УДК 539.371:534.134

О РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Константин Александрович МОИСЕЕВ родился в 1946 г. в городе Вильнюсе Литовской ССР. Доцент Серпуховского военного института Ракетных войск стратегического назначения. Кандидат технических наук, доцент. Основные научные интересы — в области нелинейной механики, прочности и динамики машин. Автор более 60 научных работ. E-mail: moiseev.kostya@mail.ru

Konstantin A. MOISEYEV, Ph.D., was born in 1946, in Vilnius, Lithuanian SSR. He is an Associate Professor at the Serpukhov Military Institute of Strategic Missiles Forces. His research interests include nonlinear mechanics, machine strength and dynamics. He has published over 60 technical papers. E-mail: moiseev.kostya@mail.ru

Рассмотрен нетрадиционный подход к определению резонансных частот как линейных, так и нелинейных систем, на основе которого получены результаты, существенно изменяющие представления о динамическом поведении нелинейных систем.

A non-traditional approach is presented to find out resonant frequencies for linear and nonlinear systems. Some important results are obtained basing on this approach. The results change appreciably our ideas about dynamical behavior of nonlinear systems.

Ключевые слова: резонансная частота, собственная частота, нелинейная система, кинетическая энергия, потенциальная энергия, полная энергия, фазовый сдвиг.

Key words: resonant frequency, natural frequency, nonlinear system, kinetic energy, potential energy, total energy, phase shift.

Современная техника очень часто работает при высоком уровне силовых воздействий, следовательно, при больших значениях скоростей и ускорений. Поэтому при оценке динамических характеристик создаваемых систем неизбежно приходится использовать математический аппарат теории нелинейных колебаний [1].

Одним из основных моментов исследования динамического поведения нелинейных систем является определение их резонансных частот. Причем большим недостатком нелинейной механики является то, что для определения резонансных частот применяется методология теории линейных колебаний, когда резонансные частоты нелинейных систем рассматриваются как комбинация собственных частот порождающей системы и частоты внешнего гармонического воздействия [1—7]. Характер всевозможных комбинаций частот определяется характером нелинейных членов дифференциальных уравнений, описывающих динамическое поведение исследуемой системы. Таким образом, величины резонансных частот находятся из чисто математических соображений. Возникшая на этой основе классификация резонансов нелинейных систем связывала конкретный вид резонанса с какой-то фиксированной частотой, как и в линейных системах. Причем сама же теория нелинейных колебаний опровергает такое представление [1, 2, 3, 7], показывая, что максимальный отклик исследуемой системы на внешнее гармоническое воздействие наблюдается на других частотах, отличных от тех, что декларируются теорией. Результат такого теоретического противоречия проявился в неспособности теории дать определение резонанса нелинейных систем, что ставит исследователей в крайне затруднительное положение. Поэтому возникла необходимость в разработке такого метода определения резонансных частот нелинейных систем, который бы вообще не опирался на такое фундаментальное понятие, как собственные частоты порождающей системы.

В то же время при определении резонансных частот линейных систем этот метод должен привести к результатам, полностью совпадающим с известными результатами теории линейных колебаний.

Анализ возможных нетрадиционных методов определения резонансных частот показал, что наиболее перспективным является метод, основанный на энергетической оценке этих важных динамических характеристик.

Общеизвестно, что уравнение Лагранжа второго рода описывает динамическое поведение исследуемой системы (как линейной, так и нелинейной) с точки зрения изменения в ней кинетической T, потенциальной U энергий и энергии рассеивания Φ, если принято предположение, что силы сопротивления пропорциональны скорости движения системы. В общем виде для систем с s степенями свободы уравнение Лагранжа можно записать таким образом [8]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}+Q_F(t), \qquad (1)$$

где $Q_F(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$ — обобщенная сила.

Уравнение Лагранжа второго рода (1) записано таким образом, что в левой части находятся члены, определяющие отклик системы на внешнее воздействие, а в правой — члены, определяющие силы сопротивления и возмущающие силы, от взаимодействия которых зависит величина отклика. Применяя к уравнению (1) известный прием [8], можно привести его к виду

$$\frac{d(T+U)}{dt}=-2\Phi+\sum_{j=1}^{s}Q_F(t)\dot{q}_j, \qquad (2)$$

где $T+U=E$ — полная энергия системы.

Обычно в учебной и научной литературе второй член в правой части не рассматривают и используют соотношение (2) для объяснения физической сущности диссипативной функции при свободном движении системы.

При учете внешних сил очевидно, что левая часть уравнения (2) будет зависеть от взаимодействия сил сопротивления и внешних сил, т. е. от соотношения энергии, которая рассеивается в системе, благодаря силам сопротивления, и энергии, которая поступает от внешнего источника.

