 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

УДК 539.3

Исследование электроупругостного состояния цилиндрических оболочек из пьезоматериалов на основе уточненной теории

Фирсанов В.В.[1*], Нгуен Л.Х.[1], Чан Н.Д.[2]**

[1]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

[2]*Чан Нгок Доан, Государственный технический университет им. Ле Куи Дона, ул. Хоанг Куок Вьет, 236, Ханой, Социалистическая Республика Вьетнам*

*****e-mail: k906@mai.ru

******e-mail: lehung.mai@mail.ru

Статья поступила 22.10.2019

Аннотация

Разработан вариант уточненной теории расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндрических оболочек из пьезоматериалов. Математическая модель построена на основании применения уравнений трехмерной теории упругости, а также повышения степени полиномов, аппроксимирующих искомые перемещения по нормальной координате, на два порядка по отношению к классической теории типа Кирхгофа-Лява. С помощью принципа Лагранжа получены уравнения равновесия оболочек и соответствующие краевые условия при действии только электрического поля. Решение сформулированной краевой задачи основано на преобразовании Лапласа.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, пьезоматериал, электроупругость, уравнения трехмерной теории упругости, напряженно-деформированное состояние, вариационный принцип Лагранжа, краевая задача, преобразование Лапласа.

Введение

Пьезоэлектрический эффект был открыт братьями Пьером и Жаком Кюри. Сущность пьезоэффекта состоит в том, что при деформировании кристаллов некоторых классов на их поверхностях появляются электрические заряды, пропорциональные деформации, и наоборот, существование механических напряжений в кристалле при действии электрического поля. Функциональные элементы конструкций, основанные на использовании пьезоэлектриков, широко применяются в различных областях машиностроения, автоматики, вычисленной техники, особенно в авиакосмической отрасли. Такие конструкции являются технологичными и позволяют эффективно управлять их деформациями [2, 18]. Поэтому, исследование и расчет НДС элементов конструкций из пьезоматериалов является актуальной задачей.

В последнее время предложены различные методы расчета электроупругого состояния тонкостенных конструкций аналитическими и численными методами [4, 5, 13, 19]. В данной работе исследуется НДС цилиндрической оболочки из пьезоматериала для случая шарнирно опертых краев под действием осесимметричного электрического поля. Подход основан на построении уточненной теории пластин и оболочек [11, 12].

Перемещения разлагаются по нормальной к срединной плоскости оболочки координате в полиномы на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява. Применение вариационного принципа Лагранжа позволяет получить систему уравнений равновесия с краевыми условиями. Для решения сформулированной краевой задачи используется преобразование Лапласа и программное обеспечение ЭВМ.

Постановка задачи. Уравнения состояния пьезоматериалов при деформации [1, 3] с учетом сопряженного электрического поля можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = C_{ij}\varepsilon_{ij} - e^T E; \\ &D = e\varepsilon + \mu E, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma_{ij} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}]$-вектор напряжения,

$\varepsilon_{ij} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}]$-вектор деформации,

C_{ij} -симметричная матрица коэффициентов податливости, т.е.

$$C_{\text{ij}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

$D = [D_1, D_2, D_3]$-вектор электрической индукции,

$E=[E_1,E_2,E_3]$ -вектор напряженности электрического поля,

e -матрица пьезоэлектрических постоянных следующие вида,

$$e=\begin{bmatrix}0&0&0&0&e_{15}&0\\0&0&0&e_{24}&0&0\\e_{31}&e_{32}&e_{33}&0&0&0\end{bmatrix}$$

μ -симметричная матрица диэлектрических проницаемостей

$$\mu=\begin{bmatrix}\mu_{11}&0&0\\0&\mu_{22}&0\\0&0&\mu_{33}\end{bmatrix}.$$

Рассматривается круговая замкнутая цилиндрическая оболочка из пьезоматериала длиной L, толщиной $2h$ под действием осесимметричного электрического поля. При этом перемещения обшивки по направлению θ равны нулю, остальные перемещения, деформации и напряжения зависят только от x и z.

