

Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 10. С. 479–484  
Thermal processes in engineering, 2023, vol. 15, no. 10, pp. 479–484

Научная статья  
УДК 536.2.083

## Идентификация коэффициента теплопроводности материала при криогенных температурах

Н.О. Борщев✉

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук, Москва, Россия*  
✉ [www.moriarty93@mail.ru](mailto:www.moriarty93@mail.ru)

**Аннотация.** Рассмотрен алгоритм определения теплопроводности углепластика как функции: от температуры при его захлаживании в криостатируемой камере до температуры 2,6 К. Данная задача решается путем поиска экстремума в ходе минимизации среднеквадратичного отклонения между теоретическим и экспериментальным полем температур в местах установки датчиков температур. В качестве регуляризации для преодоления некорректности постановки «прямой» задачи теплообмена применяется метод итерационной регуляризации, где регуляризуемым параметром является номер итерации.

**Ключевые слова:** обратная задача теплопроводности, метод итерационной регуляризации, гелиевый уровень температур, криостат

**Для цитирования.** Борщев Н.О. Идентификация коэффициента теплопроводности материала при криогенных температурах // Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 10. С. 479–484. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=177592>

Original article

## Thermal conductivity coefficient identification of the material at cryogenic temperatures

N.O. Borshchev✉

*Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*  
✉ [www.moriarty93@mail.ru](mailto:www.moriarty93@mail.ru)

**Abstract.** The article considered an algorithm for carbon fiber-reinforced plastic thermal conductivity determining as a function of temperature while its chilldown in crio-stated chamber down to the temperature of 2.6 K. The said problem is being solved by the extremum seeking during mean-square deviation minimization between theoretical and experimental temperature fields in the places of temperature sensors placing. Iteration regularization method, where iteration number is the regularizable parameter, is applied as regularization to overcome incorrectness of the «direct» thermal exchange problem setting.

**Keywords:** inverse problem of thermal conductivity, iterative regularization method, helium temperature level, cryostat

**For citation.** Borshchev N.O. Thermal conductivity coefficient identification of the material at cryogenic temperatures. *Thermal processes in engineering*, 2023, vol. 15, no. 10, pp. 479–484. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=177592>

© Борщев Н.О., 2023

**Введение**

При проектировании теплового режима космических аппаратов, одной из первостепенных задач является термостатирование приборно-агрегатного оборудования при температуре 4,5 К. К таким задачам можно отнести дистанционное зондирование Земли, метеорологические и навигационные функции. Для этого необходимо определить рабочий диапазон изменения тепловой проводимости материалов, из которых изготавливаются комплектующие космических аппаратов. Целью данной работы является определение теплопроводности углепластика, функционирующего при температурах 300–4,5 К на основе классической теории параметрической идентификации.

**Постановка «прямой» задачи теплообмена**

Процесс передачи тепла обеспечивается за счет кондуктивного теплоотока к нижнему основанию криоплиты и излучения самого алюминиевого колпака, состоящего из алюминия, который также параллельно захлаживается вместе с образцом. Сам образец выполнен в виде цилиндрического тела, толщиной 5 мм и диаметром 50 мм.

Тепловая физико-математическая модель [1–4] представлена ниже при идеальном тепловом контакте с медной криоплитой в изотропном приближении:

$$C(T)\rho \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right); \quad (1)$$

$$T(x, 0) = 300;$$

Поскольку верхнее основание образца участвует в лучистом теплообмене с алюминиевым колпаком, то для него граничное условие будет иметь вид:

$$\lambda(T) \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = \varepsilon_{\text{пр}} (T_{\text{колпак}}(\tau) - T(0, \tau));$$

Граничное условие для нижнего основания записывается в виде равенства температур криоплиты и температуры образца на нижней границе:

$$T(l_x, \tau) = \tilde{T}(\tau); \quad (2)$$

Математическая модель алюминиевого колпака описывается обыкновенным дифференциальным уравнением и имеет вид [4, 5]:

$$C_{al}(T)\rho \frac{dT_{\text{колпак}}(\tau)}{d\tau} V =$$

$$= \frac{\lambda}{\delta} (\tilde{T}(\tau) - T_{\text{колпак}}(\tau)) F_{\text{cond}} -$$

$$- \varepsilon_{\text{пр}} (T(0, \tau) - T_{\text{колпак}}(\tau)) F_{\text{рад}};$$

$$T_{\text{колпак}}(0) = 300;$$

Выражение для расчета приведенной степени черноты имеет вид:

