

УДК 531.383:532.516

Моделирование волн деформаций в физически нелинейной оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость

Блинков Ю. А.^{1*}, Иванов С. В.^{2}, Могилевич Л. И.^{3***}**

¹*Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия*

²*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина
Ю.А., ул. Политехническая, 77, Саратов, 410054, Россия*

³*Московский государственный университет путей сообщения (Поволжский
филиал), ул. Астраханская, 1а, Саратов, 410790, Россия*

**e-mail: BlinkovUA@info.sgu.ru*

***e-mail: evilgraywolf@gmail.com*

****e-mail: Mogilevich@sgu.ru*

Аннотация

Настоящая работа посвящена компьютерному моделированию распространения нелинейных волн деформации в геометрически и физически нелинейных цилиндрических оболочках содержащих вязкую несжимаемую жидкость.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, нелинейные волны деформации, гидроупругость, вязкая несжимаемая жидкость, солитон

Введение

Для моделей, описываемых уравнениями в частных производных, не всегда удается построить аналитические решения и в этом случае для их исследования можно применять численные эксперименты на соответствующих разностных схемах. Так, для построения разностных схем из первоначально заданных базовых разностных соотношений, аппроксимирующих исходную систему дифференциальных уравнений, строится базис Грёбнера разностного идеала. Из этого базиса, иногда в нелинейном и всегда в линейном случае, можно извлечь разностную схему, которую иногда невозможно построить традиционными методами генерации разностных схем. Зачастую такие разностные схемы обладают уникальными свойствами, хорошо передающими физику процессов, описываемых исходными дифференциальными уравнениями.

Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных волн деформаций в геометрически и физически нелинейной упругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость. Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы с позиций теории солитонов. Наличие жидкости потребовало разработки новой математической модели и компьютерного моделирования процессов, происходящих в рассматриваемой системе.

В представленной работе техника базисов Грёбнера будет использована для анализа распространения нелинейных волн деформаций в упругих геометрически и физически нелинейных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость.

2. Постановка задачи гидроупругости и построение математической модели методом возмущений

Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы в [1,2]. Получим уравнение динамики, описывающее волну деформации, с учетом наличия жидкости в оболочке с помощью асимптотических методов для решения связанной задачи гидроупругости с соответствующими граничными условиями. Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат r, ϑ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде [3].

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right); \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости

$$V_r = -\frac{\partial W}{\partial t}, V_x = \frac{\partial U}{\partial t} \text{ при } r = R_1 - W \quad (2)$$

Здесь t — время; V_r, V_x — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; p — давление; ρ — плотность; ν — кинематический коэффициент вязкости; U — продольное упругое перемещение оболочек по оси x ; W — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки; R_1 — внутренний радиус оболочки.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа-Ляве, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_1 от интенсивности деформаций e_1 [4,5].

$$\sigma_1 = Ee_1 + me_1^3. \quad (3)$$

Здесь E — модуль Юнга; m — константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Уравнения динамики геометрически и физически нелинейной оболочки с учетом (3) записываются в виде [5].

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0^2}{24} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} \right) \left[1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4m}{3E} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} \right) \right] \right\rangle - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x, \\ & \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] - \left[\frac{\mu_0}{R} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0^2}{24} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{W}{R^2} \right) \left[1 - \frac{4m}{3E} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0^2}{24} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \mu_0 \frac{W}{R} \right) \left[1 + \frac{4m}{3E} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} \right) \right] \right\} \right\rangle + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ρ_0 — плотность материала оболочки; μ_0 — коэффициент Пуассона;

R — радиус срединной поверхности оболочки; h_0 — толщина оболочки ($h_0/2 = R - R_1$); $c_0 = \sqrt{E/[\rho_0(1-\mu_0^2)]}$ — скорость звука в материале оболочки; q_x, q_n — напряжения со стороны жидкости.

Если снять напряжения на невозмущенную поверхность оболочки ($W \ll R$), то можно считать, что поверхностные напряжения со стороны жидкости определяются формулами

$$q_x = \left[\rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R}, \quad q_n = \left[-p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R}. \quad (5)$$

Принимая за характерную длину — длину волны l , перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (4)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}. \quad (6)$$

Положим

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{l} &= \varepsilon = o(1), & \frac{w_m}{R} &= O(\varepsilon), & \frac{R}{l} &= O(\varepsilon^{1/2}), \\ \frac{h_0}{R} &= O(\varepsilon), & \frac{E}{m} &= O(\varepsilon), & \varepsilon_g \frac{R}{c_0} &= O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр в задаче (4).

