УДК 621.391

Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов

В.В. Рыбин

Динамический расчет систем автоматического управления является одним из наиболее сложных этапов их проектирования. Конец прошлого века характеризуется появлением нового спектрального метода расчета нестационарных систем автоматического управления, специально приспособленного для ЦВМ [1-3]. В последнее десятилетие в практике цифровой обработки сигналов нашли широкое применение вейвлет-преобразования [4-7] сходные с обычным преобразованием Фурье, но лучше описывающие локальные свойства функций в спектральной области.

В статье вводятся характеристики спектрального аппарата описания сигналов и систем и выводятся алгоритмы описания и анализа линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов, находящихся под воздействием как детерминированных, так и случайных сигналов.

1. Основные понятия и определения.

Пусть задан ортонормированный вейвлет-базис $\{\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}\}$. Тогда любая функция $x \in L^2(R)$ полностью характеризуется ее вейвлет коэффициентами [4], [5]

$$s_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\varphi_{j,k}(\tau)d\tau, \tag{1}$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\psi_{j,k}(\tau)d\tau \tag{2}$$

и может быть восстановлена по формуле

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_{j_n,k}\varphi_{j_n,k}(\tau) + \sum_{j=j_n}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k}\psi_{j,k}(\tau). \tag{3}$$

Для описания сигналов и систем управления преобразуем заданный вейвлет-базис в интервальный вейвлет-базис, т.е. переобозначим определенным образом базисные функции. Тогда получим:

$$g_{h,m}^{n}(\tau) = \begin{cases} \varphi_{n,m}(\tau) \quad при\ h = 0; \\ \psi_{n+j,k+m}(\tau) \quad при\ h = 2^j + k; \\ k = 0,1,\ldots,2^j - 1; \quad j = 0,1,2,\ldots; \\ m,n \in Z. \end{cases} \tag{4}$$

Для интервального вейвлет-базиса (4) условие ортонормированности

$$\begin{cases} (\varphi_{j,k}\varphi_{j,m}) = \delta_{k,m}, & j,k,m \in Z; \\ (\varphi_{j,k}\psi_{j,m}) = 0, & j,k,m \in Z; \\ (\psi_{j,k},\psi_{l,m}) = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, & j,k,l,m \in Z, \end{cases} \qquad (5)$$

для n-го уровня разрешения можно записать в виде:

$$\left(g_{h,m}^{n}, g_{i,p}^{n}\right) = \delta_{h,i}\delta_{m,p} . \qquad (6)$$

В дальнейшем будем предполагать, что уровень разрешения n задан или равен нулю и индекс n будем опускать. Кроме этого будем считать, что масштабная сетка, определяемая параметром сдвига k, связана с интервалами $[tk,\ t(k+1))$ на нулевом уровне разрешения, а базисные функции (4), параметрически зависящие от t, будем называть нестационарными базисными функциями, как это принято в спектральной теории нестационарных систем управления [1], [2], [3].

Дадим определение кратномасштабной нестационарной спектральной характеристики (КМ НСХ). КМ НСХ в общем случае комплексной функции x по нестационарному интервальному ортонормированному вейвлет-базису $\{g_{h,m}\}$ назовем функцию $X_m(h)$, ординатами которой, при фиксированном масштабирующем параметре m, являются коэффициенты Фурье функции x по указанному выше базису:

$$\underset{g}{S_m}[x] = \underset{g}{X_m}(h,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_m^*(h,t,\theta)x(\theta)d\theta . \qquad (7)$$

Это формула прямого интервального вейвлет-преобразования на n-ом уровне разрешения.

КМ НСХ удобно представлять матрицой-столбцом

$$X = X(t) = \left[\ldots, X_{-1}(t), X_0(t), X_1(t), \ldots\right]^T , \qquad (8)$$

ординатами которого являются матрицы-столбцы

$$X_m = X_m(t) = \left[X_m(0,t), X_m(1,t), X_m(2,t), \ldots, X_m(h,t), \ldots\right]^T . \qquad (9)$$

Характеристику $X_m(t)$ назовем интервальной НСХ n-го уровня разрешения. Следовательно, КМ НСХ представляется бесконечной клеточной матрицей-столбцом коэффициентов Фурье в базисе (4).

Кратномасштабную базисную систему функций (4) на n-ом уровне разрешения можно представить матрицей-строкой

$$G(\tau) = G(\tau,t) = \left[\ldots, G_{-1}(\tau,t), G_0(\tau,t), G_1(\tau,t), \ldots\right],$$

(10)

ординатами которой являются матрицы-строки

$$G_m(\tau) = G_m(\tau,t) = \left[g_{0,m}(\tau,t), g_{1,m}(\tau,t), g_{2,m}(\tau,t),..., g_{h,m}(\tau,t),...\right],$$

(11)

т.е. интервальные базисные системы (ИБС) n-го уровня разрешения.

Теперь формулы прямого и обратного вейвлет-преобразования (1) - (3) можно представить в виде

$$\underset{G}{S}[x] = \underset{G}{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(\tau)x(\tau)d\tau, \tag{12}$$

$$\underset{G_m}{S_m}[x] = \underset{G_m}{X_m} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_m^*(\tau)x(\tau)d\tau, \tag{13}$$

$$S^{-1}[\underset{g}{X}] = G(\tau)\underset{g}{X} = x(\tau) = \sum_m \sum_{h=0}^{\infty} \underset{G_m}{X_m}(h) g_{h,m}(\tau). \tag{14}$$

Аналогично вводится понятие КМ НСХ функций многих переменных. Так для функций двух переменных $x(\Theta,\tau)$ КМ двумерные НСХ (КМ ДНСХ) имеет вид

$$X_{n,m}(h,i) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_h^*(h,t,\Theta) \int_{-\infty}^{+\infty} p_m(i,t,\tau)x(\Theta,\tau)d\tau d\Theta. \tag{15}$$

Эта характеристика представляется бесконечной квадратной клеточной матрицей

$$X = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \cdots & X_{-1,-1} & X_{-1,0} & X_{-1,1} & \cdots \\ \cdots & X_{0,-1} & X_{0,0} & X_{0,1} & \cdots \\ \cdots & X_{1,-1} & X_{1,0} & X_{1,1} & \cdots \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{16}$$

каждая клетка которой есть бесконечная квадратная матрица

$$X_{n,m} = \begin{bmatrix} X_{n,m}(0,0) & X_{n,m}(0,1) & \cdots & X_{n,m}(0,i) & \cdots \\ X_{n,m}(1,0) & X_{n,m}(1,1) & \cdots & X_{n,m}(1,i) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_{n,m}(h,0) & X_{n,m}(h,1) & \cdots & X_{n,m}(h,i) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{17}$$

ординатами которой являются коэффициенты Фурье функции $x(\Theta,\tau)$ в интервальном вейвлет-базисе $\{q_n(h)p_m^*(i)\}$.

Формула обращения для характеристики (15), записанная в матричной форме, имеет вид

$$S^{-1}[\underset{qp^*}{X}] = x(\theta,\tau) = Q(\theta)\cdot \underset{qp^*}{X}\cdot P^T(\tau). \tag{18}$$

Перейдем теперь к определению кратномасштабных нестационарных спектральных плотностей (КМ НСП), которые служат для описания в спектральной области случайного в общем случае нестационарного сигнала и являются аналогами моментных характеристик.

Первой КМ НСП ${}^{1}S_x^n(i)$ случайного в общем случае нестационарного сигнала x назовем КМ НСХ его математического ожидания m_x :

$$ {}^{1}\underset{g}{S_x^n}(i) = \underset{g}{S_n}[m_x]. \qquad (19) $$

Второй КМ НСП или просто КМ НСП $S_x^{n,k}(h,i)$ случайного в общем случае нестационарного сигнала x назовем КМ ДНСХ его корреляционной функции R_{xx} :

$$ \underset{pp^*}{S_x^{m,k}}(h,i) = \underset{pp^*}{S_{m,k}}[R_{xx}]. \qquad (20) $$

Под корреляционной функцией здесь можно понимать как центрированную моментную функцию случайного сигнала, так и начальную моментную функцию случайного сигнала. Далее везде изложение будет вестись применительно к корреляционной функции R_{xx} центрированного случайного сигнала $x_{сл} = x - m_x$.