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}; \quad (4)$$

В данной системе уравнений (1)–(4) введены следующие обозначения:

- $C$  – удельная теплоемкость, Дж/(кгК);
- $T(x, \tau)$  – температура образца, К
- $T_{\text{колпак}}(\tau)$  – среднемассовая температура алюминиевого колпака, К;
- $\tilde{T}$  – экспериментальная температура захлаживания криоплиты, К;
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – степень черноты поверхности образца и среднеобъемная степень черноты алюминиевого колпака;
- $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;
- $\lambda$  – теплопроводность, Вт/(мК);
- $F_{\text{cond}}$  – кондуктивная площадь теплообмена образца с криогенной плитой, м<sup>2</sup>;
- $F_{\text{рад}}$  – радиационная площадь теплообмена образца с алюминиевым колпаком криостата, м<sup>2</sup>;
- $F_1, F_2$  – суммарные площади активных поверхностей теплообмена (поверхностей, участвующих в лучистом теплообмене друг с другом) образца и алюминиевого колпака, м<sup>2</sup>;

Тепловой процесс, описывающий изменение энергии образца, связан с теплооттоком к криоплите, на которой установлен датчик температур на расстоянии 4 мм от образца по горизонтали, а также за счет переизлучения между образцом и алюминиевым колпаком камеры. Криогенная плита соединена с криопальцем. Принцип работы криостата подробно описывается циклом Стерлинга. Принципиальная тепловая расчетная схема представлена на рис. 1.

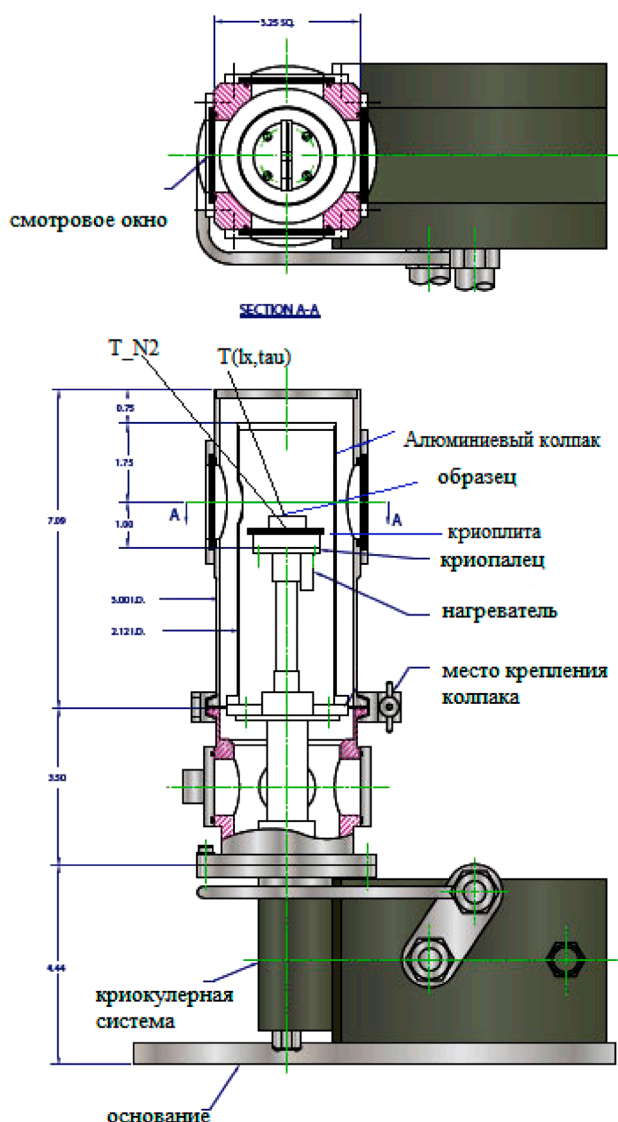


Рис. 1. Тепловая расчетная схема захлаживания образца ( $T_{N2}$  – температура криоплиты в месте установки датчика температуры;  $T(x, \tau)$  – температура на верхнем основании образца)

### Алгоритм идентификации коэффициента теплопроводности как функции от температуры

Теплопроводность представляется в следующем виде:

$$\lambda_{эф}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_p N_m(T); \quad (4)$$