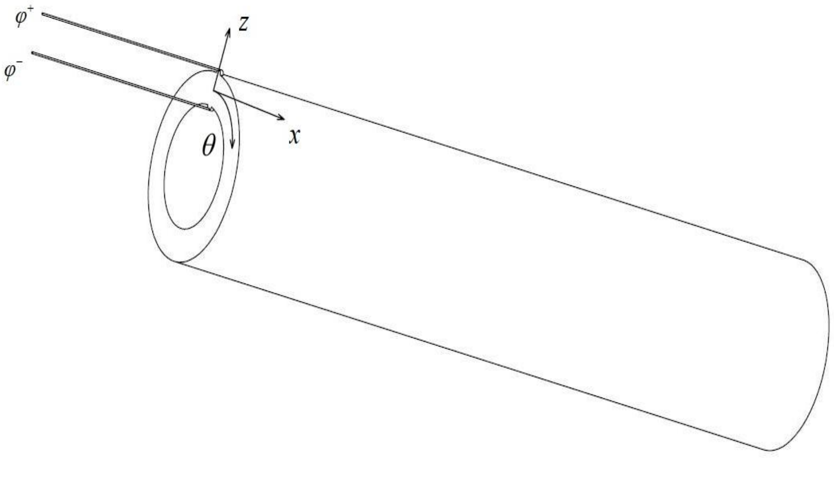

Рис1. Цилиндрическая пьезоэлектрическая оболочка

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

Для удовлетворения условия энергетической согласованности [6, 9, 10] перемещения обшивки представляются в следующем виде:

$$u(x,z) = u_0(x) + u_1(x)z + u_2(x)\frac{z^2}{2!} + u_3(x)\frac{z^3}{3!},$$

$$w(x,z) = w_0(x) + w_1(x)z + w_2(x)\frac{z^2}{2!}. \qquad (2)$$

В триортогональной криволинейной системе координат формулы «деформации – смещения» обшивки [7, 8] имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial y}v + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial y}w,$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x}u + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial z}w, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial H_1}{\partial y}u + \frac{\partial H_2}{\partial x}v\right] \qquad (3)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial z}u,$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial z}v,$$

где $H_1 = 1, \quad H_2 = 1 + rz, \quad H_3 = 1, r = \frac{1}{R}$, R – радиус оболочки.

Для описания задачи электроупругости пьезоматериалов [1, 2] используется энтальпия H

$$H = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T e^T E_j - \frac{1}{2}D_i E_i. \qquad (4)$$

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

Тогда компоненты НДС и напряженности электрического поля определяются по формулам

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad D_i = \frac{\partial H}{\partial E_i}.$$

Вектор E может быть выражен [1, 3, 20] через скалярную функцию φ, называемую потенциалом $E = -\Delta\varphi$, т.е справедливы формулы

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi}{H_1 \partial x}, \quad E_2 = -\frac{\partial \varphi}{H_2 \partial \theta}, \quad E_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (5)$$

По аналогии с формулами (2) электрический потенциал φ можно разложить [20] по толщине оболочки в виде полинома по координате z следующего вида:

$$\varphi = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)z + \varphi_2(x)z^2 \qquad (6)$$

Приложим электрический потенциал на верхнюю φ^+ и нижнюю φ^- поверхности оболочки соответственно, т.е

$$\varphi\big|_{z=h} = \varphi^+, \qquad \varphi\big|_{z=-h} = \varphi^-. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$\varphi_1 = \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2h}, \qquad \varphi_2 = -\frac{\varphi_0}{h^2} + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2h^2}.$$

Дифференциальные уравнения равновесия и естественные граничные условия для рассматриваемой оболочки находим на основе вариационного принципа Лагранжа [14-17]

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

$$\delta E = \delta H - \delta A_T + \delta A_W = 0, \qquad (8)$$

где A_T, A_W соответственно работа внешних сил T_i $(i = 1...3)$ и работа внешних зарядов Q_i $(i = 1...3)$.

Подставляя (4) в (8), выражение вариации можно представить как

$$\delta(\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV - \int_V D_i E_i dV - \int_{S\sigma} \bar{T}_i u_i dS_\sigma + \int_{Sw} \bar{Q}\varphi dS_w) = 0;$$

или

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV - \int_V D_i \delta E_i dV - \int_{S\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dS_\sigma + \int_{Sw} \bar{Q}\delta\varphi dS_w = 0. \qquad (9)$$

Из выражений(9) находим систему уравнений равновесия

$$\frac{\partial N_{11}^{(0)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{13}^{(1)}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{13}^{(2)}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{13}^{(3)}}{\partial z} = 0;$$

$$N_{22}^{(0)} - \frac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad ; \qquad (10)$$

$$N_{22}^{(1)} + N_{33}^{(0)} - \frac{\partial N_{13}^{(1)}}{\partial x} = 0;$$

$$N_{22}^{(2)} + N_{33}^{(1)} - \frac{\partial N_{13}^{(2)}}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial(Dd_1^{(0)} - \frac{Dd_1^{(2)}}{h^2})}{\partial x} + \frac{\partial(Dd_2^{(0)} - \frac{Dd_2^{(2)}}{h^2})}{\partial \theta} - \frac{2Dd_3^{(1)}}{h^2} = 0,$$