КМ нестационарной взаимной спектральной плотностью $S_{xg}^{n,k}(h,i)$ случайных сигналов *x, g* назовем КМ ДНСХ взаимной корреляционной функции этих сигналов R_{xg} :

$$ \underset{qp^*}{S_x^{n,k}}(h,i) = \underset{pp^*}{S_{n,k}}[R_{xx}]. \qquad (21) $$

Обратный переход от КМ НСП (19)-(21) к исходным характеристикам случайного сигнала m_x , R_{xx} , R_{xg} осуществляются по формулам обращения (14), (18):

$$ m_x = S^{-1}[{}^{1}\underset{g}{S_x}]; \quad R_{xx} = S^{-1}[\underset{pp^*}{S_x}]; \quad R_{xg} = S^{-1}[\underset{qp^*}{S_{xg}}]. \qquad (22) $$

Дадим теперь определение КМ нестационарных передаточных функций (КМ НПФ) линейных одномерных непрерывных систем.

КМ нормальной НПФ (КМ ННПФ) линейной системы назовем КМ НСХ ее нормальной импульсной реакции:

$$ \underset{q}{N_m}(h,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_m^*(h,\theta) k(\theta,\tau) d\theta . \qquad (23) $$

КМ сопряженной НПФ (КМ СНПФ) линейной системы назовем комплексно-сопряженную КМ НСХ ее сопряженной импульсной реакции:

$$ \underset{p}{H_n}(i,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(i,\tau) k(\theta,\tau) d\theta . \qquad (24) $$

КМ двумерной НПФ (КМ ДНПФ) линейной системы назовем КМ ДНСХ ее импульсной переходной функции:

$$ \underset{qp^*}{W_{n,m}}(h,i) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_m^*(h,\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} k(\theta,\tau) p_n(i,\tau) d\tau d\theta . \qquad (25) $$

Обратный переход от КМ НПФ (23)-(25) к импульсной переходной функции осуществляется по формулам обращения (14), (18):

$$k(\theta,\tau) = Q(\theta)\cdot \underset{qp^*}{W}\cdot P^T(\tau) = Q(\theta)\cdot \underset{q}{N}(\tau) = \underset{p}{H}(\theta)\cdot P^T(\tau)\,, \tag{26}$$

а формулы связи между КМ ДНПФ с ее одномерными передаточными функциями КМ ННПФ и КМ СНПФ можно представить в виде:

$$\underset{qp^*}{W} = (Q^T, \underset{p}{H}) = (\underset{q}{N}, P)\,; \tag{27}$$

$$\underset{q}{N} = \underset{qp^*}{W}\cdot P^T; \quad \underset{p}{H} = Q\cdot \underset{qp^*}{W}\,. \tag{28}$$

Примерами КМ ДНПФ элементарных динамических звеньев являются:

$$\underset{pp^*}{P^{-1}_{m,n}}(h,i) = \int_{-\infty}^{+\infty} p^*_m(h,\theta)\int_{-\infty}^{\theta} k(\theta,\tau)p_n(i,\tau)d\tau d\theta \tag{29}$$

- КМ ДНПФ интегрирующего звена,

$$\underset{pp^*}{A_{m,n}}(h,i) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\theta)p^*_m(h,\theta)p_n(i,\theta)d\theta \tag{30}$$

- КМ ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $a(\theta)$,

$$\underset{pp^*}{\tau^{-\theta_0}_{m,n}}(h,i) = \int_{-\infty}^{+\infty} p^*_m(h,\theta)p_n(i,\theta-\theta_0)d\theta \tag{31}$$

- КМ ДНПФ звена чистого сдвига (при $\theta_0 > 0$ представляет собой звено чистого запаздывания, а при $\theta_0 < 0$ звено чистого упреждения).

2. Основные свойства КМ НСХ и КМ НПФ непрерывных сигналов и систем

Свойство 1. Линейность КМ НСХ. КМ НСХ непрерывных функций, по определению, линейны, т.е.

$$\underset{p_1\cdots p_n}{S}[ax_1 + bx_2] = a\underset{p_1\cdots p_n}{S}[x_1] + b\underset{p_1\cdots p_n}{S}[x_2]\,. \tag{32}$$

Свойство 2. Связь КМ НСХ разных порядков. n – мерная КМ НСХ в общем случае непрерывной функции n аргументов, есть n – кратная повторная КМ НСХ искомой функции, вычисленная в произвольном порядке.

Например, для непрерывной функции двух аргументов $x(\theta,\tau)$ будем иметь

$$\begin{aligned}
&\underset{qp^*}{S}[x(\theta,\tau)] = \underset{q}{S}[\underset{p^*}{S}[x(\theta,\tau)]] = \underset{p^*}{S}[\underset{q}{S}[x(\theta,\tau)]];\\
&\underset{p^*}{S}[x(\theta,\tau)] = \underset{q}{S^{-1}}[\underset{qp^*}{S}[x(\theta,\tau)]]; \quad \underset{q}{S}[x(\theta,\tau)] = \underset{p^*}{S^{-1}}[\underset{qp^*}{S}[x(\theta,\tau)]]
\end{aligned} \tag{33}$$

Это свойство непосредственно следует из определения КМ НСХ.

Свойство 3. Интеграл от произведения функций времени.

Пусть

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*_1(\tau)x_2(\tau)d\tau \tag{34}$$

и заданы КМ НСХ $\underset{g}{X_1}$ и $\underset{g}{X_2}$, тогда

$$J = \underset{g}{X_1^T} \cdot \underset{g}{X_2}. \tag{35}$$

Действительно, подставляя в (34) x_1 и x_1 в виде (14), найдем

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(\tau) x_2(\tau) d\tau = \sum_m \sum_h X_{1m}^*(h) \sum_{m^1} \sum_{h^1} X_{2m^1}(h^1) \int_{-\infty}^{+\infty} g_{h,m}^*(\tau) g_{h^1,m^1}(\tau) d\tau =$$

$$= \sum_m \sum_h \sum_{m^1} \sum_{h^1} X_{1m}^*(h) X_{2m^1}^*(h^1) \delta_{h,h^1} \delta_{m,m^1} = = \sum_m \sum_h X_{1m}^*(h) X_{2m}^*(h) = \sum_m X_{1m}^* X_{2m} = X_1^* \cdot X_2 \cdot$$

<u>Свойство 4.</u> КМ НСХ произведения функций времени.

Подставим в (7) функцию $x(\theta) = x_1(\theta) x_2(\theta)$, тогда получим

$$\underset{g}{X_m} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(\theta) x_2(\theta) g_m^*(h,\theta) d\theta . \tag{36}$$

Подставляя в (7) $x_1(\theta)$ и $x_2(\theta)$, выраженные через обратное преобразование (14), находим

$$\underset{g}{X_m}(h) = \sum_n \sum_h \sum_p \sum_i \underset{g}{X_{1n}}(h) \underset{g}{X_{2p}}(i) \underset{gg^*g^*}{V_{m,n,p}}(h,i,\nu) , \tag{37}$$

где

$$\underset{gg^*g^*}{V_{m,n,p}}(h,i,\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_m^*(h,\theta) g_n(i,\theta) g_p(\nu,\theta) d\theta \tag{38}$$

- трехмерная КМ НСХ (КМ ТНСХ) множительного звена.

В матричной форме соотношение (37) можно записать в виде:

$$X = \overset{X_1}{V} \cdot X_2 = X_1 \otimes X_2, \tag{39}$$

где под знаком $\otimes$ будем понимать произведение одномерных КМ НСХ через КМ ТНСХ множительного звена.

Операции произведения $\otimes$ КМ НСХ в спектральной области присущи те же свойства, что и обычному умножению функций во временной области, т.е. она дистрибутивна, ассоциативна и коммутативна.

