc@mail.ma.utexas.edu REQUEST: send papers NUMBER: 03-307

13. R.I.Khrapko. Radiation of spin by a rotator. - mp_arc@mail.ma.utexas.edu REQUEST: send papers NUMBER: 03-315

14. R.I.Khrapko. A circularly polarized beam carries the double angular momentum. - mp_arc@mail.ma.utexas.edu REQUEST: send papers NUMBER: 03-311

15. Khrapko R.I. Classical spin in space with and without torsion. // Gravitation & Cosmology – 2004, **10**, No. 1-2.- p.91.

16. Khrapko R.I. Does plane wave not carry a spin? //Amer. J. of Physics. – 2001, **69.-** p.405.