где обобщенные усилия определяются следующими формулами:

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

$$N_{11}^{(i)} = \int \sigma_{11}.(1+\frac{z}{R})\frac{z^i}{i!}dz, \quad \text{i=0...3};$$

$$N_{22}^{(i)} = \int \sigma_{22}.\frac{z^i}{i!}dz, \quad \text{i=0...2};$$

$$N_{33}^{(i)} = \int \sigma_{33}.(1+\frac{z}{R})\frac{z^i}{i!}dz, \quad \text{i=0...2}; \tag{11}$$

$$N_{13}^{(i)} = \int \sigma_{13}.(1+\frac{z}{R})\frac{z^i}{i!}dz, \quad \text{i=0...3};$$

$$Dd_1 = \int D_1(1+\frac{z}{R})dz\,, \quad Dd_2 = \int D_2 dz\,, \quad Dd_3 = \int D_3(1+\frac{z}{R})dz.$$

Граничные условия на краях $x = 0$ и $x = L$ представляются в виде

$$u_0 = u_0{}^{\Gamma} \text{ либо } N_{11}^{(0)} = 0;$$

$$u_1 = u_1{}^{\Gamma} \text{ либо } N_{11}^{(1)} + N_{13}^{(1)} = 0;$$

$$u_2 = u_2{}^{\Gamma} \text{ либо } N_{11}^{(2)} + N_{13}^{(2)} = 0;$$

$$u_3 = u_3{}^{\Gamma} \text{ либо } N_{11}^{(3)} + N_{13}^{(3)} = 0;$$

$$w_0 = w_0{}^{\Gamma} \text{ либо } N_{13}^{(0)} = 0; \tag{12}$$

$$w_1 = w_1{}^{\Gamma} \text{ либо } N_{13}^{(1)} = 0;$$

$$w_2 = w_2{}^{\Gamma} \text{ либо } N_{13}^{(2)} = 0;$$

$$e_{15}\varepsilon_{13} + \mu_{11}E_1 + Q_1 = 0;$$
$$e_{15}\varepsilon_{23} + \mu_{11}E_2 + Q_2 = 0;$$
$$e_{31}\varepsilon_{11} + e_{31}\varepsilon_{22} + e_{33}\varepsilon_{33} + \mu_{33}E_3 + Q_3 = 0.$$

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

Подставляя (11) в (10) с учетом (3) и (2), получим систему уравнений равновесия в перемещениях и потенциалах

$$K_{u_0}^{12}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_0+K_{u_1}^{12}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_1+K_{u_2}^{12}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_2+K_{u_3}^{12}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_3+K_{phi_0}^{12}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}phi_0+K_{w_0}^{11}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_0+K_{w_1}^{11}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_1+$$
$$+K_{w_2}^{11}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_2+K_{phi_0}^{11}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}phi_0=0;$$

$$K_{u_0}^{22}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_0+K_{u_1}^{22}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_1+K_{u_2}^{22}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_2+K_{u_3}^{22}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_3+K_{phi_0}^{22}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}phi_0+K_{w_0}^{21}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_0+K_{w_1}^{21}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_1+$$
$$+K_{w_2}^{21}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_2+K_{phi_0}^{21}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}phi_0=0;$$

$$K_{u_0}^{32}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_0+K_{u_1}^{32}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_1+K_{u_2}^{32}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_2+K_{u_3}^{32}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_3+K_{phi_0}^{32}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}phi_0+K_{w_0}^{31}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_0+K_{w_1}^{31}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_1+$$
$$+K_{w_2}^{31}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_2+K_{phi_0}^{31}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}phi_0=0;$$

$$K_{u_0}^{42}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_0+K_{u_1}^{42}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_1+K_{u_2}^{42}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_2+K_{u_3}^{42}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_3+K_{phi_0}^{42}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}phi_0+K_{w_0}^{41}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_0+K_{w_1}^{41}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_1+$$
$$+K_{w_2}^{41}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_2+K_{phi_0}^{41}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}phi_0=0; \tag{13}$$