<u>Свойство 5.</u> КМ НСХ свертки. В свертку двух функций $x_1(\theta)$ и $x_2(\theta)$, определяемую равенством

$$x(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\theta - \tau) x_2(\tau) d\tau , \tag{40}$$

подставим выражения x_1 и x_2, выраженные через обратное преобразование (14), тогда получим

$$\underset{g}{X_m}(h) = \sum_n \sum_h \sum_p \sum_i \underset{g}{X_{1n}}(h) \underset{g}{X_{2p}}(i) \underset{gg^*g^*}{L_{m,n,p}}(h,i,\nu) , \tag{41}$$

где

$$\underset{gg^*g^*}{L_{m,n,p}}(h,i,\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_m^*(h,\theta)g_n(i,\theta-\tau)g_p(\nu,\theta)d\tau d\theta \qquad (42)$$

- трехмерная КМ НСХ (КМ ТНСХ) оператора свертки.

В матричной форме соотношение (41) можно записать в виде:

$$X = X_1 * X_2, \qquad (43)$$

где под знаком $*$ будем понимать произведение одномерных КМ НСХ через КМ ТНСХ оператора свертки.

Свойство 6. Изменение базисной системы КМ НСХ непрерывного сигнала производится по формуле

$$\underset{q}{X_m}(h) = \sum_n \sum_i \underset{qp^*}{\Delta_{m,n}}(h,i) \underset{p}{X_n}(i), \qquad (44)$$

где $\Delta_{m,n}(h,i)$ - КМ ДНПФ оператора тождественного преобразования, определяемая соотношением

$$\Delta_{m,n}(h,i) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q_m^*(h,\theta)p_n(i,\theta)d\theta\ . \qquad (45)$$

3. Спектральные алгоритмы определения характеристик выходных сигналов и систем при детерминированных и случайных воздействиях

Выведем основные спектральные алгоритмы количественного анализа линейных одномерных непрерывных систем управления при детерминированных и случайных воздействиях. Для этого установим связи вход-выход через КМ ДНПФ. Затем определим связи между КМ ДНПФ звеньев и их соединений. В заключение укажем на общий порядок расчета непрерывных систем при детерминированных и случайных воздействиях.

Спектральные связи вход-выход при детерминированных и случайных воздействиях. Получение этих связей базируется на известной связи вход-выход во временной области

$$x(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(\theta,\tau)g(\tau)d\tau\ , \qquad (46)$$

где $k(\theta,\tau)$ - импульсная переходная функция непрерывной системы, определенная на R. Преобразуем по свойству (35) интеграл из (46) и от полученного результата вычислим КМ НСХ по формуле (7). Тогда получим:

$$X_n(h) = \sum_m \sum_i W_{n,m}(h,i)G_m(i)\,, \qquad (47)$$

где $W_{n,m}(h,i) = \underset{p_n(h,\theta)}{S}\left[\underset{p_m(i,\tau)}{S}\left[k(\theta,\tau)\right]\right]$ - КМ ДНПФ системы управления с ИПФ

$k(\theta,\tau)$, $G_m(i)$ и $X_n(h)$ - КМ НСХ соответственно входного сигнала $g(\tau)$ и выходного $x(\tau)$.

Связь вход-выход (47), с использованием матричного представления характеристик (8), (9), (16), (17), удобно представить в виде

$$X_n = \sum_m W_{n,m} G_m \tag{48}$$

или в обобщенной символической матричной форме

$$X = W \cdot G. \tag{49}$$

Спектральные связи вход-выход при случайных воздействиях найдем следующим образом. Усредняя по множеству реализаций правую и левую части выражения (49) и учитывая свойство первой КМ НСП, описываемое формулой

$$^1S_x = M\left[X\right], \tag{50}$$

где M – символ операции вычисления математического ожидания, получим алгоритм, устанавливающий связь между первой КМ НСХ входного и выходного сигнала через КМ ДНПФ искомой системы:

$$^1S_x = W \cdot {^1S_g}. \tag{51}$$

Вычитая теперь полученную формулу (51) из выражения (49), находим:

$$X_{сл} = W \cdot G_{сл}.$$

Используя последнюю формулу, запишем:

$$X_{сл} \cdot X_{ck}^T = W \cdot G_{сл} \cdot X_{сл}^T \cdot W^T.$$

Усредняя по множеству реализаций правую и левую части полученного выражения и учитывая свойство КМ НСХ, описываемое формулой $S_x = M\left[X_{сл} \cdot X_{сл}^T\right]$, получаем алгоритм, устанавливающий связь между КМ НСП входного и выходного случайных сигналов через КМ ДНПФ искомой системы:

$$S_x = W \cdot S_g \cdot W^T \tag{52}$$

Аналогично, можно показать, что КМ ДНПФ W и КМ НСП S_g позволяют найти взаимную КМ НСП входного и выходного случайных сигналов искомой системы по формуле

$$S_{xg} = W \cdot S_g. \tag{53}$$

Найденные связи (47), (51)-(53) решают задачу определения характеристик выходных сигналов линейных непрерывных систем управления при детерминированных и случайных воздействиях. При этом связи (51) – (53) достаточны только для анализа непрерывных систем в рамках корреляционной теории.

<u>КМ ДНПФ соединений линейных непрерывных звеньев</u>. Выведем формулы, связывающие КМ ДНПФ линейных непрерывных звеньев и их параллельного (Рис.1.а), последовательного (Рис.1.б) соединений и соединения с обратной связью (Рис.1.в).

Используя связи вход-выход (49), составим систему уравнений:

для параллельного соединения

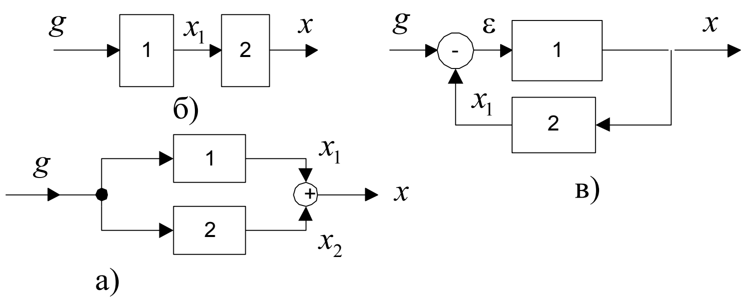

Рис.1. Соединение одномерных звеньев: а- параллельное; б -последовательное; в - с обратной связью

$$X = X_1 + X_2;\ X_1 = W_1 \cdot G;\ X_2 = W_2 \cdot G; \tag{54}$$

для последовательного соединения

$$X = W_2 \cdot X_1;\ X_1 = W_2 \cdot G; \tag{55}$$

для соединения с обратной связью

$$X = W_2 \cdot \varepsilon;\ X_1 = W_2 \cdot X;\ \varepsilon = G - X_1. \tag{56}$$

Решая эти системы уравнений, т.е. исключая из них матрицы-столбцы КМ НСХ промежуточных сигналов, получим:

для параллельного соединения

$$X = (W_1 + W_2)G; \tag{57}$$

для последовательного соединения

$$X = W_2 \cdot W_1 \cdot G; \tag{58}$$

для соединения с обратной связью

$$X = \left[E + W_1 \cdot W_2\right]^{-1} W_1 G = W_1 \left[E + W_2 W_1\right]^{-1} G\ . \tag{59}$$

Анализируя связи вход-выход (2.53) – (2.55), получаем искомые выражения КМ ДНПФ:

для параллельного соединения

$$W = W_1 + W_2; \tag{60}$$

для последовательного соединения

$$W = W_2 \cdot W_1; \tag{61}$$

для соединения с обратной связью

$$\Phi = \left[E + W_1 \cdot W_2\right]^{-1} W_1 = W_1\left[E + W_2 W_1\right]^{-1}. \tag{62}$$

Заметим, выражение для КМ ДНПФ Φ (62) получено в предположении, что существуют обратные двухсторонние матрицы для матриц $E + W_1 \cdot W_2$ и $E + W_2 \cdot W_1$. Это предположение справедливо для инерционных систем.

Однако, в приложениях изучают сигналы и системы управления на конечных интервалах. Для их изучения можно использовать периодизированные вейвлеты и вейвлет-базисы, заданные на отрезке [4].