Рассмотрим сначала линейную систему с одной степенью свободы, для которой $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $U=\frac{1}{2}cx^2$, $\Phi=\frac{1}{2}b\dot{x}^2$, $Q_F(t)=P\sin\nu t$, где m — коэффициент инерции (масса) тела; c — коэффициент жесткости пружины; b — коэффициент диссипации; ν — частота внешнего воздействия. Решение для вынужденных колебаний определяется общеизвестным выражением:

$$x(t)=A\sin(\nu t+\varphi), \qquad (3)$$

где $A=\dfrac{P}{m\sqrt{\left(\omega^2-\nu^2\right)^2+4\alpha^2\nu^2}}$ — амплитуда колебаний; $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{2\alpha\nu}{\omega^2-\nu^2}$ — сдвиг фаз между откликом системы на внешнее воздействие и внешней силой; $\omega=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ — собственная частота линейной системы; $\alpha=\dfrac{b}{2m}$ — коэффициент затухания колебаний системы.

Полная энергия системы определяется выражением

$$E(t)=T(t)+U(t)=$$
$$=\frac{1}{4}mA^2\left(\left(\nu^2+\omega^2\right)+\left(\nu^2-\omega^2\right)\cos 2(\nu t+\varphi)\right), \qquad (4)$$

из которого следует, что полная энергия состоит из двух составляющих: постоянной $\frac{1}{4}mA^2\left(\nu^2+\omega^2\right)$ и переменной $\frac{1}{4}mA^2\left(\nu^2-\omega^2\right)\cos 2(\nu t+\varphi)$, которая изменяется с удвоенной частотой ν. Так как интерес представляет резонансный случай, когда имеет место равенство $\nu=\omega$, то выражение (4) сводится к виду

$$E(t)=T(t)+U(t)=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\text{const}. \qquad (5)$$

Элементарные исследования выражения (4) показывают, что на резонансной частоте имеет место максимум функции $E=T+U$. Следовательно, при резонансе полная энергия системы принимает максимальное значение и остается постоянной в любой момент времени, т. е.

$$E_{\max}=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\text{const}.$$

Второе равенство $2\Phi=Q_F(t)\dot{x}$, вытекающее из первого $\frac{dE(t)}{dt}=0$, позволяет сделать следующее заключение: изменение энергии в системе в результате ее рассеивания полностью компенсируется изменением энергии внешнего источника. Последнее означает, что система при резонансе ведет себя как свободная консервативная система без трения с начальным отклонением от положения равновесия, равным максимуму резонансной амплитуды, т. е. $x(0)=A_{\text{рез}}$; $\dot{x}(0)=0$.

Учитывая, что $b\dot{x}=\nu bA\cos(\nu t-0{,}5\pi)=\nu bA\sin\nu t$, $2\Phi=b\nu^2A^2\sin^2\nu t$, $Q_F(t)\dot{x}=\nu AP\sin^2\nu t$, приходим к равенству $\nu bA = P$, которое говорит о том, что амплитуда силы сопротивления равна амплитуде внешней силы, сами силы сопротивления действуют в фазе с внешней силой, чем и обеспечивается мощнейший всплеск отклика системы на внешнее воздействие. При рассогласовании фаз между силой сопротивления и внешней силой величина отклика уменьшается, так как уменьшается величина полной энергии, идущей на формирование отклика системы. Максимальное значение амплитуды при резонансе зависит от инерционных, упругих и диссипативных свойств системы. Приведенные выше математические выкладки подтверждаются графиками изменения полной энергии во времени, представленными на рис. 1, 2 и 3. На рис. 2 графики $W1 = 2\Phi$ и $W2 = Q(t)\dot{q}$ совпадают, а $W = W2 - W1 = 0$. На рис. 3 графики сил сопротивления R и внешней силы F совпадают.

Если силами сопротивления пренебрегать, то энергетическое условие резонанса выполняться не будет, так как $\dfrac{dE(t)}{dt} = Q_F(t)\dot{x} \neq 0$, т. е. резонансные режимы в системе без трения возникнуть не могут. Этот вывод подтверждает теоретические представления, которые имеют место в теории линейных колебаний.

Теперь можно дать резонансу определение с энергетической точки зрения: резонансом можно назвать такой колебательный процесс, при котором полная энергия системы остается неизменной во времени, когда потери энергии системы от действия сил сопротивления полностью компенсируются энергией внешнего источника.

Вторая половина определения равносильна такому утверждению: фазовый сдвиг между внешней силой и силой сопротивления должен быть равен нулю.