Применим метод двухмасштабных асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (8)$$

где c — безразмерная неизвестная скорость волны, τ — внутренняя

переменная, а зависимые переменные представим в виде разложения по малому параметру ε

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (9)$$

Для определения правой части уравнения (4) введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_l} v_x, \quad r^* = \frac{r}{R_l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{R_l^3} P, \\ \psi = \frac{R_l}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \lambda = \frac{w_m}{R_l} = O(\varepsilon), \quad \psi \ll 1, \quad \lambda \ll 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в уравнения гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорость и давление в виде разложения по малому параметру λ

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \dots \quad (11)$$

С принятой точностью по $\lambda, \psi, \varepsilon$ положим $R_l \approx R$ и окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \\ + \frac{2m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\ - 2[1 - (2\mu_0)^2] \frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 \varepsilon R_l c_0} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c \varphi, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau \quad (13)$$

позволяет записать уравнение (12) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + \sigma_1 \varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \sigma \varphi = 0. \quad (14)$$

Здесь $\sigma = +1$ (при $\mu_0 < 1/2$ — неорганические материалы), $\sigma = -1$ (при $\mu_0 > 1/2$ — живые организмы) и $\sigma = 0$ (при $\mu_0 = 1/2$ — резина).

Постоянные c, c_1, c_2, σ_1 определяются при подстановке (13) в (12) и имеют вид

$$c_2 = \sigma 2 [1 - (2\mu_0)^2] \frac{\rho l v}{\rho_0 h_0 \varepsilon R_1 c_0}, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{1/3},$$

$$c = 6 \frac{R^2}{l u_m} \mu_0^2 c_1^2, \quad \sigma_1 = \frac{2m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{c^2 c_1}{c_2}.$$

В случае отсутствия жидкости последнее слагаемое в уравнении (14) исчезает и оно переходит в МКдВ и имеет точное частное решение в виде солитона

$$\varphi = \frac{k^2}{1 + \sqrt{1 + k^2 \frac{\sigma_1 c h \zeta}{6}}} \quad \text{где } \zeta = k\eta - k^3 t \quad (15)$$

Эти решения при $t = 0$ можно взять в качестве начальных условий при решении задачи Коши для уравнения (14).

3. Компьютерное моделирование

В работах [6,7,8] развит подход к построению разностных схем, основанный на построение переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений,

связывающих искомые функции и их производные.

Запишем уравнение (14) в интегральной форме

$$\oint_{\partial\Omega} (-3\varphi^2 + \frac{\sigma_1}{3}\varphi^3 - \varphi_{\eta\eta})dt + \varphi d\eta - \iint_{\Omega} \sigma\varphi dt d\eta = 0 \quad (16)$$

для любой области Ω . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u_j^n = \varphi(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 1.

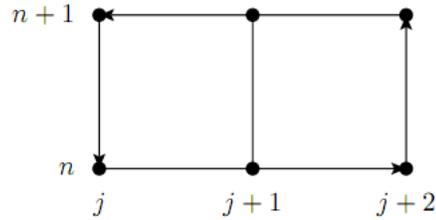


Рис. 1. Базовой контур для уравнения (16)

Добавим интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta} d\eta &= u(t, \eta_{j+1}) - u(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta\eta} d\eta &= u_{\eta}(t, \eta_{j+1}) - u_{\eta}(t, \eta_j). \end{aligned} \quad (17)$$

Используя для интегрирования по времени и по четным производным по η формулу трапеций, а по нечетным производным по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (16),(17) в виде

$$\begin{aligned}
& \left(-2(u_j^{2^n} + u_j^{2^{n+1}} - u_{j+2}^{2^n} - u_{j+2}^{2^{n+1}}) - \right. \\
& \left. + \frac{\sigma_1}{3}(u_j^{3^n} + u_j^{3^{n+1}} - u_{j+2}^{3^n} - u_{j+2}^{3^{n+1}}) - \right. \\
& \left. - (u_{\eta j}^n + u_{\eta j}^{n+1} - u_{\eta j+2}^n - u_{\eta j+2}^{n+1}) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \\
& + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) \cdot 2h - \sigma(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n) \cdot h\tau = 0, \\
& (u_{\eta j+1}^n + u_{\eta j}^n) \cdot \frac{h}{2} = u_{j+1}^n - u_j^n, \\
& u_{\eta j+1}^n \cdot 2h = u_{\eta j+2}^n - u_{\eta j}^n.
\end{aligned} \tag{18}$$