4. *Сигналы и системы на конечных отрезках, периодизированные сигналы и системы, их вейвлет-характеристики в спектральной области*

Изучение систем управления обычно проводится на конечном интервале времени. Если входные сигналы и сама система заданы на конечном интервале, то для ее анализа можно использовать обычные базисы вейвлетов. Например, доопределим импульсную переходную функцию системы $k(\theta, \tau)$, полагая ее равной нулю вне квадрата $[0, 1]^2$, а сигналы, равными нулю, вне отрезка $[0, 1]$. Тогда, в базисе вейвлетов Добеши порядка *M*, формулы прямого интервального вейвлет преобразования (7) – (8), (15) – (16) на нулевом уровне разрешения примут вид:

$$\underset{d}{X}_m(h) = \int_0^1 d_m(h,\theta)x(\theta)d\theta, \quad m = 2-2M, 3-2M, \ldots, -1, 0; \tag{63}$$

$$X = \left[X_{2-2M}, X_{3-2M}, \ldots, X_{-1}, X_0\right]; \tag{64}$$

$$X_{n,m}(h,i) = \int_0^1 d_n(h,\theta)\int_0^1 d_m(h,\theta)x(\theta)d\tau d\theta,$$
$$n, m = 2-2M, 3-2M, \ldots, -2, -1, 0;$$

(65)

$$X = \begin{bmatrix} X_{2-2M,2-2M} & \cdots & X_{2-2M,-1} & X_{2-2M,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_{-1,2-2M} & \cdots & X_{-1,-1} & X_{-1,0} \\ X_{0,2-2M} & \cdots & X_{0,-1} & X_{0,0} \end{bmatrix}, \tag{66}$$

где матрицы (64) и (66) конечны.

Для вычисления этих характеристик используется интервальный вейвлет-базис (4) при условии, что n=0, m=2-2M,…,-1,0, т.е. матрица-строка базисной системы (10) становится конечной, а именно

$$G(\tau) = \left[G_{2-2M}(\tau), G_{3-2M}(\tau), ..., G_{-1}(\tau), G_0(\tau)\right].$$

(67)

Следовательно, такой подход позволяет представить все характеристики сигналов и систем (КМ НСХ, КМ ДНСХ, КМ НСП, КМ ДНПФ) конечными клеточными матрицами. При этом алгоритмы определения характеристик выходных сигналов и систем при детерминированных и случайных воздействиях (49), (52), (53), (60) –(62) не изменяются. Сохраняется и общий вид формул обращения (14) и (18). Однако КМ НСХ и КМ НСП выходных сигналов и систем управления несут информацию о тех ограничениях, которые были наложены на входные сигналы и систему управления. Поэтому, при их обращении, получим искусственные "скачки" на краях области задания.

Другой подход к описанию и анализу сигналов и систем управления в вейвлет-базисах связан с заменой сигналов и систем, заданных на R, периодизированными сигналами и системами.

Пусть, например, на отрезке [0, 1] задан входной сигнал своей непрерывной функцией $x(\theta)$, а система ИПФ $k(\theta,\tau)$. Тогда периодизированная функция $x^n(\theta)$, заданная на R, имеет вид

$$x^n(\theta) = x(\theta - \lfloor \theta \rfloor) = -\sum_n x(\theta - n)\Delta_n 1(\theta - n), \qquad (68)$$

а периодизированная ИПФ $k^n(\theta,\tau)$, заданная на R^2, может быть записана в форме

$$k^n(\theta,\tau) = -\sum_n k(\theta - n, \tau - n)\Delta_n 1(\theta - n)\Delta_n 1(\tau - n). \qquad (69)$$

Заметим, что если входной сигнал $x(\theta)$ случайная функция, для которой заданы математическое ожидание $m_x(\theta)$ и корреляционная функция $R_{xx}(\theta,\tau)$, то их периодизированные аналоги можно соответственно задать формулами, аналогичными формулам (68), (69). Тогда, например, в базисе вейвлетов Добеши порядка M, формулы прямого интервального вейвлет-преобразования (7) и (15) на нулевом уровне разрешения примут вид:

$$X_m(h) = \int_m^{2M-m-1} d_m(h,\theta) x^n(\theta) d\theta, \qquad (70)$$

$$X_{n,m}(h,i) = \int\limits_{n}^{2M-n-1} d_n(h,\theta) \int\limits_{m}^{2M-m-1} d_m(i,\theta) x^n(\theta,\tau) d\tau d\theta .$$

(71)

Теперь, учитывая свойства периодизированных функций и базисных функций, находим

$$X_m(h) = X_0(h), \quad m \in Z; \tag{72}$$

$$X_{n,n+j} = \begin{cases} X_{0,j}, & j = 2-2M,\dots,-1,0,1,\dots,2M-2; \\ 0, & j < 2-2M \ \text{и} \ j > 2M-2; \\ & n, j \in Z. \end{cases} \tag{73}$$

Например, в базисе Добеши порядка 2 КМ ДНСХ (16) представляется матрицей

$$X = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & 0 & X_{0,-2} & X_{0,-1} & X_{0,0} & X_{0,1} & X_{0,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & X_{0,-2} & X_{0,-1} & X_{0,0} & X_{0,1} & X_{0,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & X_{0,-2} & X_{0,-1} & X_{0,0} & X_{0,1} & X_{0,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{0,-2} & X_{0,-1} & X_{0,0} & X_{0,1} & X_{0,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_{0,-2} & X_{0,-1} & X_{0,0} & X_{0,1} & X_{0,2} & 0 & 0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь спектральные связи вход-выход при детерминированных и случайных воздействиях. Связи вход-выход (49), с учетом формул (72), (73), можно записать в форме

$$X_0 = W_0 \cdot G_0 , \tag{74}$$

где $G_0, X_0\, (G_n = G_0, X_n = X_0, n \in Z)$ - нулевые ординаты КМ НСХ или интервальные НСХ,

$$W_0 = \sum_{m=2-2M}^{2M-2} W_{0,m} \tag{75}$$

- интервальная ДНПФ $(W_n = W_0)$ системы управления. Тогда связи вход-выход при случайных воздействиях (51) и (52) можно записать в виде:

$${}^1S_{x0} = W_0 \cdot {}^1S_{g0} , \tag{76}$$

$$S_{x0} = W_0 \cdot S_{g0} \cdot W_0^T . \tag{77}$$

Аналогично выводятся формулы, связывающие интервальные ДНПФ линейных непрерывных периодизированных звеньев и их параллельного (Рис.1. а), последовательного (Рис.1. б) соединения и соединения с обратной связью (Рис.1. в). Из системы уравнений (54) – (56) имеем:

для параллельного соединения

$$X_0 = X_{10} + X_{20};\ X_{10} = W_{10} \cdot G_0;\ X_{20} = W_{20} \cdot G_0; \tag{78}$$

для последовательного соединения

$$X_0 = W_{20} \cdot X_{10};\ X_{10} = W_{20} \cdot G_0; \tag{79}$$

для соединения с обратной связью

$$X_0 = W_{20} \cdot \varepsilon_0 ;\ X_{10} = W_{20} \cdot X_0 ;\ \varepsilon_0 = G_0 - X_{10} . \tag{80}$$

Решая эти системы уравнений, т.е. исключая из них матрицы-столбцы интервальных НСХ промежуточных сигналов, получим:

для параллельного соединения

$$X_0 = (W_{10} + W_{20}) G_0 ; \tag{81}$$

для последовательного соединения

$$X_0 = \left(W_{20} \cdot W_{10}\right) \cdot G_0 ; \tag{82}$$

для соединения с обратной связью

$$X_0 = \left[E + W_{10} \cdot W_{20}\right]^{-1} W_{10} G_0 = W_{10} \left[E + W_{20} W_{01}\right]^{-1} G_0 . \tag{83}$$

Анализируя связи вход-выход (81) – (83), получаем искомые выражения интервальных ДНПФ:

для параллельного соединения

$$W_0 = W_{10} + W_{20} ; \tag{84}$$

для последовательного соединения

$$W_0 = W_{20} \cdot W_{10} ; \tag{85}$$

для соединения с обратной связью

$$\Phi_0 = \left[E + W_{10} \cdot W_{20}\right]^{-1} W_{10} = W_{10} \left[E + W_{20} W_{10}\right]^{-1} . \tag{86}$$

Найденные связи вход-выход (74) – (77), (84) – (86) для периодизированных сигналов и систем, использующие интервальные НСХ и ДНПФ, по форме совпадают со связями вход-выход (49), (51), (52), (60) – (62) для непериодизированных сигналов и систем, использующих КМ НСХ и КМ ДНПФ.