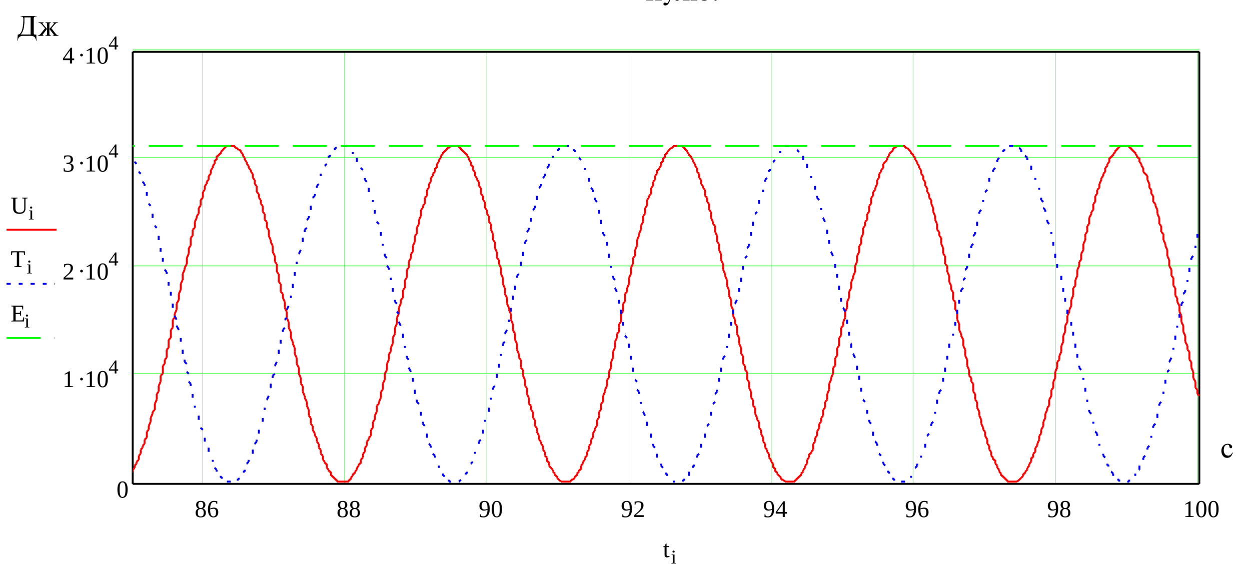

Рис. 1. Изменение кинетической T, потенциальной U и полной E энергий системы с одной степенью свободы во времени при резонансе

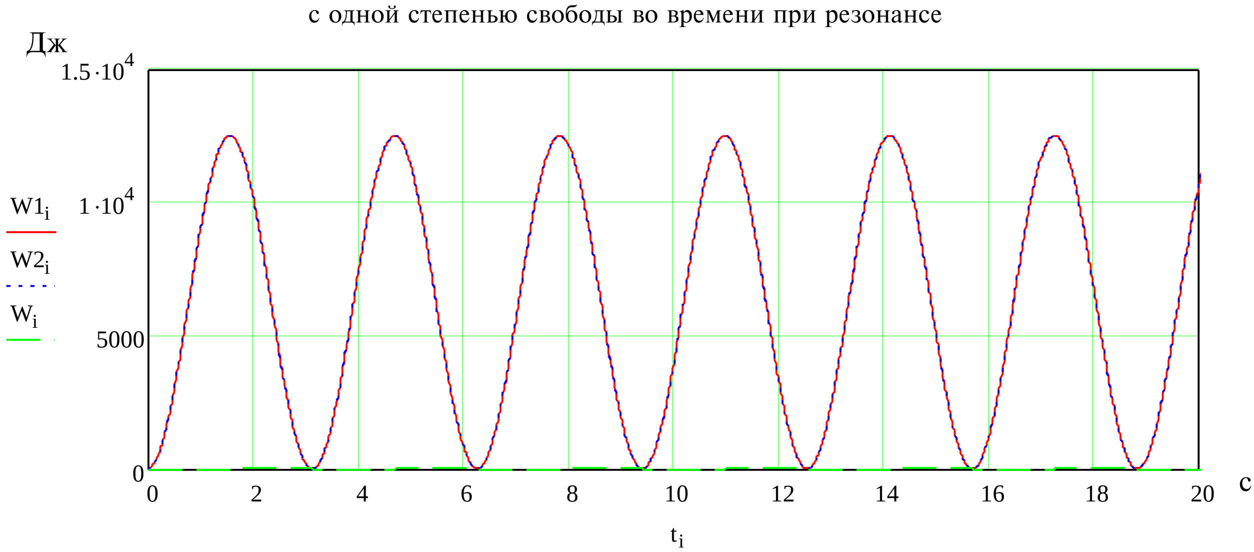

Рис. 2. Изменение энергии сил сопротивления и внешних сил системы с одной степенью свободы во времени при резонансе: $W1 = 2\Phi$; $W2 = Q(t)\dot{q}$; $W = W2 - W1$