За счет выбора допустимого лексикографического упорядочения сначала по функциям $u_{\eta\eta} \succ u_\eta \succ u$, затем по переменным n, j получена следующая разностная схема для уравнения (14), аналогичная схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned}
& \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + 3 \frac{(u_{j+1}^{2^{n+1}} - u_{j-1}^{2^{n+1}}) + (u_{j+1}^{2^n} - u_{j-1}^{2^n})}{4h} + \\
& + \frac{(u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} + \\
& + \sigma_1 \frac{(u_{j+1}^{3^{n+1}} - u_{j-1}^{3^{n+1}}) + (u_{j+1}^{3^n} - u_{j-1}^{3^n})}{12h} - \\
& - \sigma \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Полученные неявные разностные схемы имеют квадратичную и кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линейризация

$$v_{k+1}^3 = v_{k+1}^3 - v_k^3 + v_k^3 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1}^2 + v_{k+1}v_k + v_k^2) + v_k^3 \approx v_{k+1} \cdot 3v_k^2 - 2v_k^3.$$

$$v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v_k^2.$$

Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчета была написана на языке Python с использованием пакета SciPy

[9].

Результаты проведенного компьютерного моделирования представлены на рис. 2-4. Расчеты позволяют сделать следующие выводы. Наличие жидкости в оболочке приводит к существенному изменению характера распространения в ней продольных волн деформаций. Если в оболочке нет жидкости (эквивалентно условию $\sigma = 0$), уединенная волна (солитон) движется, сохраняя свою первоначальную форму и скорость (см. рис. 2).

Наличие жидкости в оболочке из неорганических материалов ($\sigma = 1$) ведет к росту амплитуды волны (см. рис. 3). Таким образом, можно утверждать, что жидкость способствует постоянной дополнительной «подпитке» энергией (из источника первоначального возбуждения), обеспечивающей рост амплитуды.