$N_m(T)$  – кусочно-постоянные базисные функции.  $\lambda_p$  – параметризованное значение коэффициента теплопроводности, Вт/(мК);

$$N_m(T) = \begin{cases} 0, & T < T_{m-1}; \\ 0, & T > T_m, \quad m = 1, M; \end{cases} \quad (5)$$

Задача сводится к отысканию теплопроводности образца за счет поиска глобального минимума из среднеквадратичного функционала невязки между теоретическим и экспериментальным полем температур в местах установки датчиков температур. Вид функционала представлен ниже [5–9]:

$$S(\lambda_p) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \int_0^{\tau_{max}} (T(x, \tau) - \tilde{T}(x, \tau))^2 d\tau; \quad (6)$$

$\tilde{T}(x, \tau)$  – экспериментальное значение температуры в местах установки датчиков температур, К;

Результаты замеров температур криоплиты и образца при захлаживании медной криоплиты до 2,6 представлены на рис. 2.

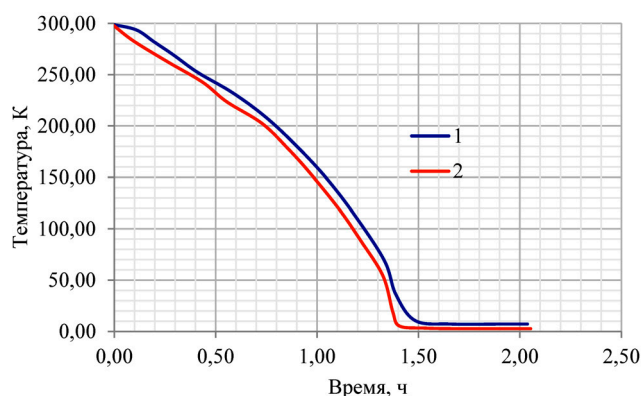


Рис. 2. Результаты замеров температур образца и криоплиты: 1 – температура замера образца на его верхнем основании; 2 – температура основания криоплиты, К

Для минимизации рассматриваемого функционала невязки воспользуемся методом сопряженных градиентов [9–12]. Его алгоритм на примере параметризованного коэффициента теплопроводности представлен:

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \Delta\lambda^{(n+1)}, \quad (7)$$

где

$$\Delta\lambda^{(n+1)} = -\beta_k p^{(n)}; \quad (8)$$

направление спуска определяется из:

$$\vec{p}^n = \text{grad}S(\lambda^{(n)}) + \beta_n \vec{p}^{(n-1)}; \quad (9)$$

$$\beta_0 = 0, \quad p^{(0)} = \text{grad}S(\lambda^{(0)}); \quad (10)$$

коэффициент Флетчера – Ривса:

$$\beta_n = \frac{|\text{grad}S(\lambda^{(n)})|^2}{|\text{grad}S(\lambda^{(n-1)})|^2}; \quad (11)$$

критерием останова итерационного процесса является выражение:

$$|\text{grad}S(\lambda^{(0)})| = \sqrt{\sum_{p=1}^3 \left[ \frac{\partial S(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_p} \right]^2} \leq \delta_{\text{sum}}, \quad (12)$$

где  $\delta_{\text{sum}}$  – погрешность входных данных, вычисленная в той же метрике, что и целевой функционал.

Градиент целевого функционала будет выглядеть следующим образом:

$$\text{grad}S(\lambda_p) = \sum_{m=1}^M \int_0^{\tau_{\text{max}}} (T(x, \tau) - \tilde{T}_{N2}(x, \tau)) \times \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \lambda_p} d\tau; \quad (13)$$

Для отыскания коэффициентов чувствительности  $\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \lambda_p}$  необходимо продифференцировать

искомую постановку задачи по параметризованному коэффициенту теплопроводности [13–17]. В результате получим коэффициент чувствительности для математической модели образца при идеальном тепловом контакте с криооплитой:

$$C(T)\rho \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial \tau \partial \lambda_p} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x \partial \lambda_p} \right); \quad (14)$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial \lambda_p} = 0;$$

$$\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 T(0, \tau)}{\partial x \partial \lambda_p} =$$

$$= \varepsilon_{\text{пр}} \left( \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \lambda_p} - \frac{\partial T_{al}(\tau)}{\partial \lambda_p} \right); \quad (15)$$

$$\frac{\partial T(l_x, \tau)}{\partial \lambda_p} = 0.$$

Коэффициент чувствительности для математической модели алюминиевого колпака, выполненной из высокополированного алюминия, имеет вид:

$$C_{al}(T)\rho \frac{\partial^2 T_{al}(x, \tau)}{\partial x \partial \lambda_p} V = -\varepsilon_{\text{пр}} \left( \frac{\partial T_{al}(0, \tau)}{\partial \lambda_p} - \frac{\partial T_{al}(\tau)}{\partial \lambda_p} \right) F_{\text{рад}}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial T_{al}(0)}{\partial \lambda_p} = 0.$$

