УДК 624.074.434 Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко защемленными краями

Добрышкин А.Ю.*, Сысоев О.Е.**, Сысоев Е.О.*** Комсомольский-на-Амуре государственный университет, ул. Ленина, 27, Комсомольск-на-Амуре, 681013, Россия *e-mail: wwwartem21@mail.ru **e-mail: fks@knastu.ru ***e-mail: jonpochta@mail.ru

Статья поступила 27.11.2019

Аннотация

Статья посвящена исследованиям колебаний пологих разомкнутых оболочек с присоединённой массой. Проведен теоретический анализ теорий колебаний разомкнутой цилиндрической оболочки и изогнутой пластины. Расчет оболочки производился с использование асимптотических методов решения дифференциальных уравнений, аппроксимации Паде. Получены аналитические зависимости между частотой колебаний оболочки и параметром волнообразования цилиндрической разомкнутой оболочки. Выполненные исследования проверены с помощью экспериментальных исследований. Для этих целей создана специальная установка, изготовлены испытательные образцы, разработана испытательная программа экспериментальных исследований. Уточнение математических моделей и изучений колебаний оболочек необходимо уменьшения наступления для резонансных эффектов и предотвращению аварий. Полученное решение с помощью

рекурсивной теории возмущений имеет хорошее совпадение с экспериментальными данными и более пригодно при расчетах колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек при значении параметра волнообразования больше 0,4.

Ключевые слова: тонкостенная оболочка, собственные колебания, присоединенная масса, эксперимент.

Ведение

Тонкостенные конструкции оболочечного типа, представляет значительный класс объектов, используемых в машиностроительной, строительной, и ракетнокосмической отраслях. На разомкнутые тонкостенные цилиндрические оболочки располагаются световые фонари, вентиляторы, кондиционеры, точки подвески для несения полезной нагрузки - присоединенные массы. Эксплуатация данных типов конструкций подразумевает значительные динамические нагрузки, усиливающиеся Как наличием присоединенных элементов масс. следствие, появляются значительные внутренние динамические напряжения, а так же присутствуют другие сложные процессы, приводящие к потере устойчивости, прочности и надежности конструкций. Данное обстоятельство заставляет многих ученых, инженеров, конструкторов, проектировщиков заниматься проблемами динамики оболочечных систем, несущих присоединенную массу. Эти задачи носят нелинейный характер, а их решение позволяет очень точно описать колебательные процессы, что позволяет эффективнее использовать несущую способность конструкций, сводя эффект

DOI: 10.34759/trd-2019-109-4

наличия присоединенной массы к минимуму, либо использовать его для увеличения несущей способности.

В механике деформируемого твердого тела оболочкой принято называть тело, ограниченное двумя криволинейными плоскостями, расстояние между которыми в значительной степени мало по сравнению с другими геометрическими параметрами. Пластиной называют тело, ограниченное двумя плоскостями, расстояние между которыми значительно меньше двух других геометрических параметров (длины и Допустим ширины). пластина имеет какие-то начальные неправильности, искажения, неровности плоскостей структуры, искажающие форму пластины, тогда по определению данный объект может называться оболочкой. Отсюда следует, что колебания пластин и оболочек должны описываться подобными теоретическими правилами. Присутствие всех составляющих процесса образования колебаний приводит к наложению волновых процессов [1-4] и увеличению амплитуд колебаний и как общий результат - явление резонанса и разрушение конструкции.

Поэтому требуются новые уточненные математические модели расчета колебаний тонкостенных разомкнутых цилиндрических оболочек, с начальными неправильностями формы, а так же их экспериментальные проверка. Для этого проведены исследования вынужденных колебаний тонкой прямоугольной в плане разомкнутой оболочки, жестко защемленной с двух сторон, получены экспериментальные данные, отражающие зависимость влияния присоединенной массы на численные характеристики собственных частот колебаний оболочки. Вынужденные колебания с умеренными амплитудами были разложены согласно уравнений [5,6]. Дискретная нелинейная модель колебаний тонкой оболочки, защемленной по краям, получена с применением метода многих масштабов.

Экспериментальные исследования

Проведение экспериментальных исследований в нашем случае сопровождалось тремя составляющими, а это: установка проведения опыта, испытательный образец, регистрирующее и обрабатывающее оборудование. Стенд для проведения экспериментов имеет форму столика, создавая поверхность для закрепления испытательного образца. Стенд изготовлен из равнополочных уголков L45x3 изготовленных из стали Ст3сп.