$$K_{u_0}^{52}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_0+K_{u_1}^{52}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_1+K_{u_2}^{52}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_2+K_{u_3}^{52}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_3+K_{w_0}^{52}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}w_0+K_{w_1}^{52}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}w_1+K_{w_2}^{52}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}w_2+$$
$$+K_{phi_0}^{52}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}phi_0+K_{u_0}^{51}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_0+K_{u_1}^{51}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_1+K_{u_2}^{51}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_2+K_{u_3}^{51}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_3+K_{w_0}^{51}w_0+K_{w_1}^{51}w_1+$$
$$+K_{w_2}^{51}w_2+K500=0;$$

$$K_{u_0}^{62}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_0+K_{u_1}^{62}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_1+K_{u_2}^{62}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_2+K_{u_3}^{62}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_3+K_{w_0}^{62}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}w_0+K_{w_1}^{62}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}w_1+K_{w_2}^{62}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}w_2+$$
$$+K_{phi_0}^{62}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}phi_0+K_{u_0}^{61}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_0+K_{u_1}^{61}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_1+K_{u_2}^{61}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_2+K_{u_3}^{61}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_3+K_{w_0}^{61}w_0+K_{w_1}^{61}w_1+$$
$$+K_{w_2}^{61}w_{20}+K600=0;$$

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

$$K_{u_0}^{72}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_0+K_{u_1}^{72}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_1+K_{u_2}^{72}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_2+K_{u_3}^{72}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_3+K_{w_0}^{72}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}w_0+K_{w_1}^{72}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}w_1+K_{w_2}^{72}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}w_2+$$
$$+K_{phi_0}^{72}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}phi_0+K_{u_0}^{71}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_0+K_{u_1}^{71}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_1+K_{u_2}^{71}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_2+K_{u_3}^{71}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_3+K_{w_0}^{71}w_0+K_{w_1}^{71}w_1+$$
$$+K_{w_2}^{71}w_2+K700=0;$$

$$K_{phi_0}^{82}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}phi_0+K_{u_0}^{81}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_0+K_{u_1}^{81}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_1+K_{u_2}^{81}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_2+K_{u_3}^{81}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_3+K_{w_0}^{81}w_0+K_{w_1}^{81}w_1+K_{w_2}^{81}w_2+$$
$$+K_{phi_0}^{81}phi_0+K800=0;$$

Здесь коэффициенты K с верхними и нижними индексами обозначают постоянные величины, зависящие от геометрических параметров и пьезоупругих постоянных материала обшивки. Ввиду громоздкости соответствующих им выражений, они не приводятся.

Решение краевой задачи пьезооболочек с помощью преобразования Лапласа. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (13) используется операционный метод, основанный на преобразовании Лапласа. Обозначим изображения искомых перемещений $u_0,u_1,u_2,u_3,w_0,w_1,w_2,phi_0$ через $U_0,U_1,U_2,U_3,W_0,W_1,W_2,PHI_0$.

Тогда изображения их производных можно представить в виде

$$\frac{du_i}{dx}\leftrightarrow p\cdot U_i-C_{ui00}\,,\quad \frac{d^2u_i}{dx^2}\leftrightarrow p^2\cdot U_i-p\cdot C_{ui00}-C_{ui10}\,,\quad i=0...3;$$

$$\frac{dw_i}{dx}\leftrightarrow p\cdot W_i-C_{wi00}\,,\frac{d^2w_i}{dx^2}\leftrightarrow p^2\cdot W_i-p\cdot C_{wi00}-C_{wi10}\,,\quad j=0..2;\qquad (14)$$

$$\frac{dphi_0}{dx}\leftrightarrow p\cdot PHI_0-C_{phi000}\,,\quad \frac{d^2phi_0}{dx^2}\leftrightarrow p^2\cdot PHI_0-p\cdot C_{phi000}-C_{phi010}\,,$$

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

где произвольные постоянные определяются формулами

$$C_{ui00} = u_i(0)\,, \quad C_{ui10} = \frac{d}{dx} u_i(0)\,, \quad i = 0...3;$$

$$C_{wi00} = w_i(0)\,, C_{wi10} = \frac{d}{dx} w_i(0)\,, \;\; j = 0..2; \tag{15}$$