Для нахождения шага спуска, исходя из метода итерационной регуляризации [9], запишем выражение целевого функционала на следующей итерации:

$$S(\lambda_p + \Delta \lambda_p) = S(\lambda_p) - \alpha_{cn} \left[ \frac{\partial S(\lambda_p)}{\partial \lambda_p} \right]^2; \quad (17)$$

$$S(\lambda_p + \Delta \lambda_p) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \int_0^{\tau_{\text{max}}} \left[ T(\lambda_p, x, \tau) - \alpha_{cn} \frac{\partial T(\lambda_p, x, \tau)}{\partial \lambda_p} - \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{\tau}) \right]^2 d\tau; \quad (18)$$

Согласно принципу глобального минимума необходимо приравнять полученное выражение к нулю и выразить шаг спуска. Получим формулу зависимости:

$$\alpha_{cn} = \sum_{m=1}^M \int_0^{\tau_{\text{max}}} \frac{T(\lambda_p, x, \tau) - \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{\tau})}{\frac{\partial T(\lambda_p)}{\partial \lambda_p}} d\tau; \quad (19)$$

Таким образом, данный алгоритм включает в себя следующую последовательность действий.

1. Задание начальных приближений параметрических величин теплофизических параметров.

2. Решение «прямой» задачи прогрева конструкции в одномерном приближении путем моделирования условий наземной тепловакуумной отработки изделия.

3. Получение экспериментального температурного поля изделия в местах установки датчиков температур.

4. Составление среднеквадратичной интегральной ошибки между теоретическим и экспериментальным температурным полем в местах установки датчиков температур.

5. Решение двух сопряженных задач по поиску компонент градиента целевого функционала невязки между теоретическим и экспериментальным температурным полем.

6. Вычисление шага спуска в методе сопряженных направлений на основе метода итерационной регуляризации.

7. Получение следующих итерированных приближений искомых параметрических величин.

8. Проверка критерия останова итерационного процесса. В случае его выполнения параметризованные величины считаются искомыми, иначе необходимо повторно выполнить пункты 1–7.

Данный процесс представлен в виде блок-схемы на рис. 3.

При решении обратной задачи теплопроводности помимо итерационного определения коэффициента теплопроводности, происходит итерационное восстановление теоретического температурного поля, которое стремится по своей динамике к экспериментальному. Результаты данного температурного поля для алюминиевого колпака и углепластика М55J в месте установки датчиков температуры представлены на рис. 4.

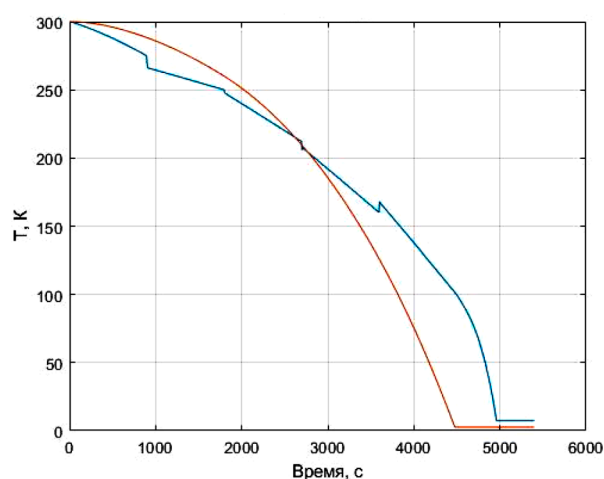


Рис. 4. Значения расчетных температур как функции от времени для верхнего основания образца в местах установлен датчика температур

Как видно из рис. 4, при сравнении теоретической кривой захлаживания с экспериментальной динамикой захлаживания, представленной на рис. 2, совпадение температурных кривых удовлетворительное. Резкие скачки изменения температуры для образца обусловлены приравнением экспериментальной и теоретической температуры в рассматриваемых шести базисных функциях.