Заметим, что интервальные НСХ и ДНПФ вычисляются с использованием кратномасштабного анализа с непериодическими масштабирующей функцией φ и вейвлетом ψ, но можно использовать для описания сигналов и систем периодизированные вейвлеты [4]

$$\left\{ \varphi^n_{j,k} = \sum_{l \in Z} \varphi_{j,k}(\tau + l); \quad k = 0,1,\ldots,2^j - 1 \right\}, \tag{87}$$

$$\left\{ \psi^n_{j,k} = \sum_{l \in Z} \psi_{j,k}(\tau + l); \quad k = 0,1,\ldots,2^j - 1 \right\}, \tag{88}$$

для конечного интервала времени в форме

$$g_h(\tau) = \begin{cases} \varphi^n_{0,0}(\tau) = 1 \ \text{при}\ h = 0; \\ g_{2^n}\left(\tau - \dfrac{k}{2^n}\right) = \psi^n_{n,k}(\tau) \ \text{при}\ h = 2^n + k, \\ n = 0,1,2,\ldots;\ k = 0,1,2,\ldots,2^n - 1. \end{cases} \tag{89}$$

5. *Описание и методика анализа линейных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов, ортогональных на конечных интервалах.*

Рассмотренные методы описания линейных систем управления, которые были обсуждены прежде, используют базисы вейвлетов для $L^2(R)$. В настоящее время для анализа систем управления используется спектральный метод анализа нестационарных систем на конечных интервалах времени [1] -[3]. Этот метод использует различные базисные системы функций, которые заданы на нестационарном отрезке $[0,t]$. К ним относятся: комплексные экспоненциальные функции, полиномы Лежандра, полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода, функции Уолша и Хаара. Базис Хаара это базис вейвлетов, заданный на интервале $[0,t]$. Полезными были бы другие вейвлеты, заданные на конечных интервалах. К ним относятся периодизированные вейвлеты (89), а также вейвлеты предложенные Мейером [8], [5], которые конструируются из ортонормированных базисов вейвлетов с компактными носителями заданными на R. Преимущества вейвлетов Мейера перед периодизированными вейвлетами Добеши заключаются в том, что они не вызывают краевые эффекты на границах интервала, однако применение периодизированных вейвлетов к инверсно-периодизированным функциям и системам приводит к уничтожению разрывности, которая возникает после периодизации.

Ортонормированные базисы вейвлетов, заданные на конечных интервалах расширяют возможности спектрального метода анализа нестационарных систем управления, не меняя спектральных алгоритмов описания и анализа систем управления. Рассмотрим эти алгоритмы.

<u>Основные характеристики спектрального метода</u>. В основе спектрального метода лежит понятие нестационарной спектральной характеристики (НСХ), которое порождает весь спектр характеристик используемых для описания сигналов и систем. Это следующие характеристики:

$$\underset{p}{S}[x(\Theta)] = \underset{p}{X}(i,t) = \int_0^t p^*(i,t,\Theta)x(\Theta)d\Theta \qquad (90)$$

- НСХ для функции одной переменной $x(\Theta)$;

$$\underset{pp^*}{S}[x(\Theta,\tau)] = \underset{pp^*}{X}(h,i,t,t) = \int_0^t p^*(h,t,\Theta)\int_0^t p(i,t,\tau)x(\Theta,\tau)d\tau d\Theta$$

(91)

- ДНСХ функции двух переменных $x(\Theta,\tau)$;

$${}^1S_x(i,t) = \int_0^t p^*(i,t,\Theta)m_x(\Theta)d\Theta \qquad (92)$$

- НСХ математического ожидания m_x случайной функции одной переменной x;

$$\underset{pp^*}{S_x}(h,i,t,t) = \int_0^t p^*(h,t,\Theta)\int_0^t p(i,t,\tau)R_{xx}(\Theta,\tau)d\tau d\Theta$$

(93)

- НСП корреляционной функции $R_{xx}(\theta,\tau)$ случайного в общем случае нестационарного сигнала x;

$$\underset{pp^*}{S_{xg}}(h,i,t,t)=\int_0^t p^*(h,t,\Theta)\int_0^t p(i,t,\tau)R_{xg}(\Theta,\tau)d\tau d\Theta$$

(94)

- НСП взаимной корреляционной функции $R_{xg}(\theta,\tau)$ случайных нестационарного сигнала x и g;

$$\underset{p}{N}(h,t,\tau)=\int_0^t p^*(h,\Theta)k(\Theta,\tau)d\Theta \quad (95)$$

- ННПФ линейной непрерывной нестационарной системы;

$$\underset{p}{H}(i,t,\Theta)=\int_0^e p(i,t,\tau)k(\Theta,\tau)d\Theta \quad (96)$$

- СНПФ линейной непрерывной нестационарной системы;

$$\underset{pp^*}{W}(h,i,t,t)=\int_0^t p^*(h,t,\Theta)\int_0^t k(\Theta,\tau)p(i,t,\tau)d\tau d\Theta$$

(97)

- ДНПФ линейной непрерывной нестационарной системы.

Формулы обращения этих характеристик имеют вид

$$S^{-1}[\underset{p}{X}(i)]=x=(p^*(i),\underset{p}{X}(i)); \quad (98)$$

$$S^{-1}[\underset{pp^*}{X}(h,i)]=x=(p^*(h)p(i),\underset{pp^*}{X}(h,i)); \quad (99)$$

$$m_x=S^{-1}[\underset{p}{S_x}(i)];\ \mathrm{R}_{xx}=S^{-1}[\underset{pp^*}{S_x}(h,i)];\quad \mathrm{R}_{xg}=S^{-1}[\underset{pp^*}{S_{xg}}(h,i)]; \quad (100)$$

$$k=P\cdot\underset{p}{N}=\underset{p}{H}\cdot P^T=P\cdot\underset{pp^*}{W}\cdot P^T, \quad (101)$$

где P - матрица-строка, составленная из системы базисных функций $\{p(i)\}$.

<u>Спектральные алгоритмы элементарных и типовых звеньев</u>. Элементарными называют динамические звенья, которые не могут быть представлены в виде комбинации конечного числа более простых звеньев. К элементарным звеньям непрерывной системы относятся звенья, приведенные в таблице 1. ДНПФ звена получена путем подстановки ИПФ искомого звена в формулу (97), ННПФ и СНПФ в таблице не приводятся, так как в практическом анализе они обычно находятся по ДНПФ с использованием формул связи (28). Заметим, что для дифференцирующего звена заданы две ДНПФ (103) и (104). ДНПФ (104) дифференцирующего звена, задается во временной области дифференциальным уравнением при нулевых начальных условиях, а ДНПФ (103) дифференцирующего звена, задается во временной области дифференциальным уравнением при ненулевых начальных условиях. ДНПФ (103) и (104), как видно из таблицы1, связаны между собой матрицей начальных условий

$$\nu(h,i,t,t) = p^*(h,t,0)\,p(i,t,0)\ . \tag{108}$$

Таблица 1.

Звено	**Дифференциальное уравнение**	**ИПФ**
1	2	3
Интегрирующее	$\frac{dx(\theta)}{d\theta} = g(\theta), \quad x(0) = 0$	$k(\theta,\tau) = 1(\theta - \tau)$
Дифференцирующее первого рода	$x(\theta) = \frac{dg(\theta)}{d\theta}, \begin{cases} g(-0) = 0, \\ g(+0) \neq 0 \end{cases}$	$k(\theta,\tau) = \frac{d}{d\theta}\delta(\theta - \tau)$
Дифференцирующее второго рода	$x(\theta) = \frac{dg(\theta)}{d\theta}, g(-0) = g(+0)$	$k(\theta,\tau) = 1(\theta)\frac{d}{d\theta}\delta(\theta - \tau)$
Усилительное	$x(\theta) = a(\theta)g(\theta)$	$k(\theta,\tau) = a(\theta)\delta(\theta - \tau)$
Чистого запаздывания	$x(\theta) = g(\theta - \theta_0), \quad \theta_0 > 0$	$k(\theta,\tau) = \delta(\theta - \tau - \theta_0)$
Чистого упреждения	$x(\theta) = g(\theta - \theta_0), \quad \theta_0 < 0$	$k(\theta,\tau) = \delta(\theta - \tau - \theta_0)$

Продолжение таблицы 1.