Схема проведения эксперимента изображена на рисунке 1.



Рисунок 1 – Схема действия сил.

Экспериментальный образец представляет собой разомкнутую оболочку, прямоугольную в плане, из оцинкованной стали СТО. Геометрические

характеристики объекта: L = 890 мм, B = 370 мм, H = 0,4 мм. Влиянием оцинкованного покрытия в нашем случае пренебрегли.

Испытательный образец с помощью болтов М1.1 Ø6мм. и шагом S=30мм. и прямоугольных стальных полос, прикручивается к испытательному стенду, идеально создавая условия жесткого защемления оболочки при её колебаниях. То есть краевые условия реального колебания оболочки максимально соответствуют реальным [7-10]. Присоединенную массу представляет датчик колебаний BC110, закрепленный на испытательном образце согласно рисунка 2. Акселерометр BC110 определеяет частотные характеристики колебательного процесса с точностью от 0,5...10000 Гц и характеризуется чувствительностью 100 мB/g.

Акселерометр ВС 110 передает импульс с помощью электрического сигнала на усилитель аналогового сигнала, который, усиливая электрический сигнал, и передавая по линиям электропередач далее его на АЦП (аналогово-цифровой преобразователь). Цифровой сигнал по цепи поступает на персональный компьютер. Для исключения ошибок определения частотных характеристик и увеличения точности исследования дополнительно в программе эксперимента присутствует вихретокой пробник Zet701. Данный датчик работает по принципу определения магнитной составляющей окружающей среды, расположен на расстоянии от оболочки не более 2мм. Программное обеспечении «Z-lab» позволяет отображать и записывать колебания в режиме реального времени. Блок–схема экспериментальной установки для проведения эксперимента представлена на рисунке 2.



Рисунок 2 - Блок-схема экспериментальной установки.

Воздействие на оболочку внешних сил позволяет получать в испытательном стенде экспериментальные зависимости частотной характеристики колебаний оболочки и величины присоединенной массы Изучение вынужденных колебаний разомкнутой оболочки позволяет изучать резонансные режимы колебаний, параметры их наступления, для предотвращения разрушения реальных оболочечных конструкций. Вынужденные колебания создавались с помощью удара испытательным молотком AU03 [11-14].

Математическая модель

В данной работе рассмотри задачу определения численных характеристик колебаний прямоугольной в плане разомкнутой тонкостенной оболочки, жестко – защемленной по одной из сторон $\left(-\frac{a}{2} \le \overline{x} \le 0,55a; -\frac{b}{2} \le \overline{y} \le \frac{b}{2}\right)$ [15-19]. Первоначальное дифференциальное уравнение можно описать как:

$$D\nabla^4 W + \rho W_{\mu} = 0,$$

где $D = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$, ρ – масса на единицу площади оболочки; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \overline{x^2}} + \frac{\partial^2}{\partial \overline{y^2}}$

Введем обозначения: $y = \frac{\overline{y}}{b}$; $x = \frac{\overline{x}}{b}$; $k = \frac{a}{b}$.

После подстановки соотношений получим:

$$\nabla^4 W + \frac{\rho b^4}{D} W_u = 0$$

Решение данного уравнения найдем методом разделения переменных:

$$(W=W(x,y)*T(t))$$

Постановка ондой составляющей в другую даст следующую систему уравнений:

$$T''(t) + \theta^2 T = 0,$$
$$\nabla^4 W - \lambda W = 0,$$

где $\lambda = \rho \theta^2 b^4 D^{-1}$ - собственное число задачи.

С целью получения частотных характеристик вынужденных колебаний, дифференциальное уравнение стоит ограничить краевыми параметрами защемления:

$$W = 0, W_x = 0$$
 при $x = \pm 0.5k$,
 $W = 0, W_y = 0$ при $y = \pm 0.5$

Обозначим краевые условия при помощи переменной є:

$$W = 0, (1 - \varepsilon)W_{xx} \pm \varepsilon kW_x = 0;$$
 при $x = \pm 0.5k,$
 $W = 0, (1 - \varepsilon)W_{yy} \pm \varepsilon kW_y = 0;$ при $y = \pm 0.5.$

При $\varepsilon = 1$ реализуются условия защемления по контуру.