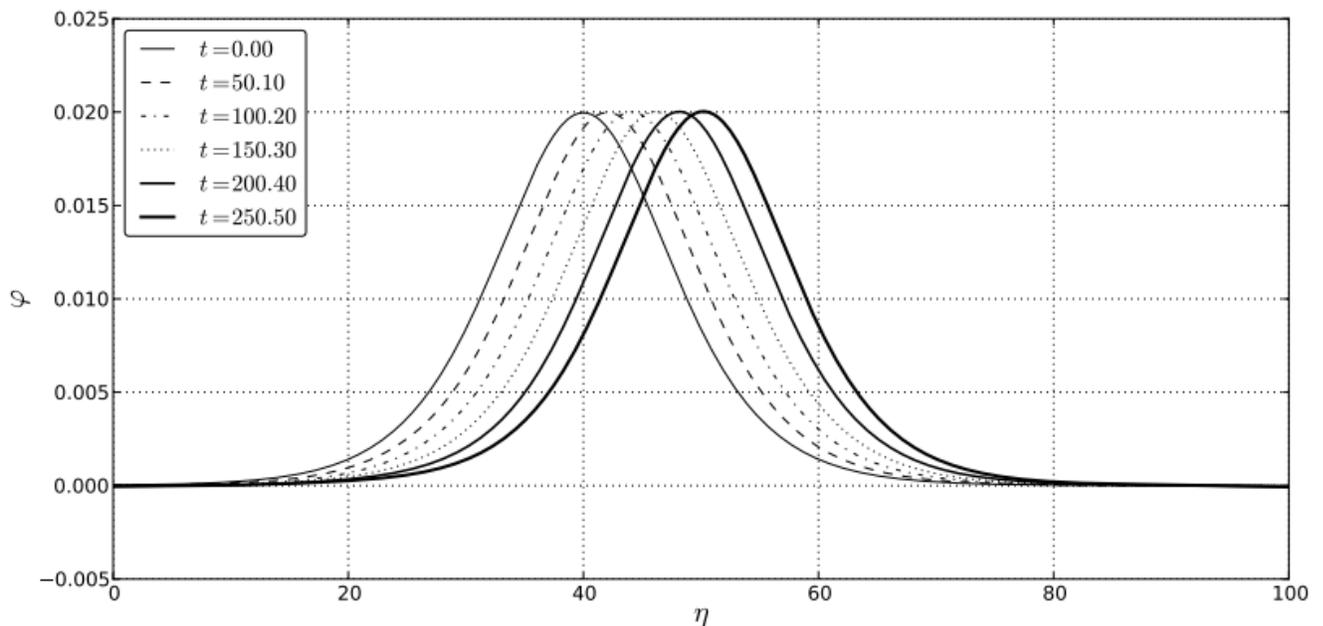


Рис. 2. График численного решения уравнения (14) с начальным условием (15) при $\sigma = 0.0$, $\sigma_1 = 6.0$, $k = 0.2$ и для $t = 0.0 \dots 40.08$

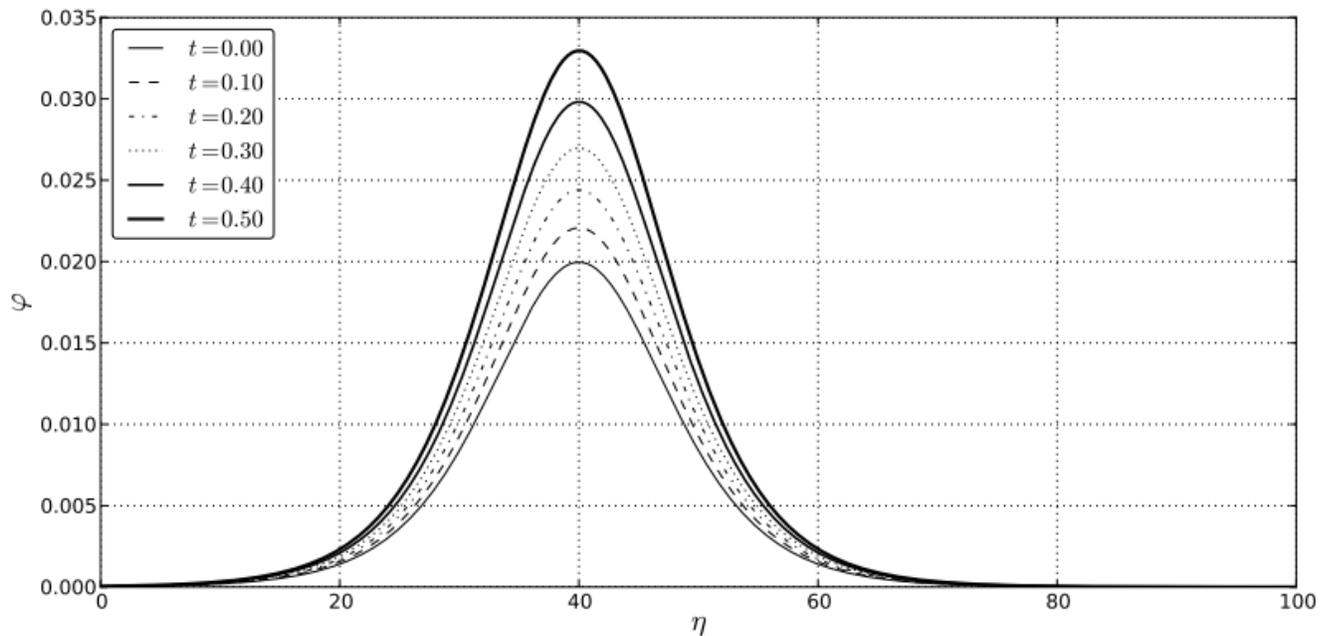


Рис. 3. График численного решения уравнения (14) с начальным условием (15) при $\sigma = 1.0$, $\sigma_1 = 6.0$, $k = 0.2$ и для $t = 0.0 \dots 2.00$

Наличие жидкости в оболочке из органических материалов (живые организмы, что соответствует $\sigma = -1$) ведет к быстрому уменьшению амплитуды волны, то есть к её затуханию (см. рис. 4). Для поддержки процесса распространения волны необходимо периодическое её возбуждение.

