

Труды МАИ. 2023. № 129
Trudy MAI, 2023, no. 129

Научная статья
УДК 532.65/532.5.031
DOI: [10.34759/trd-2023-129-12](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-12)

МЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛОГ КОЛЕБАНИЙ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЁТОМ КАПИЛЛЯРНОГО ЭФФЕКТА

Александр Николаевич Темнов¹, Павел Михайлович Шкапов², Юй Чжаокай³✉

^{1,2,3}Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия

¹antt45@mail.ru

²spm@bmstu.ru

³yuzhaokai933@mail.ru✉

Аннотация. Выведено граничное условие с учётом диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта на основе общего принципа Гамильтона–Остроградского. Из полученного граничного условия на линии контакта вытекают условие сохранения угла смачивания и условие неподвижной линии трёхфазного контакта. Разработан численный алгоритм расчёта коэффициента затухания за счёт диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта на основе метода конечных элементов. В данной работе маятник и спиральная пружина моделируют воздействие массовых сил и сил поверхностного натяжения соответственно, а влияние вязкости жидкости учитывается линейным демпфером. Дана количественная оценка влияния

числа капиллярности C_a (соотношение силы вязкости и силы поверхностного натяжения), числа Бонда B_0 (соотношение массовых сил и силы поверхностного натяжения) и коэффициента заполнения сосуда жидкостью β (соотношение объёма жидкости к объёму полости сосуда) на коэффициент затухания и собственную частоту колебаний капиллярной жидкости.

Ключевые слова: линия трёхфазного контакта, угол смачивания, маловязкая жидкость, комплексная частота, механический аналог, метод конечных элементов

Для цитирования: Темнов А.Н., Шкапов П.М., Юй Чжаокай. Механический аналог колебаний маловязкой жидкости с учётом капиллярного эффекта // Труды МАИ. 2023. № 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-12](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-12)

Original article

MECHANICAL MODEL OF LOW-VISCOSITY LIQUID SLOSHING WITH CAPILLARY EFFECTS

Alexander N. Temnov¹, Pavel M. Shkapov², Yu Zhaokai³✉,

^{1,2,3}Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

¹antt45@mail.ru

²spm@bmstu.ru

³yuzhaokai933@mail.ru✉

Abstract. The author derived a boundary condition considering energy dissipation near the three-phase contact line based on the Hamilton–Ostrogradsky principle. A numerical algorithm has been developed for calculating the damping factor due to energy dissipation

near the three-phase contact line based on the finite element method. A variation formulation of the problem is derived from the of the motion equations linearization of the liquid relative to the equilibrium free surface. The area occupied by the fluid was discretized by the finite elements, and the eigenvalue problem, which solution represented a complex frequency, was obtained. In the work being presented, a pendulum and a spiral spring simulate the impact of mass forces and surface tension force respectfully, and the fluid viscosity is accounted for by the linear damper. The mechanical analog parameters are determined from the principle of dynamic similarity, eigen frequency, damping factor and kinetic energy of the fluid and its mechanical model. The article presents quantitative estimation of the capillary number Ca (viscous force and surface tension force interrelation), the Bond number B_0 (mass forces and surface tension force interrelation) and the liquid filling factor β (liquid volume to the vessel concavity ratio) effect on the damping factor and eigen frequency of the capillary liquid oscillations. It follows from the studies that the capillarity number greatly affects the energy dissipation near the three-phase contact, and its value in the range of 10–100 leads to the greater value of the damping factor of the order of the damping coefficient on the vessel wall. The obtained results may be employed for the dynamics and stability studies of the rooster super stages, upper-stage rockets and other spacecraft with the liquid containing cavities.

Keywords: three-phase contact line, contact angle, low-viscosity fluid, complex frequency, mechanical model, finite element method

For citation: Temnov A.N., Shkapov P.M., Yu Zhaokai. Mechanical model of low-viscosity liquid sloshing with capillary effects. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-12](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-12)

Введение

Во многих работах российских и зарубежных учёных показано, что экспериментальные результаты коэффициента затухания колебаний жидкости в топливных баках систематически больше теоретических значений, полученных на основе только пограничного слоя стенки сосуда [1–4]. В монографиях [5–6] показывается, что неучёт эффектов вблизи линии трёхфазного контакта является одной из основных причин рассогласования. В статьях Майлса [7–8] предложены четыре механизма диссипации энергии колебаний жидкости в сосудах с гладкими стенками: в пограничном слое стенки сосуда, в основной массе жидкости, в пограничном слое загрязненной свободной поверхности и вблизи линии трёхфазного контакта. Последний механизм диссипации энергии связан с капиллярным эффектом жидкости [9–10].

В инженерной практике часто применяют маятниковые модели или осцилляторы типа масса-пружина для моделирования движения жидкости в топливных баках [1–3, 11–14]. С созданием орбитальных станций, разгонных блоков и космических аппаратов важную роль приобретает проблема плескания топлива в условиях

микрогравитации ($g = 10^{-6}-10^{-4} g_0$, где $g_0 = 9.81 \text{ м/сек}^2$), когда существенно проявляется влияние капиллярного эффекта на поведение жидкости [15–19].