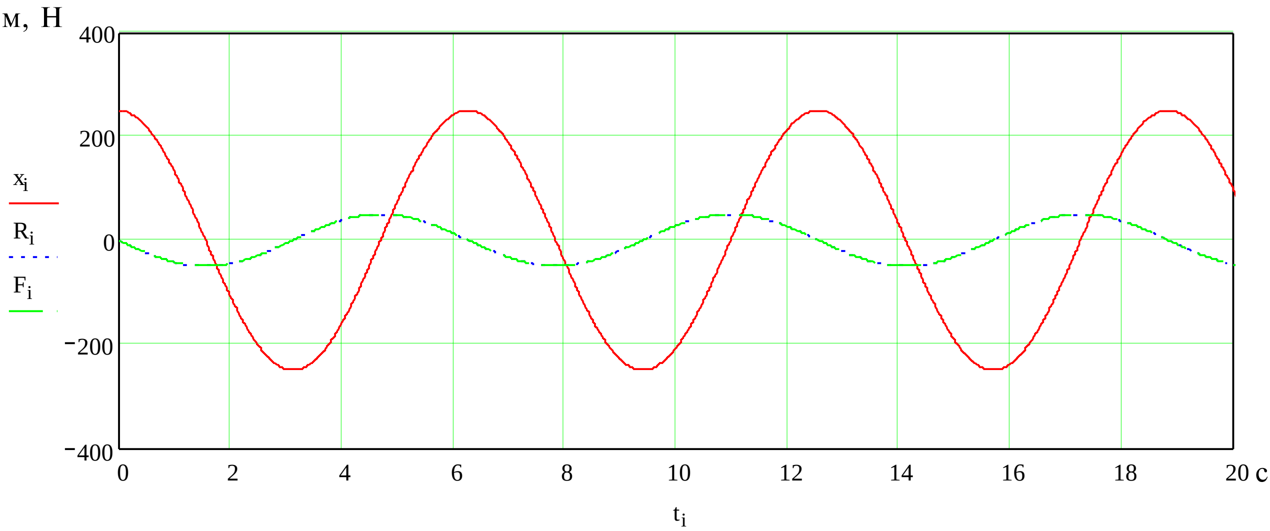

Рис. 3. Фазовые сдвиги при резонансном режиме между перемещением системы x, силой сопротивления R и внешней силой F

Для линейных систем с конечным числом степеней свободы выражение полной энергии системы в главных координатах можно записать таким образом [8]:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} m_i \dot{q}_i^2; \;\; U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} c_i q_i^2, \tag{6}$$

тогда при гармоническом внешнем воздействии перемещения q_i и скорости от них можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_i &= A_i \sin(\nu t + \varphi_i); \\ \dot{q}_i &= \nu A_i \cos(\nu t + \varphi_i), \end{aligned} \tag{7}$$

где при гармоническом воздействии

$$A_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\mu_k P}{m_k \sqrt{\left(\Omega_k^2 - \nu^2\right)^2 + 4\Lambda_k^2 \nu^2}}.$$

Тогда

$$E = T + U =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{s} m_i A_i^2 \left[\left(\Omega_i^2 + \nu^2\right) + \left(\Omega_i^2 - \nu^2\right)\cos 2(\nu t + \varphi_i)\right]. \tag{8}$$

Определяя экстремальные точки функции $E(t) = T(t) + U(t)$ по известным правилам, получим:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} m_i A_i^2 \left(\Omega_i^2 - \nu^2\right)\cos 2(\nu t + \varphi_i) = 0. \tag{9}$$

Очевидно, что равенство (9) будет иметь место только при $\nu^2 - \Omega_i^2 = 0$ или $\nu = \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Условие совпадает с общепринятым условием, определяющим наличие резонанса в системе с конечным числом степеней свободы. Следует заметить, что при гармоническом воздействии на систему все равенства одновременно физически реализованы быть не могут. Поэтому резонанс, т. е. максимальная энерговосприимчивость системы, может проявляться только на одной какой-то собственной частоте.

Проанализируем правую часть равенства (2). В целом выражение

$$\begin{aligned} &-2\Phi + \sum_{j=1}^{s} Q_F(t)\dot{q}_j = \\ &= -\nu^2 \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(b_{ij} A_i A_j \cos(\nu t + \varphi_i)\cos(\nu t + \varphi_j)\right) - \\ &-\nu^2 \sum_{i=1}^{s} b_{ii} A_i^2 \cos^2(\nu t + \varphi_i) + \\ &+\nu P \sin \nu t \sum_{j=1}^{s} A_j \cos(\nu t + \varphi_j) \neq 0 \;\; (i \neq j), \end{aligned} \tag{10}$$

а, следовательно, $2\Phi \neq \sum_{j=1}^{s} Q_F(t)\dot{q}_j$. Последнее означает, что при резонансе, например, на частоте $\nu = \Omega_i$ равенство соблюдается не у всего выражения, а только в резонирующей его части, т. е.

$$\begin{aligned} &\nu^2 b_{ii} A_i^2 \sin^2 \nu t + \nu^2 \sum_{n=1}^{s} b_{nn} A_n^2 \cos^2(\nu t + \varphi_n) + \\ &+\nu^2 \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(b_{ij} A_i A_j \cos(\nu t + \varphi_i)\cdot\cos(\nu t + \varphi_j)\right) = \\ &= \nu P A_i \sin^2 \nu t + P \sin \nu t \sum_{j=1}^{s} A_j \cos(\nu t + \varphi_j). \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда имеем $\nu b_{ii}A_i = \mu_i P,\ \ E_i = T_i + U_i = \frac{1}{2}m_i A_i^2 \Omega_i^2,$ что совпадает с ранее сделанными выводами для системы с одной степенью свободы.

Однако влияние последующих нерезонансных членов невелико. Поэтому можно считать, что $T + U \approx \text{const}$. Полученное энергетическое равенство для *i*-й формы колебаний полностью соответствует тому условию резонанса, которое принято для систем с конечным числом степеней свободы.