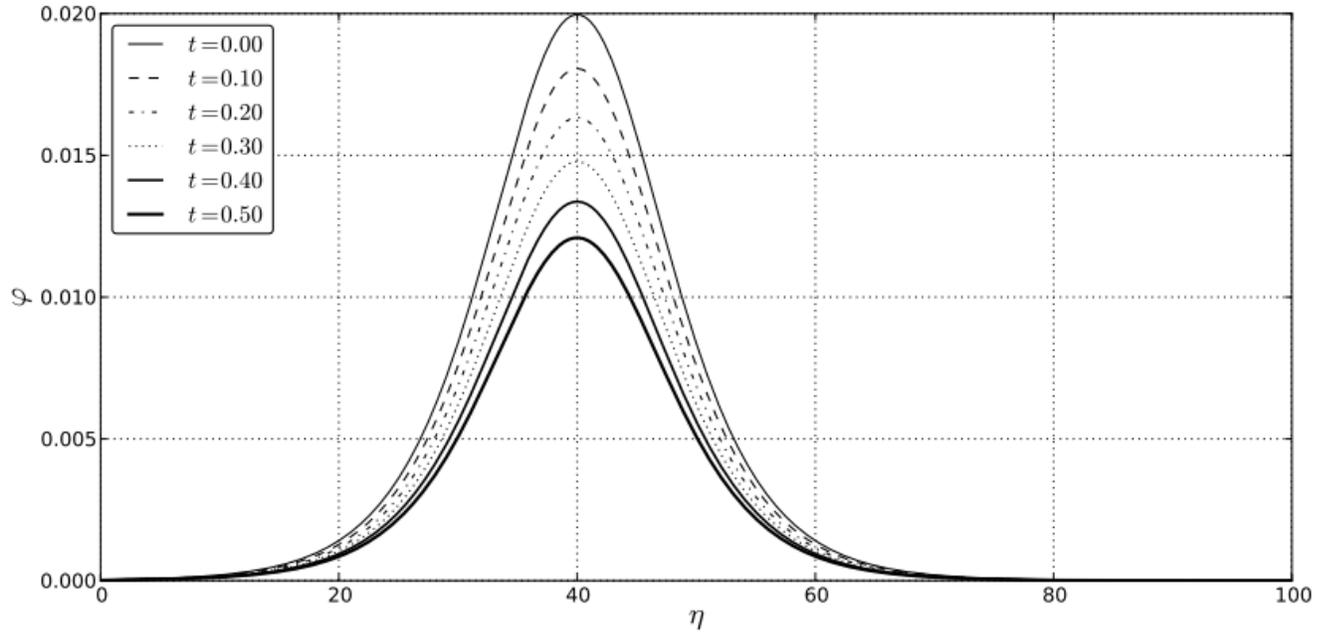


Рис. 4. График численного решения уравнения (14) с начальным условием (15) при $\sigma = -1.0$, $\sigma_1 = 6.0$, $k = 0.2$ и для $t = 0.0 \dots 2.00$

4. Заключение

Проведенное моделирование с использованием компьютерной алгебры позволило выявить особенности поведения волн деформаций в геометрически и физически нелинейной упругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость.

Использование базиса Грёбнера для генерации разностной схемы при численном решении задачи Коши для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка по пространственной переменной, позволило получить результат расчета без осцилляций вызываемых численной реализацией. Численная схема также была протестирована на точном решении для $\sigma = 0$ (см. рис. 2).

Полученный расчет показал влияние вязкой несжимаемой жидкости на поведение нелинейной волны деформации в оболочке в зависимости от величины, характеризующей материал оболочки — коэффициента Пуассона:

- рост амплитуды волны для неорганических материалов,
 - падения амплитуды волны для живых организмов,
 - отсутствие влияния жидкости для несжимаемых материалов, таких как резина.
- Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00049а

Библиографический список

1. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, No 1. С. 52–58.
2. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. С. 132.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. С. 840.
4. Каузерер К. Нелинейная механика. М.: Иностранная литература, 1961. С. 240.
5. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. С. 320.
6. Блинков Ю. А., Мозжилкин В. В. Генерация разностных схем для уравнения Бюргера построением базисов Грёбнера // Программирование. 2006. Т. 32, No 2. С. 71–74.
7. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozhilkin V. V. Gröbner bases and generation of

difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2006. Vol. 2. P. 26.
<http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html>.

8. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier-Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. Springer Berlin / Heidelberg, 2009. Vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science. pp. 94–105.

9. SciPy. <http://www.scipy.org/>