$$C_{phi000} = phi_0(0)\,, \quad C_{phi010} = \frac{d}{dx} phi_0(0).$$

Подставляя изображения (14) в систему (13), получим алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned}
&K^{12}_{u_0}.p^2.U_0 + K^{12}_{u_1}.p^2.U_1 + K^{12}_{u_2}.p^2.U_2 + K^{12}_{u_3}.p^2.U_3 + K^{12}_{phi_0}.p^2.PHI_0 + +K^{11}_{w_0}.p.W_0 + K^{11}_{w_1}.p.W_1 + \\
&+K^{11}_{w_2}.p.W_2 + K^{11}_{phi_0}.p.PHI_0 = K^{12}_{u_0}.(C_{u000}.p + C_{u010}) + K^{12}_{u_1}.(C_{u100}.p + C_{u110}) + K^{12}_{u_2}.(C_{u200}.p + C_{u210}) + \\
&+K^{12}_{u_3}.(C_{u300}.p + C_{u310}) + K^{12}_{phi_0}.(C_{phi000}.p + C_{phi010}) + K^{11}_{w_0}.C_{w000} + K^{11}_{w_1}.C_{w100} + K^{11}_{w_2}.C_{w200} + K^{11}_{phi_0}.C_{phi000};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K^{22}_{u_0}.p^2.U_0 + K^{22}_{u_1}.p^2.U_1 + K^{22}_{u_2}.p^2.U_2 + K^{22}_{u_3}.p^2.U_3 + K^{22}_{phi_0}.p^2.PHI_0 + +K^{21}_{w_0}.p.W_0 + K^{21}_{w_1}.p.W_1 + \\
&+K^{21}_{w_2}.p.W_2 + K^{21}_{phi_0}.p.PHI_0 = K^{22}_{u_0}.(C_{u000}.p + C_{u010}) + K^{22}_{u_1}.(C_{u100}.p + C_{u110}) + K^{22}_{u_2}.(C_{u200}.p + C_{u210}) + \\
&+K^{22}_{u_3}.(C_{u300}.p + C_{u310}) + K^{22}_{phi_0}.(C_{phi000}.p + C_{phi010}) + K^{21}_{w_0}.C_{w000} + K^{21}_{w_1}.C_{w100} + K^{21}_{w_2}.C_{w200} + K^{21}_{phi_0}.C_{phi000};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K^{32}_{u_0}.p^2.U_0 + K^{32}_{u_1}.p^2.U_1 + K^{32}_{u_2}.p^2.U_2 + K^{32}_{u_3}.p^2.U_3 + K^{32}_{phi_0}.p^2.PHI_0 + +K^{31}_{w_0}.p.W_0 + K^{31}_{w_1}.p.W_1 + \\
&+K^{31}_{w_2}.p.W_2 + K^{31}_{phi_0}.p.PHI_0 = K^{32}_{u_0}.(C_{u000}.p + C_{u010}) + K^{32}_{u_1}.(C_{u100}.p + C_{u110}) + K^{32}_{u_2}.(C_{u200}.p + C_{u210}) + \\
&+K^{32}_{u_3}.(C_{u300}.p + C_{u310}) + K^{32}_{phi_0}.(C_{phi000}.p + C_{phi010}) + K^{31}_{w_0}.C_{w000} + K^{31}_{w_1}.C_{w100} + K^{31}_{w_2}.C_{w200} + K^{31}_{phi_0}.C_{phi000};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K^{42}_{u_0}.p^2.U_0 + K^{42}_{u_1}.p^2.U_1 + K^{42}_{u_2}.p^2.U_2 + K^{42}_{u_3}.p^2.U_3 + K^{42}_{phi_0}.p^2.PHI_0 + +K^{41}_{w_0}.p.W_0 + K^{41}_{w_1}.p.W_1 + \\
&+K^{41}_{w_2}.p.W_2 + K^{41}_{phi_0}.p.PHI_0 = K^{42}_{u_0}.(C_{u000}.p + C_{u010}) + K^{42}_{u_1}.(C_{u100}.p + C_{u110}) + K^{42}_{u_2}.(C_{u200}.p + C_{u210}) + \\
&+K^{42}_{u_3}.(C_{u300}.p + C_{u310}) + K^{42}_{phi_0}.(C_{phi000}.p + C_{phi010}) + K^{41}_{w_0}.C_{w000} + K^{41}_{w_1}.C_{w100} + K^{41}_{w_2}.C_{w200} + K^{41}_{phi_0}.C_{phi000};
\end{aligned}$$