Анализ выражения (8) показывает, что функция $T + U$ имеет *s* локальных максимумов, между которыми обязательно должны существовать ее минимумы. Причем минимум полной энергии будет соответствовать максимальному противодействию сил сопротивления возмущающей силе. Заметим, что в дорезонансных режимах имеет место неравенство $U_{\max} > T_{\max}$, а в послерезонансных — $U_{\max} < T_{\max}$, т. е. максимум имеет место при замене приоритета потенциальной энергии приоритетом кинетической, а минимум — наоборот.

Таким образом, энергетический метод определения резонансных частот линейных систем привел к результатам, полностью совпадающим с известными результатами теории линейных колебаний, и существенно расширил представление о динамическом поведении систем при резонансном режиме.

Так как уравнение Лагранжа второго рода определяет динамическое поведение как линейных, так и нелинейных систем, то с энергетической точки зрения все те соотношения, что использовались для определения резонансных частот линейных систем, пригодны и для определения резонансных частот нелинейных систем.

Для примера возьмем простую нелинейную систему с одной степенью свободы, динамическое поведение которой можно описать уравнением Дуффинга [7]:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x + \beta x^3 = P\cos\nu t. \tag{12}$$

Выражение для кинетической энергии нелинейной системы будет выглядеть точно так же, как и для линейной системы, а выражение для потенциальной энергии будет таким:

$$U(x) = \frac{1}{2}c_1 x^2 + \frac{1}{4}c_2 x^4. \tag{13}$$

Учитывая, что при резонансе исследуемая система, независимо от того, линейная она или нелинейная, ведет себя как при отсутствии сил сопротивления, динамическое поведение исследуемой системы при резонансе можно описать уравнением, которое определяет колебания нелинейного осциллятора при следующих начальных условиях $x(0) = A_{\text{рез}},\ \dot{x}(0) = 0$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \beta x^3 = 0. \tag{14}$$

Точным решением уравнения (14) при указанных начальных условиях может являться гиперболический косинус (синус), т. е. $x = A_{\text{рез}} cn[\sigma t, k]$ [4]. Учитывая, что $\dot{x} = \sigma A_{\text{рез}} sn(\sigma t, k) dn(\sigma t, k)$, где k — модуль эллиптической функции; dn — функция дельта-амплитуды, используя известные соотношения [4]:

$$\begin{gathered} cn^2(\sigma t, k) + sn^2(\sigma t, k) = 1; \\ dn(\sigma t, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(\sigma t, k)}; \\ \omega^2 = \frac{c_1}{m} = \sigma^2(1 + k^2);\ \beta = \frac{c_2}{m} = -\frac{2\sigma^2 k^2}{A_{\text{рез}}^2} \end{gathered} \tag{15}$$

и подставляя значения x и $\dot{x}$ в выражения для потенциальной и кинетической энергии, после несложных преобразований получим:

$$T + U = \frac{1}{2}m\sigma^2 A_{\text{рез}}^2. \tag{16}$$

Следовательно, резонансный режим в исследуемой системе можно описать эллиптическими синусом или косинусом, когда колебания совершаются с частотой $\sigma = \nu$.

Приведенные выше выкладки справедливы только тогда, когда правая часть уравнения $-2\Phi + Q_F(t)\dot{x} = 0$ равна нулю, т. е. когда изменения полной энергии в системе не происходит. Для доказательства этого факта подставим в правую часть уравнения $-2\Phi + Q_F(t)\dot{x} = 0$ значения скорости, выраженной через производные от эллиптических косинуса или синуса. Тогда получим:

$$-2\Phi + Q_F(t)\dot{x} = -b\left(\sigma A_{\text{рез}} sn(\sigma t, k) dn(\sigma t, k)\right)^2 +$$
$$+ P\cos\nu t \cdot \sigma A_{\text{рез}} sn(\sigma t, k) dn(\sigma t, k).$$

По определению это выражение должно быть равно нулю, т. е должны быть выполнены равенства: $b\sigma A_{\text{рез}} = P$ и $sn(\sigma t, k) dn(\sigma t, k) = \cos\nu t$ или $cn(\sigma t, k) dn(\sigma t, k) = \cos\nu t$. Последнее равенство не выполняется, так как $sn(\sigma t, k)dn(\sigma t, k) \neq \cos \nu t$. Это говорит о том, что в нелинейной системе, динамическое поведение которой описывается уравнением Дуффинга, резонансные режимы, строго говоря, возникнуть не могут. В таких системах может возникать только околорезонансный режим, если при некоторых параметрах системы и внешнего воздействия имеет место приближенное равенство: $sn(\sigma t, k)dn(\sigma t, k) \approx \cos \nu t$. Именно такой режим может возникнуть в системах, динамическое поведение которых описывается уравнением Дуффинга.

Исследование резонансных режимов систем, динамическое поведение которых описывается уравнением Дуффинга, энергетическим методом показало, что в них не возникает ни ультрагармонических, ни субгармонических резонансов, а только соответствующие колебания. В их колебаниях может возникнуть только околорезонансный режим при определенных начальных условиях движения системы и при соответствующей величине амплитуды внешней силы.