Следует отметить, что в верхней ступени ракет-носителей или разгонных блоках часто применяют двухсвязные сосуды в виде коаксиального цилиндра или тора для наилучшей компоновки. Поведение капиллярной жидкости в этих сосудах исследовано недостаточно. Исследование задачи статики жидкости в двухсвязных сосудах в условиях микрогравитации подробно проведено в [20]. В статье [21] представлено решение задачи о собственных колебаниях капиллярной жидкости ограниченного объёма. В работе [22] предложен механический аналог колебаний идеальной капиллярной жидкости. В данной работе основное внимание будет уделено исследованию диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта и разработан механический аналог колебаний маловязкой капиллярной жидкости.

Колебания капиллярной жидкости с учётом изменения угла смачивания

Пусть вектор ускорения \mathbf{g} действует параллельно продольной оси симметрии сосуда. Используем длину дуги s в качестве переменной для описания формы равновесной свободной поверхности. Введём цилиндрическую систему координат $o\theta z$ (рис. 1), а также на свободной поверхности Γ_0 криволинейную систему координат $os\theta h$ таким образом, чтобы поверхность Γ_0 имела уравнение $h = 0$, а координатные линии h были направлены по внешней нормали поверхности Γ_0 .

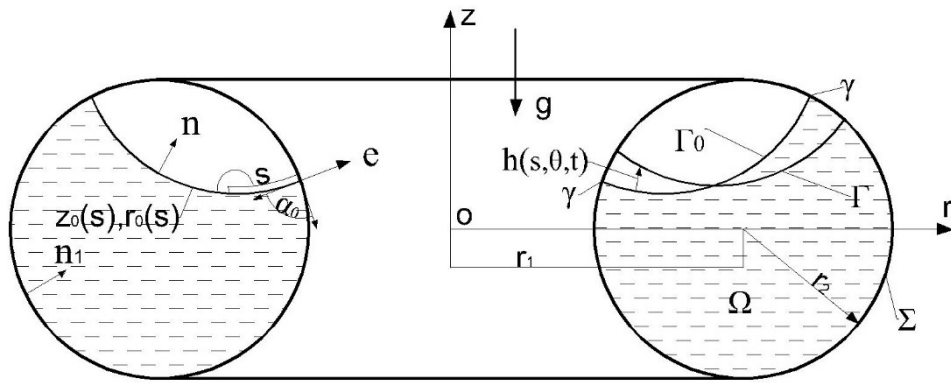


Рис. 1. Основные обозначения параметров жидкости и систем координат:

$z_0(s)$ и $r_0(s)$ – функции равновесной свободной поверхности; α_0 – угол смачивания;

$h(s, \theta, t)$ – отклонение возмущённой свободной поверхности Γ от Γ_0 по внешней нормали;

γ – линия трёхфазного контакта (ЛТК); Σ – смачиваемая поверхность; Ω – область жидкости; r_1 – радиус осевой окружности; r_2 – радиус окружности меридиана;

\mathbf{n} и \mathbf{n}_1 – нормали свободной поверхности и смачиваемой поверхности соответственно;

\mathbf{e} – внешняя нормаль линии контакта в касательной плоскости свободной поверхности.

Непосредственные наблюдения показывают, что жидкость в первый период колебаний смочила стенку сосуда и при следующих циклах совершает движение по поверхности, покрытой плёнкой жидкости малой толщины. Именно в этой плоскости контакта возникают касательные напряжения трения F_τ , пропорциональные касательной составляющей скорости $(\partial h / \partial t) / \sin \alpha_0$ и некоторому коэффициенту трения μ_γ :

$$F_\tau = -\mu_\gamma \frac{\partial h}{\partial t} \frac{1}{\sin \alpha_0}. \quad (1)$$

Работа касательных напряжений трения ЛТК на поле возможных перемещений $\delta h / \sin \alpha_0$ имеет вид:

$$\delta Q = \int_{\gamma} F_{\tau} \frac{\delta h}{\sin \alpha_0} d\gamma = - \int_{\gamma} \frac{\mu_{\gamma}}{\sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t} \delta h d\gamma. \quad (2)$$

Согласно вариационному принципу Гамильтона-Остроградского для неконсервативных систем [23, с. 148], имеем следующую формулу:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta Q dt, \quad (3)$$

где кинетическая энергия T и потенциальная энергия Π движения капиллярной жидкости в неподвижном сосуде имеют выражения:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi d\Omega = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma, \quad (4)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \rho g \int_{\Gamma_0} h^2 r_{0s} d\Gamma + \frac{1}{2} \sigma \int_{\Gamma_0} [\nabla_{\Gamma} h \nabla_{\Gamma} h - (k_1^2 + k_2^2) h^2] d\Gamma + \frac{1}{2} \sigma \int_{\gamma} \chi h^2 d\gamma.$$

В выражении (4) r_{0s} – направляющий косинус внешней нормали свободной поверхности с продольной осью z и равен первой производной функции $r_0(s)$ по длине дуги s , k_1 и k_2 – главные кривизны равновесной свободной поверхности, $\chi = (k_1 \cos \alpha_0 - k_1^{\Sigma}) / \sin \alpha_0$ – коэффициент описания формы свободной поверхности и стенки сосуда на линии контакта, k_1^{Σ} – главная кривизна стенки сосуда на линии контакта.