Следующим действием раскладываем первый параметр колебаний λ и первую

форму W на ряды с параметром є. Используя ряды для решения дифференциального уравнения и реализуя краевые условия [20-21], разделяем на степени є находим рекуррентную последовательность граничных задач:

$$\nabla^4 W - \lambda_0 W_j = 0,$$

 $W = 0, W_{0xx} = 0;$ при $x = \pm 0,5k,$
 $W = 0, W_{0yy} = 0;$ при $y = \pm 0,5,$
 $\nabla^4 W - \lambda_0 W_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i W_{j-i};$
 $W_j = 0, W_{jxx} = \pm k \sum_{i=1}^{j-1} W_{ix},$ при $x = \pm 0,5k,$
 $W_j = 0, W_{jyy} = \pm k \sum_{i=1}^{j-1} W_{iy},$ при $y = \pm 0,5.$

Так же следует описать определение первых чисел колебаний и форм для варианта, когда личные формы описаны линейным соответствием согласно осей х и у.

В нулевом приближении имеем:

$$\lambda_0 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2\right)^2, n, m = 1, 3, 5, ...,$$
$$W_0 = c \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y.$$

Задача первого приближения запишем следующим образом:

$$\nabla^4 W_1 - \lambda_0 W_1 = \lambda_1 \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y;$$

$$W_1 = 0, W_{1xx} = \pm \pi m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos \pi n y \text{ при } x = \pm 0,5k$$
$$W_1 = 0, W_{1yy} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{\pi m}{k} \text{ при } y = \pm 0,5$$

Решение ищем методом разделения переменных, представив функцию W₁ в виде:

$$W_1 = Y_1 y \cos \frac{\pi m}{k} x + X_1 \cos \pi n y.$$

Собственное число λ_1 также представим в виде суммы:

$$\lambda_1 = \lambda_{1x} + \lambda_{1y}.$$

После подстановки выражений в уравнение и в соответствии с граничными условия получаем две краевые задачи:

$$\begin{split} Y_1^{\text{IV}} &- 2\pi^2 \frac{m^2}{k^2} Y_1^{\text{II}} - \pi^4 n^2 \left[2\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right] Y_1 = \lambda_{1y} \cos \pi ny; \\ Y_1 &= 0, \ Y_1^{\text{II}} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \text{при } y = \pm 0.5, \\ X_1^{\text{IV}}(x) &+ 2\pi^2 n^2 X_1^{\text{II}}(x) - \pi^4 \frac{m^4}{k^4} \left[\frac{m^4}{k^4} + 2n^2 \right] X_1(x) = \lambda_{1x} \cos \frac{\pi m}{k} x; \\ X_1 &= 0, X_1^{\text{II}}(x) = \pm \pi m (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \text{при } x = \pm 0.5k. \end{split}$$

Интегрируя уравнение по частям, получим:

$$\begin{split} \int_{-0.5}^{0.5} u(y) \left[Y_1^{\text{IV}} - 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} Y_1^{\text{II}} - \pi^4 n^2 \left[2 \frac{m^2}{k^2} + n^2 \right] Y_1 \right] dy \\ &+ u(y) Y_1^{\text{III}} \left| \begin{array}{c} 0.5 \\ -0.5 \end{array} + u^{\text{II}}(y) Y_1^{\text{I}} \left| \begin{array}{c} 0.5 \\ -0.5 \end{array} - u^{\text{III}}(y) Y_1 \right| \left| \begin{array}{c} 0.5 \\ -0.5 \end{array} \right] \\ &- 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} (u(y) Y_1^{\text{I}} \left| \begin{array}{c} 0.5 \\ -0.5 \end{array} - u^{\text{I}}(y) Y_1 \right| \left| \begin{array}{c} 0.5 \\ -0.5 \end{array} \right] \\ &- 0.5 \end{aligned}$$

Приравнивая нулю подынтегральное выражение в левой части соотношения, получим уравнение относительно функции u(y):

$$u^{\text{IV}}(y) - 2\frac{\pi^2 m^2}{k^2} u^{\text{II}}(y) - \pi^4 n^2 \left(2\frac{m^2}{k^2} + n^2\right) u(y) = 0.$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие:

$$u(y)\left[Y_{1}^{\text{III}}-\frac{\pi^{2}m^{2}}{k^{2}}Y_{1}^{\text{I}}\right]\begin{vmatrix}0,5\\-0,5-u^{\text{II}}(y)Y_{1}^{\text{I}}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0,5\\-0,5=0.$$

Условие выполняется, если коэффициенты при Y_1^{I} и Y_1^{II} равны нулю.

$$u(y) = 0$$
, $u^{II}(y) = 0$, при $y = \pm 0.5$.