На рис. 4—9 приведены графики околорезонансных, ультрагармонических и субгармонических колебаний и соответствующие им изменения полной энергии системы.

Приведенные выше соображения показывают, что теория нелинейных колебаний даже в своих основополагающих моментах далека от завершения, поэтому требует более тщательного исследования, при котором необходимо применять нетрадиционные подходы.

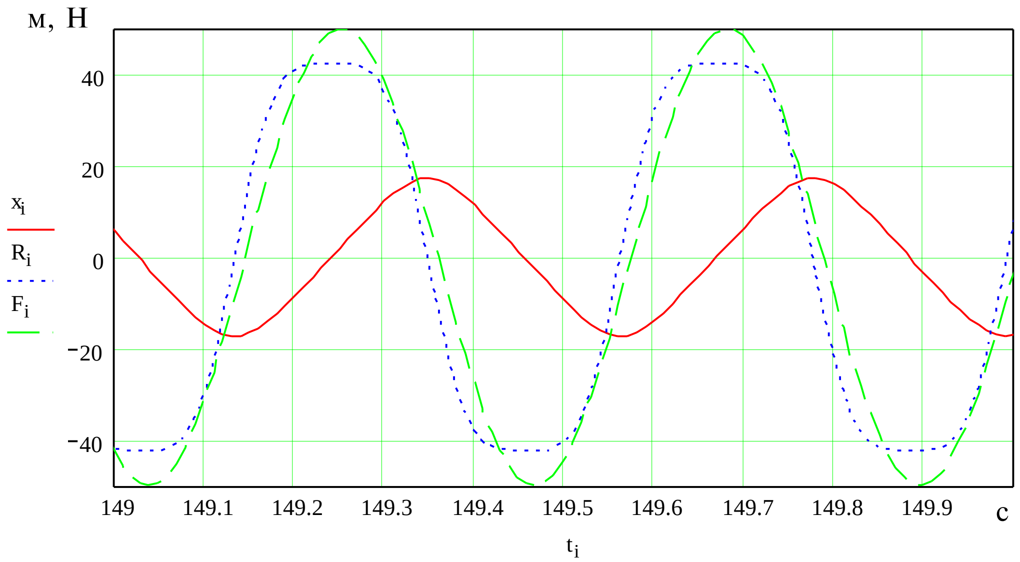

Рис. 4. Фазовые сдвиги при максимально близкому к резонансному колебательному режиме системы между ее перемещением x, силой сопротивления R и внешней силой F при ненулевых начальных условиях $x(0) = 50$ и максимальном отклике (околорезонансный режим):
$\alpha = 0{,}1;\ \omega = \beta = 1;\ P = 50;\ \nu = 14{,}59$

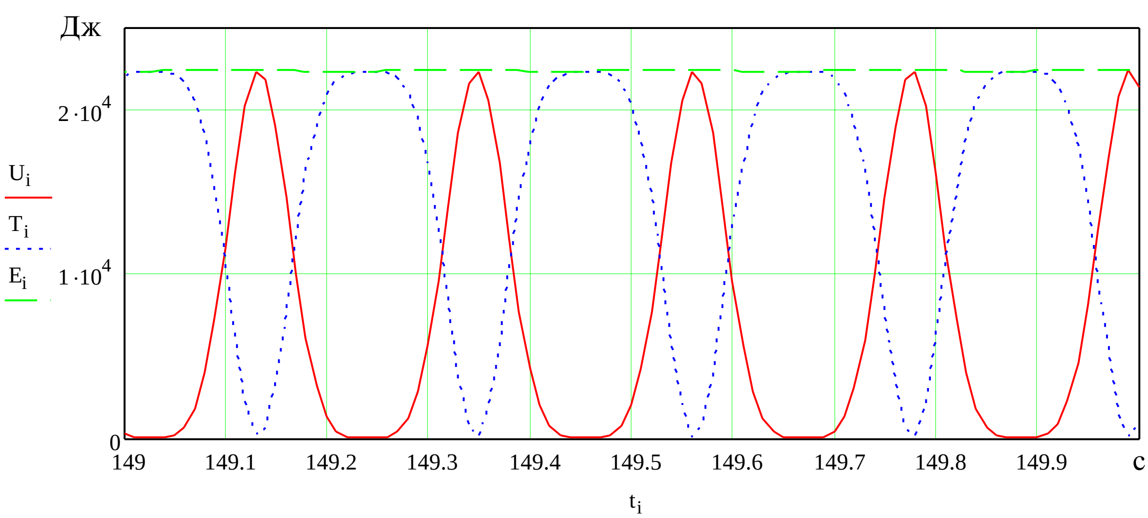

Рис. 5. Изменение потенциальной U, кинетической T и полной E энергий в системе, движение которой описывается уравнением Дуффинга при ненулевых начальных условиях и ее максимальном отклике:
$\alpha = 0{,}1;\ \omega = \beta = 1;\ P = 50;\ \nu = 14{,}59$