На рис. 5 представлены результаты решения обратной коэффициентной задачи по определению коэффициента теплопроводности углепластика М55J и его аппроксимации с помощью кусочно-постоянных базисных функций.

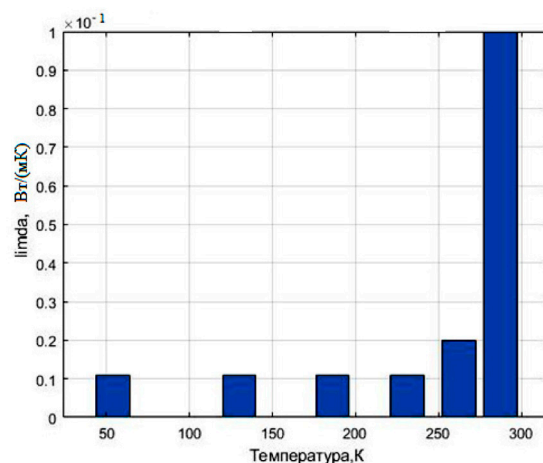


Рис. 5. Значения коэффициента теплопроводности как функции от температуры для углепластика М55J при аппроксимации коэффициента теплопроводности кусочно-постоянными базисными функциями

Полученные результаты показывают, что при выходе на стационарный режим значение коэффициента теплопроводности будет 0,01 Вт/мК. Адекватность полученных значений оценивается сравнением полученного теоретического и экспериментального поля, представленных на рис. 2 и 4, где наглядно видно уменьшение среднеквадратичного отклонения между теоретическими и экспериментальными температурами в местах установки термодатчиков.

### Заключение

1. Разработан алгоритм определения коэффициента теплопроводности материалов при криогенном уровне температур при проведении теплофизических испытаний в криостатируемых камерах;

2. На основании разработанного алгоритма произведено определение теплопроводности углепластика. Адекватность полученного результата оценивается хорошей сходимостью на последней итерации теоретического поля к экспериментальному.

### Список источников

1. Залетаев В.М., Капинос Ю.В., Сургучев О.В. Расчет теплообмена космического аппарата. Москва: Машиностроение, 1979. 208 с.
2. Крейн С.Г., Прозоровская О.И. Аналитические подгруппы и некорректные задачи для эволюционных уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 277–280.
3. Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. Некорректные задачи в механике (реологии) вязкоупругих сред и их регуляризация // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 1. С. 117–143.

4. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Кокурин М.М. Прямые и обратные теоремы для итерационных методов решения нерегулярных операторных уравнений и разностных методов решения некорректных задач Коши // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 6. С. 939–962.
5. Фанов В.В., Мартынов М.Б., Карчаев Х.Ж. Летательные аппараты НПО им. С.А. Лавочкина (к 80-летию предприятия) // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2017. № 2/36. С. 5–16.
6. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. Теплообмен излучением. Москва: Энергоатомиздат, 1991. 432 с.
7. Тулин Д.В., Финченко В.С. Теоретико-экспериментальные методы проектирования систем обеспечения теплового режима космических аппаратов. Москва: МАИ-Принт, 2014. Т. 3. С. 1320–1437.
8. Цаплин С.В., Бобычев С.А., Романов А.Е. Теплообмен в космосе. Самара: Издательство Самарского университета, 2013. 56 с.
9. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1988. 288 с.
10. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. Москва: Машиностроение, 1988. 280 с.
11. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Москва: Издательство «Физматлит», 2015. 238 с.
12. Васин В.В. Модифицированный метод наискорейшего спуска для нелинейных регуляризованных операторных уравнений // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462. № 3. С. 264–265.
13. Голицhev И.И. Модифицированный градиентный метод наискорейшего спуска решения нелинейной задачи для нестационарных уравнений Навье–Стокса // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5. № 4. С. 60–76.
14. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. Москва: Издательство «Физматлит», 2004. 400 с.
15. Формалев В.Ф. Анализ двумерных температурных полей в анизотропных телах с учетом подвижных границ и большой степени анизотропии // Теплофизика высоких температур. 1990. Т. 28. № 4. С. 715–721.
16. Формалев В.Ф. Идентификация двумерных тепловых потоков в анизотропных телах сложной формы // Инженерно-физический журнал. 1989. Т. 56. № 3. С. 382–386.
17. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое решение второй начально-краевой задачи анизотропной теплопроводности // Математическое моделирование. 2003. Т. 15. № 6. С. 107–110.
- elastic media and their regularization]. *Meckanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2010, vol. 16, no. 1, pp. 117–143. (In Russ.)
4. Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu., Kokurin M.M. Pryamye i obratnye teoremy dlya iteratsionnykh metodov resheniya neregulyarnykh operatornykh uravnenii i raznostnykh metodov resheniya nekorrektnykh zadach Koshi [Direct and inverse theorems for iterative methods for solving irregular operator equations and difference methods for solving ill-posed Cauchy problems]. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, no. 6, pp. 939–962.
5. Fanov V.V., Martynov M.B., Karchaev H.Zh. Letatel'nye apparaty NPO im. S.A. Lavochkina (k 80-letiyu predpriyatiya) [Aircraft of S.A. Lavochkin NPO (to the 80th anniversary of the enterprise)]. *Vestnik NPO S.A. Lavochkina*, 2017, no. 2/36, pp. 5–16. (In Russ.)
6. Bloch A.G., Zhuravlev Yu.A., Ryzhkov L.N. Teploobmen izluzechiem [Heat transfer by radiation]. Moscow: Energoatomizdat, 1991, 432 p. (In Russ.)
7. Tulin D.V., Finchenko V.S. Teoretiko-eksperimental'nye metody proektirovaniya sistem obespecheniya teplovogo rezhima kosmicheskikh apparatov [Theoretical and experimental methods of designing systems for ensuring the thermal regime of spacecraft]. Moscow: MAI-PRINT, 2014. Vol. 3, pp. 1320–1437. (In Russ.)
8. Tsaplin S.V., Bolychev S.A., Romanov A.E. Teploobmen v kosmose [Heat transfer in space]. Samara: Izdatel'stvo Samarskogo universiteta, 2013, 56 p. (In Russ.)
9. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rummyantsev S.V. Ekhstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach [Extreme methods for solving incorrect problems]. Moscow: Nauka, 1988, 288 p. (In Russ.)
10. Alifanov O.M. Obratnye zadachi teploobmena [Inverse heat transfer problems]. Moscow: Mashinostroenie, 1988, 280 p. (In Russ.)
11. Formalev V.F. Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh [Heat transfer in anisotropic solids]. Moscow: Fizmatlit, 2015, 238 p. (In Russ.)
12. Vasin V.V. Modifitsirovannyi metod naiskoreishego spуска dlya nelineinykh regulyarnykh operatornykh uravnenii [A modified steepest descent method for nonlinear irregular operator equations]. *Reports of the Academy of Sciences*, 2015, vol. 462, no. 3, p. 264–265. (In Russ.)
13. Golichev I.I. A modified gradient method of steepest descent for solving a linearized problem for nonstationary Navier-Stokes equations. *Ufa Mathematical Journal*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 60–76.
14. Formalev V.F., Reviznikov D.L. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 400 p. (In Russ.)
15. Formalev V.F. Analysis of two-dimensional temperature fields in anisotropic bodies taking into account moving boundaries and a large degree of anisotropy. *High Temperature*, 1990, vol. 28, no. 4, pp. 715–721.
16. Formalev V.F. Identification of two-dimensional heat flows in anisotropic bodies of complex shape. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1989, vol. 56, no. 3, pp. 382–386.
17. Formalev V.F., Kolesnik S.A. Analytical solution of the second initial boundary value problem of anisotropic thermal conductivity. *Mathematical modeling*, 2003, vol. 15, no. 6, pp. 107–110.

#### References

1. Zaletaev V.M., Kapinos Yu.V., Surguchev O.V. Raschet teploobmena kosmicheskogo apparata. [Calculation of spacecraft heat transfer]. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 208 p. (In Russ.)
2. Krein S.G., Prozorovskaya O.I. Analiticheskie polugruppy i nekorrektnye zadachi dlya ehvolyutsionnykh uravnenii [Analytical semigroups and ill-posed problems for evolutionary equations]. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1960, vol. 133, no. 2, pp. 277–280. (In Russ.)
3. Bassistov Yu.A., Yanovsky Yu.G. Nekorrektnye zadachi v mekhanike (reologii) vyzkouprugikh sred i ikh regulyari-zatsiya [Incorrect problems in mechanics (rheology) of visco-

Статья поступила в редакцию 05.08.2023; одобрена после рецензирования 06.09.2023; принята к публикации 16.10.2023.

The article was submitted on 05.08.2023; approved after reviewing on 06.09.2023; accepted for publication on 16.10.2023.