Звено	**ДНПФ**	**Номер формулы**
1	4	5
Интегрирующее	$\underset{pp^*}{P^{-1}}(h,i,t,t) = \int_0^t p^*(h,t,\theta)\int_0^\theta p(i,t,\tau)d\tau d\theta$	(102)
Дифференцирующее первого рода	$\underset{pp^*}{\Im}(h,i,t,t) = \int_0^t p^*(h,t,\theta)\frac{d}{d\theta}p(i,t,\theta)d\theta$	(103)
Дифференцирующее второго рода	$\underset{pp^*}{P}(h,i,t,t) = \underset{pp^*}{\nu}(h,i,t,t) + \underset{pp^*}{\Im}(h,i,t,t),$ *где* $\underset{pp^*}{\nu}(h,i,t,t) = p^*(h,t,0)p(i,t,0)$	(104)
Усилительное	$\underset{pp^*}{A}(h,i,t,t) = \int_0^t a(\theta)p^*(h,t,\theta)p(i,t,\theta)d\theta$	(105)
Чистого запаздывания	$\underset{pp^*}{\tau^{-\theta_0}}(h,i,t,t) = \int_{\theta_0}^t p^*(h,t,\theta)p(i,t,\theta - \theta_0)d\theta$	(106)
Чистого упреждения	$\underset{pp^*}{\tau^{-\theta_0}}(h,i,t,t) = \int_0^{t+\theta_0} p^*(h,t,\theta)p(i,t,\theta - \theta_0)d\theta$	(107)

Отметим некоторые свойства матриц ДНПФ:

Свойство 1. Матрица $P(t,t)$ является двусторонней обратной для $P^{-1}(t,t)$, т.е.

$$P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = E\ . \tag{109}$$

Свойство 2. Матрица $\Im(t,t)$ является двусторонней обратной для $P^{-1}(t,t)$, а матрица $P^{-1}(t,t)$ правосторонней, обратной для $\Im(t,t)$, т.е.

$$\Im \cdot P^{-1} = E \quad (P^{-1} \cdot \Im \neq E) \ . \tag{110}$$

Свойство 3. Матрица $\nu(t,t)$ является левосторонним нуль-делителем матрицы $P^{-1}(t,t)$, а матрица $P^{-1}(t,t)$ правосторонним нуль-делителем для $\nu(t,t)$, т.е.

$$\nu \cdot P^{-1} = \Theta \quad (P^{-1} \cdot \nu \neq \Theta) \ . \tag{111}$$

Среди типовых звеньев отметим только дифференцирующее и интегрирующее звено *n*-го порядка, представляющее собой последовательное соединение *n* дифференцирующих или *n* интегрирующих звеньев.

Некоторые свойства непрерывных сигналов и систем. Заметим, что свойства КМ НСХ и КМ НПФ (32), (33), (35), (39), (43), (45) справедливы и для интервальных НСХ и НПФ. Поэтому рассмотрим только те свойства, которые связаны с конечными интервалами.

Свойство 1. НСХ производной функции времени. Пусть задана НСХ $(\nu - 1)$-й производной $S\left[\frac{d^{\nu-1}}{d\theta^{\nu-1}} x(\theta)\right]$ непрерывной функции $x(\theta)$ при ненулевых начальных условиях $\left(x_0^{\nu} = \frac{d^{\nu}}{d\theta^{\nu}} x(\theta)\Big|_{\theta=-0} ; \quad \nu = 0,1,...,n-1 \right)$ по системе функций $\{p(h,t,\theta)\}$, тогда НСХ ν-й производной связана с НСХ $(\nu - 1)$-й производной соотношением

$$\underset{p(y,t,\theta)}{S}\left[\frac{d^{\nu}}{d\Theta^{\nu}} x(\Theta)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \underset{pp^*}{P}(h,i,t,t) \underset{p(y,t,\theta)}{S}\left[\frac{d^{\nu-1}}{d\Theta^{-1\nu}} x(\Theta)\right] - x_0^{\nu-1} \cdot \underset{p}{\Delta}(h,t),$$

(112)

где столбец $\Delta(t) = [p^*(h,t,0)]$.

Следствие. Полагая ν =1,2,…,n в выражении (112) и подставляя друг в друга полученные равенства, находим выражение для вычисления НСХ n-ой производной искомой функции $x(\Theta)$, которое в матричной форме записи имеет вид

$$S\left[\frac{d^n}{d\theta^n} x(\theta)\right] = P^n(t,t)X(t) - x(0)P^{n-1}(t,t)\Delta(t) -$$
$$- x^{(1)}(0)P^{n-2}(t,t)\Delta(t) - \ldots - x^{(n-1)}(0)\Delta(t).$$

(113)

Свойство 2. НСХ интеграла функции времени. Пусть задана НСХ $(\nu - 1)$-го кратного интеграла

$$\underset{p(h,t,\theta_{\nu-1})}{S}\left[\int_0^{\theta_{\nu-1}} d\theta_{\nu-1}\ldots\int_0^{\theta_1} x(\tau)d\tau\right] = \underset{p}{X}_{\nu-1}(h,t)$$

(114)

от непрерывной функции $x(\theta)$ по системе функций $\{p(h,t,\theta_{\nu-1})\}$. Тогда НСХ ν -го повторного интеграла связана с НСХ $(\nu-1)$-го повторного интеграла соотношением

$$\underset{p}{X}_{\nu}(h,t) = \underset{p(h,t,\theta_\nu)}{S}\left[\int_0^{\theta_\nu} d\theta_{\nu-1}\ldots\int_0^{\theta_1} x(\tau)d\tau\right] = \sum_i \underset{pp^*}{P}^{-1}(h,i,t,t)\,\underset{p}{X}_{\nu-1}(i,t).$$

(115)

<u>Свойство 3. НСХ функции времени со смещенным аргументом</u>. Пусть задана НСХ $S\left[\tau^{-\theta_0}x(\theta)\right]$ от непрерывной функции $x(\theta)$ по системе функций $\{p(h,t,\Theta)\}$. Тогда НСХ смещенной функции времени $x(\theta-\theta_0)=\tau^{-\theta_0}x(\theta)$, связана с НСХ функции $x(\theta)$, соотношением

$$\underset{p}{S}\left[\tau^{-\theta_0}x(\theta)\right] = \sum_i \underset{pp^*}{\tau}^{-\theta_0}(h,i,t,t)\,\underset{p}{X}\ (i,t) \qquad (116)$$

где

$$\underset{pp^*}{\tau}^{-\theta_0}(h,i,t,t) = \underset{p}{S}\left[\underset{p^*}{\Delta}(i,t,\theta-\theta_0)\right], \qquad (117)$$

$$\underset{p}{\Delta}(i,t,\theta-\theta_0) = \underset{p(i,t,\tau)}{S}\left[\delta(\theta-\tau-\theta_0)\right] = \int_0^t p^*(i,t,\tau)\delta(\theta-\tau-\theta_0)d\tau\ . \qquad (118)$$

Матричная форма записи выражения (116) имеет вид

$$\left[\underset{p}{S}[\tau^{-\theta_0}x(\theta)]\right] = \underset{pp^*}{\tau}^{-\theta_0}(t,t)\,\underset{p}{X}(t). \qquad (119)$$

<u>Свойство 4. Инверсия функции времени</u>. Пусть задана НСХ функции $S\left[x(\theta)\right]=X(i,t)$.Тогда НСХ инверсной функции $x(t-\theta)$ связана с НСХ функции времени $x(\theta)$ соотношением

$$\underset{p(h,t,\theta)}{S}\left[x(t-\theta)\right] = \sum_i \underset{pp^*}{Q}^{-\theta_0}(h,i,t,t)\ \underset{p(i,t,\theta)}{S}[x(\theta)], \qquad (120)$$

где

$$\underset{pp^*}{Q}(h,i,t,t) = \int_0^t p^*(i,t,\theta)p(i,t,t-\theta)d\theta \qquad (121)$$

- матрица инверсии.