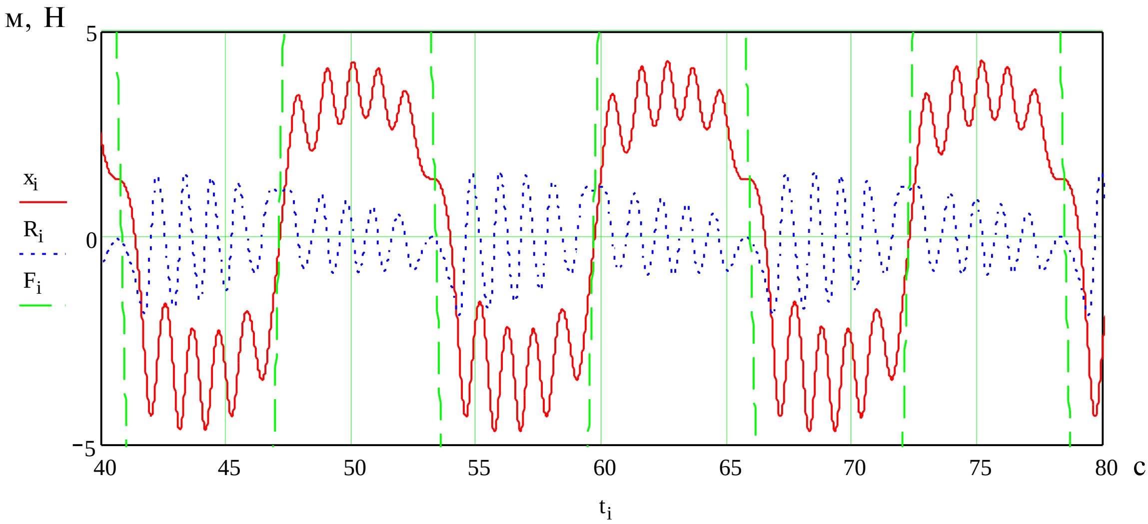

Рис. 6. Ультрагармонические колебания дуффинговской системы
с одной степенью свободы при нулевых начальных условиях:
$\alpha = 0{,}1;\ \omega = \beta = 1;\ P = 50;\ v = 0{,}5$

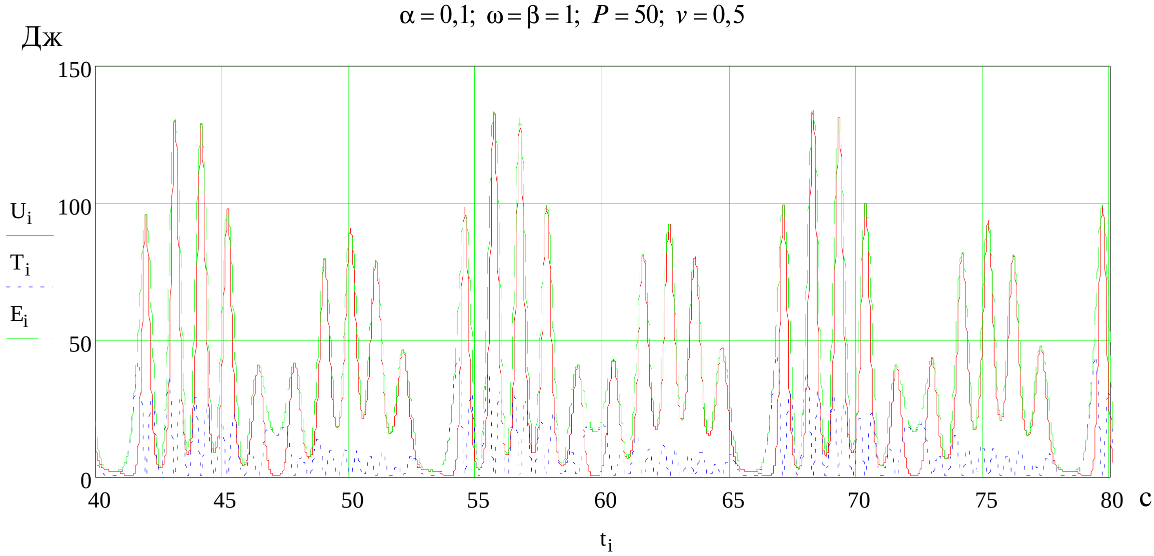

Рис. 7. Изменение потенциальной U, кинетической T и полной E энергий дуффинговской системы с одной степенью свободы при нулевых начальных условиях, соответствующее ультрагармоническим колебаниям:
$\alpha = 0{,}1;\ \omega = \beta = 1;\ P = 50;\ v = 0{,}5$