Общее решение уравнения таково:

$$u(y) = c_1 ch\pi \sqrt{2\frac{m^2}{k^2} + n^2}y + c_2 \cos \pi n y.$$

Краевым условиям удовлетворяет лишь второе слагаемое, поэтому:

$$u(y) = c_2 \cos \pi n y.$$

Из решения получаем условие разрешимости:

$$\lambda_{1\nu} - 4\pi^2 n^2$$
.

Теперь определяем У1:

$$Y_{1} = \frac{n}{\pi \alpha} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2ch_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}} ch\pi \beta_{1}y - y\sin\pi ny \right].$$

Здесь $\alpha = n^2 + \frac{m^2}{k^2}$; $\beta_1 = \sqrt{2\frac{m^2}{k^2} + n^2}$, n = 1,3,5,...

Краевую задачу решаем аналогично, в результате получаем:

$$\lambda_{1x} = 4\pi^2 \frac{n^2}{k^2};$$
$$X_1 = \frac{m/k}{\pi \alpha} \left[\frac{k(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2ch\frac{\pi}{2}\beta_2} ch\pi\beta_2 x - x\sin\frac{\pi m}{k} x \right].$$
Здесь $\beta_2 = \sqrt{\frac{m^2}{k^2} + 2n^2}, m = 1,3,5, ...$

Первая поправка к собственному числу λ_1 и собственной форме W_1 для прямосимметричных форм имеет вид:

$$\lambda_1 = 4\pi^2 \alpha$$

$$W_{1} = \frac{1}{\pi \alpha} \left\{ n \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2ch\frac{\pi}{2}\beta_{1}} ch\pi\beta_{1}y - y\sin\pi ny \right] \cos\frac{\pi m}{k} + \frac{m}{k} \left[\frac{k(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2ch\frac{\pi}{2}\beta_{2}} ch\pi\beta_{2}x - x\sin\frac{\pi m}{k}x \right] \cos\pi ny \right\}, n, m = 1, 3, 5, \dots$$

Аналогично определяется
$$\lambda_2$$
 .

При рекурсивной формулировки теории возмущений первое частота колебаний соответствует:

$$\begin{split} \lambda &= \pi^4 \alpha^2 + 4\pi^2 \alpha \varepsilon \\ &+ 4\pi \left\{ \pi \alpha + 2 \frac{n^2 \frac{m^2}{k^2}}{\pi \alpha^2} - \frac{1}{2\pi} \right. \\ &- \frac{1}{2\alpha} \left(k \frac{m^2}{k^2} \beta_1 cth^{(-1)^n} \frac{\pi}{2k} \beta_1 + n^2 \beta_2 cth^{(-1)^n} \frac{\pi}{2} \beta_2 \right) \right\} \varepsilon^3 + \cdots, \end{split}$$

 $n,m = 1,3,5,\ldots$

Выводы

Рисунок 3 отражает корреляцию первой собственной частоты колебаний λ⁽¹⁾ от ε для рекурсивной формулировки теории возмущений (график 1) и аппроксимации Паде (график 2), данный полученные в ходе экспериментальных исследований (кривая 3).

Стоит заметить, что максимальное значение переменной ε , соответствующее разницы величин, определенных методом рекурсивной формулировки теории возмущений и аппроксимации Паде составляют не более 5%, – при ε = 0.4. Когда ε = 1 значения, определенные при помощи математической модели, представленной в данной работе, не соответствуют численным результатам и возможно будут применены возможно для расчета второго числа колебательного процесса, при расщеплении форм колебаний.

Численные данные, определенные с помощью аппроксимации Паде, очень точны, отлично описывают частотные характеристики колебательного процесса при $0 \le \varepsilon \le 1$. Данные, полученные в ходе постановки эксперимента, представляют минимальные расхождения, для метода РТВ (рекурсивной формулировки теории возмущений). В диапазоне $\varepsilon \le 0.5$ данные, полученные в ходе постановки эксперимента расходятся в численными данными, определенными при методе аппроксимации Паде. Скоррелированная математическая модель при $\varepsilon > 0.4$ имеет значителные совпадения с экспериментальными данными, поэтому диапазон $\varepsilon > 0.4$ отлично подходит для расчета с использованием математической модели,

полученной в данной работе



 Данные, полученные с помощью рекурсивной формулировки теории возмущений;

2 - Данные, полученные с помощью аппроксимации Паде;

3- Экспериментальные данные;

Рисунок 3 - Первое собственное число для прямоугольной в плане защемленной разомкнутой оболочки.