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

$$\begin{aligned}
&K_{u_0}^{52}.p^2.U_0+K_{u_1}^{52}.p^2.U_1+K_{u_2}^{52}.p^2.U_2+K_{u_3}^{52}.p^2.U_3+K_{w_0}^{52}.p^2.W_0+K_{w_1}^{52}.p^2.W_1+K_{w_2}^{52}.p^2.W_2\\
&+K_{phi_0}^{52}.p^2.PHI_0+K_{u_0}^{51}.p.U_0+K_{u_1}^{51}.p.U_1+K_{u_2}^{51}.p.U_2+K_{u_3}^{51}.p.U_3+K_{w_0}^{50}.W_0+K_{w_1}^{50}.W_1+\\
&+K_{w_2}^{50}.W_2+\frac{K500}{p}=K_{u_0}^{52}.(C_{u000}.p+C_{u010})+K_{u_1}^{52}.(C_{u100}.p+C_{u110})+K_{u_2}^{52}.(C_{u200}.p+C_{u210})+\\
&+K_{u_3}^{52}.(C_{u300}.p+C_{u310})+K_{w_0}^{52}.(C_{w000}.p+C_{w010})+K_{w_1}^{52}.(C_{w100}.p+C_{w110})+K_{w_2}^{52}.(C_{w200}.p+C_{w210})+\\
&+K_{phi_0}^{52}.(C_{phi000}.p+C_{phi010})+K_{u_0}^{51}.C_{u000}+K_{u_1}^{51}.C_{u100}+K_{u_2}^{51}.C_{u200}+K_{u_3}^{51}.C_{u300};
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&K_{u_0}^{62}.p^2.U_0+K_{u_1}^{62}.p^2.U_1+K_{u_2}^{62}.p^2.U_2+K_{u_3}^{62}.p^2.U_3+K_{w_0}^{62}.p^2.W_0+K_{w_1}^{62}.p^2.W_1+K_{w_2}^{62}.p^2.W_2\\
&+K_{phi_0}^{62}.p^2.PHI_0+K_{u_0}^{61}.p.U_0+K_{u_1}^{61}.p.U_1+K_{u_2}^{61}.p.U_2+K_{u_3}^{61}.p.U_3+K_{w_0}^{60}.W_0+K_{w_1}^{60}.W_1+\\
&+K_{w_2}^{60}.W_2+\frac{K600}{p}=K_{u_0}^{62}.(C_{u000}.p+C_{u010})+K_{u_1}^{62}.(C_{u100}.p+C_{u110})+K_{u_2}^{62}.(C_{u200}.p+C_{u210})+\\
&+K_{u_3}^{62}.(C_{u300}.p+C_{u310})+K_{w_0}^{62}.(C_{w000}.p+C_{w010})+K_{w_1}^{62}.(C_{w100}.p+C_{w110})+K_{w_2}^{62}.(C_{w200}.p+C_{w210})+\\
&+K_{phi_0}^{62}.(C_{phi000}.p+C_{phi010})+K_{u_0}^{61}.C_{u000}+K_{u_1}^{61}.C_{u100}+K_{u_2}^{61}.C_{u200}+K_{u_3}^{61}.C_{u300};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K_{u_0}^{72}.p^2.U_0+K_{u_1}^{72}.p^2.U_1+K_{u_2}^{72}.p^2.U_2+K_{u_3}^{72}.p^2.U_3+K_{w_0}^{72}.p^2.W_0+K_{w_1}^{72}.p^2.W_1+K_{w_2}^{72}.p^2.W_2\\
&+K_{phi_0}^{72}.p^2.PHI_0+K_{u_0}^{71}.p.U_0+K_{u_1}^{71}.p.U_1+K_{u_2}^{71}.p.U_2+K_{u_3}^{71}.p.U_3+K_{w_0}^{70}.W_0+K_{w_1}^{70}.W_1+\\
&+K_{w_2}^{70}.W_2+\frac{K700}{p}=K_{u_0}^{72}.(C_{u000}.p+C_{u010})+K_{u_1}^{72}.(C_{u100}.p+C_{u110})+K_{u_2}^{72}.(C_{u200}.p+C_{u210})+\\
&+K_{u_3}^{72}.(C_{u300}.p+C_{u310})+K_{w_0}^{72}.(C_{w000}.p+C_{w010})+K_{w_1}^{72}.(C_{w100}.p+C_{w110})+K_{w_2}^{72}.(C_{w200}.p+C_{w210})+\\
&+K_{phi_0}^{72}.(C_{phi000}.p+C_{phi010})+K_{u_0}^{71}.C_{u000}+K_{u_1}^{71}.C_{u100}+K_{u_2}^{71}.C_{u200}+K_{u_3}^{71}.C_{u300};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K_{phi_0}^{82}.p^2.PHI_0+K_{u_0}^{81}.p.U_0+K_{u_1}^{81}.p.U_1+K_{u_2}^{81}.p.U_2+K_{u_3}^{81}.p.U_3+K_{w_0}^{80}.W_0+K_{w_1}^{80}.W_1+K_{w_2}^{80}.W_2+\\
&+\frac{K800}{p}=K_{phi_0}^{82}.(C_{phi000}.p+C_{phi010})+K_{u_0}^{81}.C_{u000}+K_{u_1}^{81}.C_{u100}+K_{u_2}^{81}.C_{u200}+K_{u_3}^{81}.C_{u300}.
\end{aligned}$$