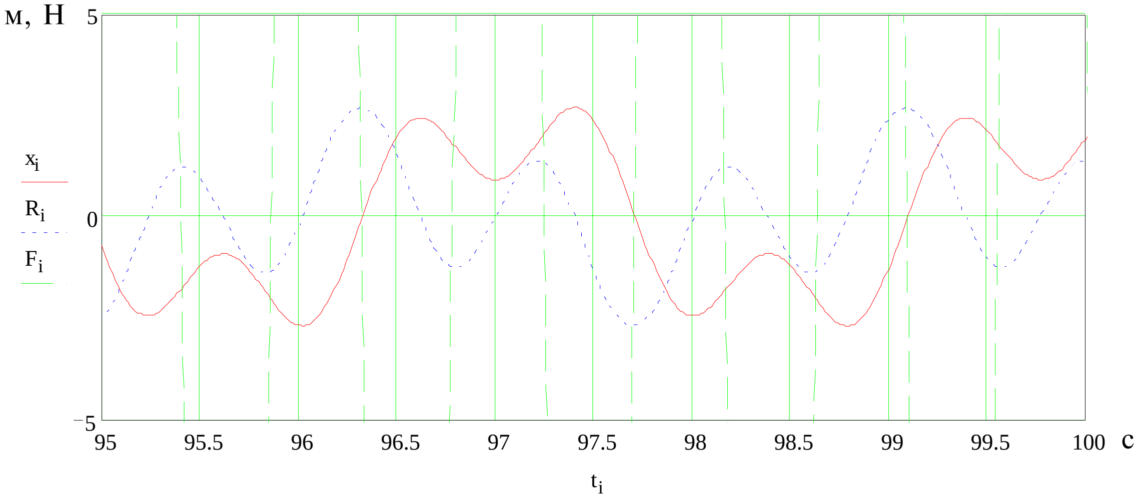

Рис. 8. Проявление фазовой нестабильности дуффинговской системы с одной степенью свободы при нулевых начальных условиях (субгармонические колебания третьего порядка):
$\alpha = 0{,}1;\ \omega = \beta = 1;\ P = 50;\ v = 6{,}8$

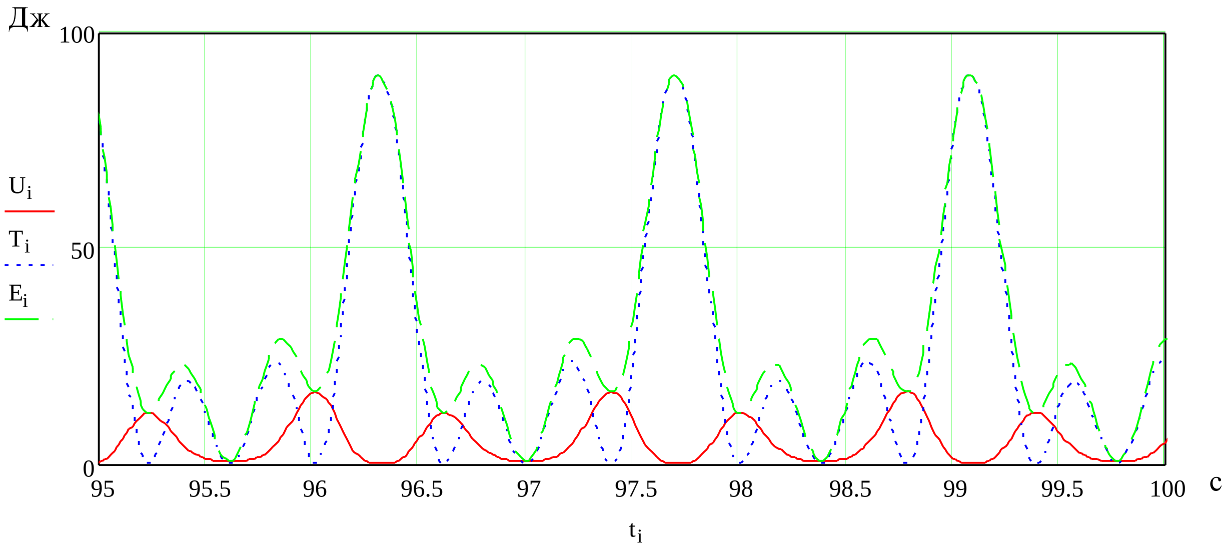

Рис. 9. Изменение потенциальной U, кинетической T и полной E энергий дуффинговской системы с одной степенью свободы при нулевых начальных условиях (субгармонические колебания третьего порядка): $\alpha = 0{,}1$; $\omega = \beta = 1$; $P = 50$; $\nu = 6{,}8$

Выводы

Дано новое определение резонанса с энергетической точки зрения, пригодное как для линейных, так и для нелинейных систем.

На основе энергетического подхода к определению резонансных частот как линейных, так и нелинейных систем установлено, что в нелинейных системах с одной степенью свободы резонансные режимы возникнуть не могут, а может возникнуть только один околорезонансный колебательный процесс при определенном сочетании интенсивности внешней нагрузки и начальных условий движения системы.

Необходимо провести коррекцию основных положений нелинейной механики с учетом полученных результатов.

Библиографический список

1. Вибрации в технике: Справочник. — М.: Машиностроение, 1979. — Т. 2.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 2005. — Т. 3.
3. *Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.* Нелинейная механика. — М.: Наука, 2006. — Т. 4.
4. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969.
5. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
6. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. — М.: Наука, 1988.
7. *Крюков Б.И.* Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. — М.: Машиностроение, 1984.
8. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1968.

Серпуховской военный институт РВСН
Статья поступила в редакцию 20.04.2009