Вывод: для проведения численных расчетов разомкнутых цилиндрических оболочек с жестко-защемленными граями следует применять математическую модель, описанную в данной работе, потому что данная мат. модель более точно описывает процесс колебаний и подтвержден проведением экспериментальных исследований.

Библиографический список

 Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. – М. - Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.

 Кубенко В.Д. Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев: Наукова думка, 1984. – 220 с.

Антуфьев Б.А. Колебания неоднородных тонкостенных конструкций. –
 М.: Изд-во МАИ, 2011. – 176 с.

4. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн Сит Наинг. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. Выпуск № 98. 2018. URL: <u>http://trudymai.ru/published.php?ID=90079</u>

5. Z. Wang, Q. Han, D.H. Nash, P. Liu, Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell // Thin-Walled Structures, 2017, no. 119, pp. 438 - 446. DOI: <u>10.1016/j.tws.2017.07.002</u>

6. Sysoev O.E., Dobrychkin A.Yu., Nyein Sitt Naing, Baenkhaev A.V. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell // Materials Science Forum, 2019, vol. 945, pp. 885 – 892. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.945.885

7. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Naing N.S. Nonlinear Oscillations of Elastic Curved Plate Carried to the Associated Masses System // International Conference on

DOI: 10.34759/trd-2019-109-4

Construction, Architecture and Technosphere Safety (ICCATS 2017), 21–22 September 2017, Chelyabinsk, Russian Federation. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2017, vol. 262, 012055, doi:10.1088/1757-899X/262/1/012055

8. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н., Кахоров К.К. Современные испытательные стенды для бесконтактного исследования свободных колебаний замкнутых и разомкнутых цилиндрических оболочек // Ученые записки КнАГТУ, 2017, № 1 (29). С. 110 - 118. <u>http://www.uzknastu.ru/files/pdf/29/1/16.pdf</u>

9. Mallon N.J., Fey R.H. B, Nijmeijer H. Dynamic stability of a base–excited thin orthotropic cylindrical shell with top mass: simulations and experiments // Journal of Sound and Vibration, 2010, vol. 329, pp. 3149 – 3170.

https://research.tue.nl/en/publications/dynamic-stability-of-a-base-excited-thinorthotropic-cylindrical-

10. Y. Qu, H. Hua, G. Meng. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries // Composite Structures, 2013, vol. 95, pp. 307 – 321.

 Y. Xing, B. Liu, T. Xu. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions // International Journal of Mechanical Sciences, 2013, vol. 75, pp. 178 – 188.

12. M. Chen, K. Xie, W. Jia, and K. Xu. Free and forced vibration of ring-stiffened conical–cylindrical shells with arbitrary boundary conditions // Ocean Engineering, 2015, vol. 108, pp. 241 – 256.

13. H. Li, M. Zhu, Z. Xu, Z. Wang, and B. Wen. The influence on modal parameters of thin cylindrical shell under bolt looseness boundary // Shock and Vibration, 2016, http://dx.doi.org/10.1155/2016/4709257

Foster N., Fernández–Galiano L. Norman Foster in the 21st Century. AV Monografías,
 Artes Gráficas Palermo, 2013, pp. 163 – 164.

15. Eliseev V.V., Moskalets A.A., Oborin E.A. One-dimensional models in turbine blades dynamics // Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2016, vol. 9, pp. 93 - 104.

16. Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models, Berlin, Humboldt University, 2014, 34 p.

17. Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А. Статическое и динамическое поведение пологих оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58524

Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л.
 Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Труды МАИ. 2013. № 71. URL: <u>http://trudymai.ru/published.php?ID=46621</u>

Demin A. A., Golubeva T. N., Demina A. S. The program complex for research of fluctuations' ranges of plates and shells in magnetic field // 11th Students' Science Conference «Future Information technology solutions», Bedlewo, 3-6 October 2013, pp. 61 - 66.

20. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58589

21. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <u>http://trudymai.ru/published.php?ID=105618</u>