Пример расчета. В качестве примера расчета рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка из пьезоматериала *PZT* со следующими параметрами:

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

радиусы обшивки *R= 0,4(м)*; длина оболочки *L=4R*; толщина обшивки *h= R/100*, модуль упругости *E0=1,00281.10*^{11}*(Па)*. Приложим электрический потенциал $\varphi = \pm 1(\text{В})$ на верхнюю и нижнюю поверхности оболочки $z = \pm h$ с шарнирно закрепленными краями на границах *x=0, L*.

Результаты расчета НДС получены с помощью программы ЭВМ и показаны на рисунках 2-5.

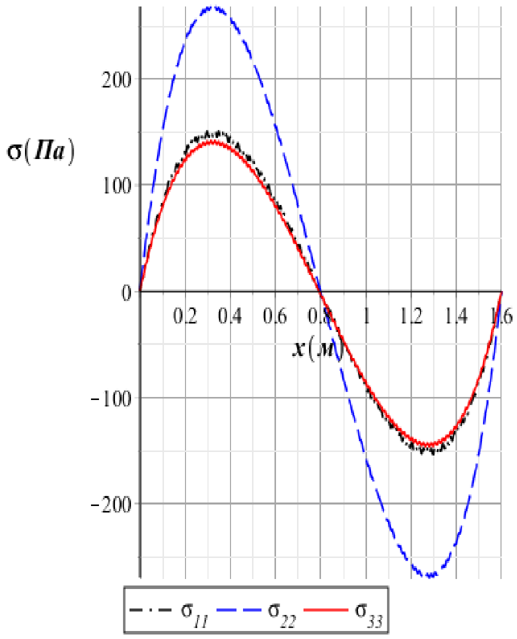

Рис2. Изменение нормальных напряжений по длине оболочки

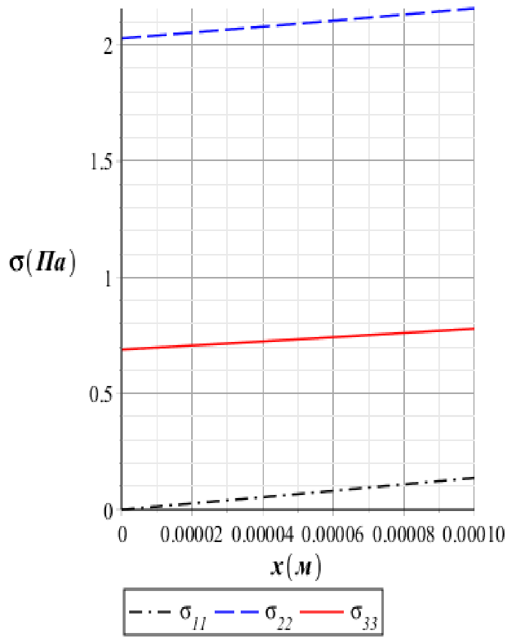

Рис3. Изменение нормальных напряжений вблизи края оболочки

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

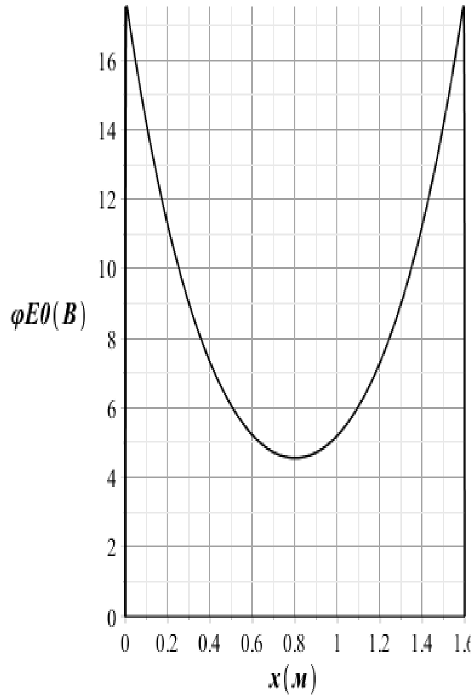

Рис4. Распределение электрического потенциала в оболочке на поверхности z=0

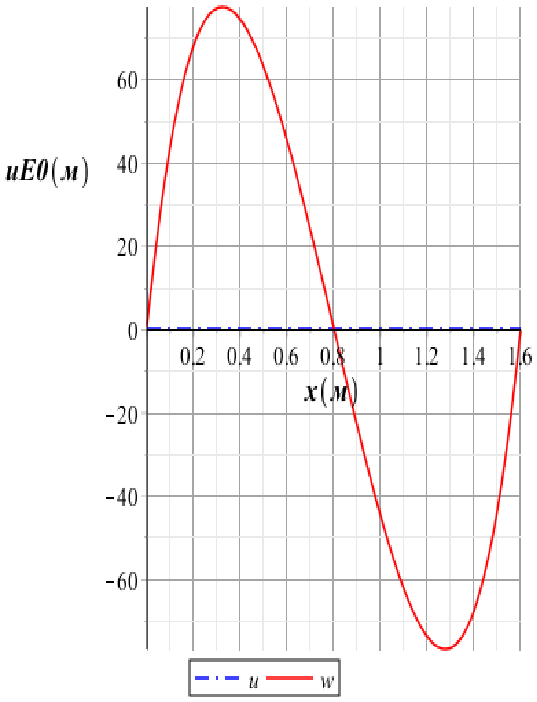

Рис5.Изменение перемещений оболочки на поверхности z=0

Выводы

1.На основе разложения компонентов перемещений в полиномы по толщине на две степени выше по отношению к классической теории построен вариант уточненной теории расчета цилиндрических оболочек из пьезоматериалов. С позиции трехмерной теории упругости с помощью вариационного принципа Лагранжа построены уравнения равновесия и граничные условия.

2. Построен аналитический метод расчета цилиндрических оболочек из пьезоматериалов с помощью операционного метода, основанного на преобразовании Лапласа.

 DOI: 10.34759/trd-2019-109-10

3. На основе результатов расчета цилиндрической пьезооболочки показано, что при отсутствии механических нагрузок, но действии только электрического потенциала на поверхности оболочки, в ней существует напряженно-деформированное состояние.

4. Вблизи шарнирно опертых краев имеют место поперечные нормальные напряжения σ_{33}, которыми в классической теории типа Кирхгофа – Лява пренебрегают, и они составляют 33,95% от максимального значения основного напряжения σ_{22}.

Библиографический список

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. - М.: Наука, 1998. - 470 с.

2. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика управляемых конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2007. - 326 с.