Матричная форма записи выражения (120) имеет вид

$$\left[\underset{p}{S}[x(t-\theta)]\right] = \underset{pp^*}{Q}(t,t)\,\underset{p}{X}(t). \qquad (122)$$

<u>Свойство 5. НСХ свертки</u>. В свертку двух непрерывных функций $x_1(\theta)$ и $x_2(\theta)$, определяемую равенством (40) подставим выражения x_1 и x_2 в виде обратного преобразования (98). Вычисляя НСХ от левой и правой частей полученного выражения, находим:

$$\underset{p}{X}(h,t)=\sum_{i}\sum_{\nu}X_1(i,t)X_2(\nu,t)\underset{pp^*p^*}{L}(h,i,\nu)\,, \tag{123}$$

где

$$\underset{pp^*p^*}{L}(h,i,\nu,t)=\int_0^t\int_0^\theta p^*(h,t,\theta)p(i,t,\theta-\tau)p(\nu,t,\tau)d\tau\,d\theta$$

(124)

есть трехмерна НСХ оператора свертки.

В матричной форме соотношение (123) можно записать в символьном виде:

$$\underset{p}{X}(t)=\underset{p}{X_1}(t)*\underset{p}{X_2}(t)\,, \tag{125}$$

где под знаком $*$ будем понимать свертку одномерных НСХ через трехмерную НСХ оператора свертки (124).

Свойство 6. Связь ДНПФ стационарной системы с соответствующей ей одномерной НСХ. Для стационарной системы можно определить еще одну характеристику $W(\nu,t)$, которая вводится как НСХ ИПФ, рассматриваемой как функция разности аргументов $\theta-\tau=\eta$:

$$W(\nu,t)=\int_0^e k(\eta)p^*(\nu,t,\eta)d\eta\,. \tag{126}$$

Запишем ДНПФ стационарной системы в виде

$$\underset{pp^*}{W}(h,i,t,t)=\int_0^t\int_0^t k(\theta-\tau)p^*(h,t,\theta)p(i,t,\tau)d\tau\,d\theta$$

(127)

По свойству 6 это выражение можно представить в виде

$$\underset{pp^*}{W}(h,i,t,t)=\sum_{\nu}\int_0^t p^*(h,t,\theta)\underset{p(\nu,t,\eta)}{S}[k(\eta)]\int_0^t p^*(i,t,\theta-\tau)p(\nu,t,\tau)d\tau\,d\theta\,.$$

(128)

Используя определения (126) и (123), выражение (128) запишем в виде

$$\underset{pp^*}{W}(h,i,t,t)=\sum_{\nu}\underset{pp^*p^*}{L}(h,i,\nu,t)\underset{p}{W}(\nu,t)\,.$$

(129)

Эта связь позволяет найти ДНПФ стационарной системы по ее одномерной НСХ (126).

Обратную зависимость найдем, если в (129) положить i=0 и учесть, что при

$p(0,t,\theta)=1/\sqrt{t}$

$$\underset{pp^*p^*}{L}(h,i,t,t)=\sqrt{\frac{1}{t}}\underset{pp^*}{P^{-1}}(h,\nu,t,t)\,.$$

(130)

Тогда получим

$$\underset{pp^*}{W}(h,0,t,t)=\sqrt{\frac{1}{t}}\sum_{\nu}\underset{pp^*}{P}^{-1}(h,i,t,t)\underset{p}{W}(\nu,t),$$

(131)

откуда следует искомая связь

$$\underset{p}{W}(\nu,t)=\sqrt{t}\sum_{h}\underset{pp^*}{P}(\nu,h,t,t)\underset{pp^*}{W}(h,0,t,t).$$

(132)

Свойство 7. Матрицы ДНПФ стационарной системы перестановочны:

$$W_1\cdot W_2=W_2\cdot W_1. \qquad (133)$$

Свойство 8. Матрицы ДНПФ усилительных звеньев с произвольными коэффициентами передачи перестановочны.

Спектральные связи вход-выход при детерминированных и случайных воздействиях и нулевых начальных условиях на конечных интервалах времени полностью совпадают по форме с аналогичными характеристиками (49), (51). (52),(53) определенными на R при условии, что вместо КМ НСП надо использовать понятие интервальных НСХ или просто НСХ.

Формулы связи ДНПФ линейных непрерывных звеньев, заданных на конечных интервалах времени, и их параллельного (Рис.1. а), последовательного (Рис.1. б) соединений и соединения с обратной связью (Рис.1. в), описываются формулами связи для ДНПФ (60), (61), (62) или периодизированных систем (84), (85), (86).

Спектральные связи вход-выход при детерминированных воздействиях и ненулевых начальных условиях. Найдем выражения НСХ выходного сигнала линейной непрерывной системы, находящейся под воздействием детерминированного сигнала и ненулевых начальных условий.

Пусть система описывается дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами

$$D(p,\theta)x(\theta)=M(p,\theta)g(\theta), \qquad (134)$$

где

$$D(p,\theta)=a_n(\theta)p^n+a_{n-1}(\theta)p^{n-1}+\ldots+a_0(\theta);$$
$$M(p,\theta)=b_n(\theta)p^n+b_{n-1}(\theta)p^{n-1}+\ldots+b_0(\theta),$$

а ее входной и выходной сигналы имеют ненулевые начальные условия

$$x^{(n-j)}(\theta)\big|_{\theta=0}=x_0^{(n-j)};\quad g^{(m-k)}(\theta)\big|_{\theta=0}=g_0^{(m-k)}\quad (j=1.,2,\ldots,n;\,k=1,2,..,m).$$

(135)

Известно, что решение задачи Коши (134), (135) эквивалентно решению интегрального уравнения

$$a_n(\theta)\varphi(\theta)=\int_0^{\theta}k(\theta,\tau)\varphi(\tau)d\tau+u(\theta), \qquad (136)$$

где

$$\varphi(\theta) = \frac{d^n x(\theta)}{d\theta^n}\left(\int_0^\theta \varphi(\tau)d\tau + x_0^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}x(\theta)}{d\theta^{n-1}} \text{ и т.д.}\right); \quad (137)$$

$$\psi(\theta) = \frac{d^m g(\theta)}{d\theta^m}\left(\int_0^\theta \psi(\tau)d\tau + g_0^{(m-1)} = \frac{d^{m-1}g(\theta)}{d\theta^{m-1}} \text{ и т.д.}\right); \quad (138)$$

$$x(\theta) = \int_0^\theta \frac{(\theta-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{n}\frac{\theta^{n-j}}{(n-j)!}x_0^{(n-j)}; \quad (139)$$

$$k(\theta,\tau) = -\sum_{k=1}^{n} a_{n-k}(\theta)\frac{(\theta-\tau)^{k-1}}{(n-1)!}; \quad (140)$$

$$u(\theta) = y(\theta) - y_0(\theta); \quad (141)$$

$$y(\theta) = b_m(\theta)\psi(\theta) + \sum_{k=1}^{m} b_{m-k}(\theta)\int_0^\theta \frac{(\theta-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\psi(\tau)d\tau; \quad (142)$$

$$y_0(\theta) = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}(\theta)\sum_{j=1}^{k}\frac{\theta^{k-j}}{(k-j)!}x_0^{(n-j)} + \sum_{k=1}^{m} b_{m-k}(\theta)\sum_{j=1}^{k}\frac{\theta^{k-j}}{(k-j)!}g_0^{(m-j)}.$$

(143)

Из выражений (136) – (143) видно, что если решение уравнения Вольтера второго рода (136) $\varphi(\theta)$ найдено, то искомое решение задачи Коши (134), (135) найдем квадратурой из (139).