3. Шклярчук Ф.Н., Гришанина Т.В. Динамика управляемых конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 1999. - 54 с.

4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.

5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. - 512 с.

6. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 6. С. 139 - 146.

7. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Избранные труды. - М.: АН СССР, 1962. Т.1. - 528 с.

8. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: Наука, 1970. - 940 с.

9. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Энергетически согласованная теория цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 6. С. 49 - 54. (V.V. Firsanov and Ch.N.Doan. Energy-cousistent theory of cylindrical shells // Journal of machinery, manufacture and reliabitity, 2011, vol. 40, no. 6, pp.543 - 548.)

10. Фирсанов В.В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 35 - 43. (Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2016, vol.45, no. 6, pp.515 - 522).

11. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98866

12. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=104174

13. Наседкин А.В., Шевцова М.С. Моделирование эффективных модулей для различных типов пористых пьезокерамических материалов // Вестник Донского государственного университета. 2013. № 3-4 (72-73). С. 16 – 26.

14. Ляв А. Математическая теория упругости.- М. - Л.: ОНТИ, 1935. - 674 с.

15. Рейсснер Э. Некоторые проблемы теории оболочек. Упругие оболочки - М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 151 с.

16. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода СенВенана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=55762

17. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. № 4. С. 593 - 608.

18. H.S Tzou. Piezoelectric Shells, Distributed Sensing and Control of Continua. ISBN 978-94-010-4784-5, 1993.

19. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, CRC Press, 2004, 831 p.

20. Xiao-Hong Wu, Changqing Chen, Ya-Peng Shen, Xiao-Geng Tian. A high order theory for functionally graded piezoelectric shells // International Journal of Solids and Structures, 2002, no. 39, pp. 5325 - 5344. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00418-3.