Найдем теперь НСХ выходного сигнала линейной непрерывной системы, задаваемой дифференциальным уравнением (134) и начальными условиями (135) или интегральным уравнением (136) и уравнением связи (138). Предварительно заметим, что ядро интегрального оператора в (139) $(\theta-\tau)^{m-1}/(n-1)!$ есть ИПФ интегрирующего звена *n*-го порядка. Вычисляя теперь НСХ от правой и левой частей выражений (136) – (143) относительно $\{p(h,t,\theta)\}$ и используя свойства НСХ (32), (33), (35) и (39), находим:

$$\underset{p}{X}(t) = \underset{pp^*}{P}^{-1}(t,t)\,\underset{p}{F}(t) + \sum_{j=1}^{n} x_0^{(n-j)}\,\underset{p}{S}\left[\frac{\theta^{n-j}}{(n-j)!}\right]; \quad (144)$$

$$\begin{aligned}\underset{p}{A_n}(t)\otimes\underset{p}{F}(t) = &-\left[\sum_{k=1}^{n}\underset{p}{A_{n-k}}(t)\otimes\underset{pp^*}{P}^{-k}(t,t)\right]\underset{p}{F}(t) + \\ &+\left[\underset{p}{B_m}(t)\otimes E + \sum_{k=1}^{m}\underset{p}{A_{m-k}}(t)\otimes\underset{pp^*}{P}^{-k}(t,t)\right]\underset{p}{\psi}(t) - \\ &-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}x_0^{(n-j)}\underset{p}{A_{n-k}}(t)\otimes\underset{p}{S}\left[\frac{\theta^{(k-j)}}{(k-j)!}\right] + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}g_0^{(m-j)}\underset{p}{B_{m-k}}(t)\otimes\underset{p}{S}\left[\frac{\theta^{(k-j)}}{(k-j)!}\right],\end{aligned}$$

(145)

где $A_i(t) = S[a_i(\theta)]$; $B_i(t) = S[b_i(\theta)]$; $F(t) = S[\varphi(\theta)]$.

Решая уравнения (145) относительно НСХ $F(t)$ и подставляя результат этого решения в (144), находим НСХ на выходе линейной непрерывной системы в виде

$$\underset{p}{X}(t) = \underset{pp^*}{W}(t,t) -$$
$$-\left\{ \underset{pp^*}{W}(t,t) \sum_{j=1}^{m} g_0^{(m-j)} \underset{p}{\Theta}^{m-j}(t) - \underset{pp^*}{D}^{-1}(t,t) \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} g_0^{(m-j)} \underset{p}{B}_{m-k}(t) \otimes \underset{p}{\Theta}^{k-j}(t) \right\} - \qquad (146)$$
$$-\left\{ \underset{pp^*}{D}^{-1}(t,t) \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_0^{(n-j)} \underset{p}{A}_{n-k}(t) \otimes \underset{p}{\Theta}^{k-j}(t) - \sum_{j=1}^{n} x_0^{(n-j)} \underset{p}{\Theta}^{n-j}(t) \right\},$$

где $W(t,t) = D^{-1}(t,t) M(t,t) \quad (D^{-1}(t,t) = P^{-n}(t,t) \left[\sum_{j=1}^{n} A_{n-k}(t) * P^{-k}(t,t) \right]^{-1};$

$M(t,t) = \left[\sum_{k=1}^{m} B_{n-k}(t) \otimes P^{-k}(t,t) \right] P^m(t,t)$ - матрица ДНПФ системы управления, а

$$\Theta^{m-j}(t) = \underset{p}{S}\left[\frac{\theta^{m-j}}{(m-j)!} \right]; \quad \Theta^{k-\alpha}(t) = P^{\alpha}(t,t)\Theta^k(t); \quad \Theta^{k+\alpha}(t) = P^{-\alpha}(t,t)\Theta^k(t).$$

Заметим что решение (146) найдено в предположении существования матрицы, обратной двухсторонней к матрице $D(t.t)$.

Преобразуем теперь найденное решение (146) к другому виду. Для этого выражение в первой фигурной скобке в правой части (145), поменяв порядок суммирования, представим в виде

$$W(t,t) \sum_{o=1}^{m} g_0^{(m-j)} \Theta^{m-j}(t) - D^{-1}(t,t) \sum_{j=1}^{m} g_0^{(m-j)} \sum_{k=j}^{m} B_{m-k}(t) \otimes \Theta^{k-j}(t).$$

Введем теперь новую переменную $k = m - j$, а затем $\alpha = m - k$, последнее выражение представим так:

$$\sum_{n=0}^{m-1} g_0^{(k)} D^{-1}(t,t) \sum_{\alpha=k+1}^{m} B_{\alpha}(t) \otimes P^{\alpha-k-1}(t/t) \Delta(t),$$

(147)

где $\Delta(t)$ - НСХ δ - функции.

Аналогично поступая, приведем выражение во второй фигурной скобке из правой части (146) к виду

$$-\sum_{n=0}^{n-1} x_0^{(k)} D^{-1}(t,t) \sum_{\alpha=k+1}^{n} A_{\alpha}(t) \otimes P^{\alpha-k}(t,t) \Delta(t).$$

(148)

Теперь НСХ (146) с учетом (147) и (148) имеет вид

$$\underset{p}{X}(t) = \underset{pp^*}{W}(t,t) \underset{p}{G}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(k)} \underset{pp^*}{W}_{xk}(t,t) \underset{p}{\Delta}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} g_0^{(k)} \underset{pp^*}{W}_{gk}(t,t) \underset{p}{\Delta}(t),$$

где

$$W_{xk}(t,t) = D^{-1}(t,t)\sum_{\alpha=k+1}^{n} A_{\alpha} \otimes P^{\alpha-k-1}(t,t);$$

(149)

$$W_{nk}(t,t) = -D^{-1}(t,t)\sum_{\alpha=k+1}^{ь} B_{\alpha} \otimes P^{\alpha-k-1}(t,t);$$

(150)

- матрицы ДНПФ начальных условий соответственно выходного $x(\theta)$ и входного $g(\theta)$ сигналов системы, которая описывается дифференциальным уравнением (134), а

$$W(t,t) = P^{-1}(t,t)\left[\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(t) \otimes P^{-k}(t,t)\right]^{-1}\left[\sum_{k=0}^{m} A_{m-k}(t) \otimes P^{-k}(t,t)\right]P^{m}(t,t)$$

(151)

- ДНПФ этой системы.

Таким образом, НСХ выходного сигнала непрерывной системы находится в общем случае по НСХ входного сигнала G, начальным условиям входного и выходного сигналов с помощью ДНПФ системы W и передаточных функций начальных условий (149), (150).

Выше были рассмотрены отдельные связи между характеристиками спектральной формы математического описания непрерывных систем. Подводя итог, можно кратко описать общий порядок решения основной задачи анализа непрерывных систем как при детерминированных, так и при случайных воздействиях.

Вначале определяем НСХ входного сигнала G на основе формулы (90). Далее находим ДНПФ системы W. Для этого составляем расчетную схему системы, выделяя в ней элементарные и типовые звенья, или звенья, описываемые дифференциальными (интегральными) уравнениями (134). Затем составляем выражение для ДНПФ системы через ДНПФ выделенных звеньев на основе формул параллельного соединения (Рис.1. а), последовательного соединения (Рис.1. б) и соединения с обратной связью (Рис.1. в). И, наконец, определяем НСХ реакции системы X по формуле (49) и НСП моментных характеристик системы ${}^{1}S_{x}$, S_{x}, S_{xg} по формулам (60) – (62). Реакцию системы находим как функцию времени по формулам обращения (98) – (100).

Литература

1. Солодовников В.В. и др. Расчет систем управления на ЦВМ. – М.: Машиностроение, 1979. – 664 с.
2. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. - М.: Наука, 1974. – 335 с.

3. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом: Учебное пособие. – М. : МАИ, 1984. – 84 с.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 464 с.
5. Чуи К. Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир. 2001. – 412 с.
6. Mallat S. *Multiresolution approximation and wavelets*// Trans. Amer. Math. Soc., 1989.- pp. 69-88.
7. Meyer Y. (1992), *Ondelettes sur l'intervalle*, Rev. Math. Iberoamer., 1992.- pp. 115-133.

Рыбин Владимир Васильевич, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н.
контактный телефон: 158-48-11
E-mail:dep805@mai.ru