Вариация δh удовлетворяет условиям изохронности: $\delta h_{t=t_1} = \delta h_{t=t_2} = 0$.

Подставив выражения δT , $\delta \Pi$ и δQ в формулу (3), получим динамическое условие на свободной поверхности и граничное условие на ЛТК:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g h r_{0s} - \frac{\sigma}{\rho} [(k_1^2 + k_2^2) h + \Delta_{\Gamma} h] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h + \frac{\mu_{\gamma}}{\sigma \sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \text{ на } \gamma. \quad (6)$$

где $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{r_{0s}}{r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа-Бельтрами на Γ_0 .

Специфика капиллярного эффекта проявляется в динамическом условии свободной поверхности (5) и в граничном условии ЛТК (6). При этом условие (6) учитывает диссипацию энергии вблизи ЛТК, которая возникает за счёт изменения угла смачивания в процессе движения жидкости (рис. 2).

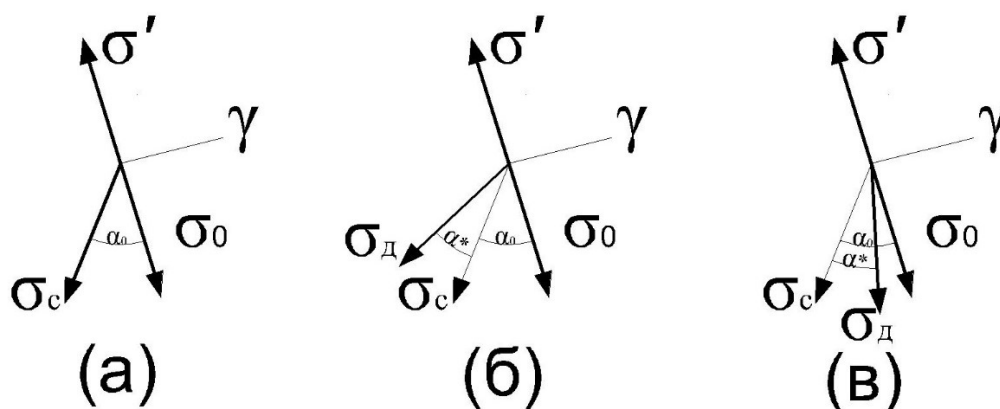


Рис. 2. Схема изменения угла смачивания жидкости:

(а) – равновесие, (б) – жидкость движется в сторону газа, (в) – движется от стороны газа, где σ_0 и σ' – поверхностное натяжение разделов жидкости–стенки и газа–стенки, σ_c и σ_d – статическое и динамическое поверхностное натяжение раздела жидкости–газа.

Из рис. 2 следует, что в процессе движения жидкости динамический угол смачивания отличается от статического и это отличие уравнивается касательным трением на ЛТК.

Из полученного граничного условия (6) на ЛТК вытекают другие две модели движения ЛТК:

1). $\mu_\gamma = 0$ для идеальной жидкости, (6) преобразуется в условие сохранения угла смачивания [16, с. 265]:

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0 \text{ на } \gamma. \quad (7)$$

2). $\mu_\gamma \rightarrow \infty$, условие неподвижной линии контакта: $h = 0$ на γ .

Учитывая уравнение Лапласа, условие непротекания жидкости на смачиваемой поверхности и кинематическое условие на свободной поверхности, запишем постановку задачи о колебаниях капиллярной жидкости с учётом диссипации энергии вблизи ЛТК:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + ghr_{0s} - \frac{\sigma}{\rho} \left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial h}{\partial e} + \chi h + \frac{\mu_\gamma}{\sigma \sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \text{ на } \gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Введём радиус окружности меридиана тора r_2 как характерный размер задачи, и характерные значения для времени и потенциала: $t^* = (\rho r_2^3 / \sigma)^{1/2}$, $\varphi^* = r_2^2 / t^*$. Подставив величины $x = r_2 x'$, $t = t^* t'$ и $\varphi = \varphi^* \varphi'$ в (8), получим безразмерный форму задачи, в которой опускаем верхний знак ' над буквами:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + B_0 h r_{0s} - \left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial h}{\partial e} + \chi h + C_a \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \text{ на } \gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

где $B_0 = \rho g r_2^2 / \sigma$ – число Бонда, характеризующее соотношение массовой силы и силы поверхностного натяжения, C_a – число капиллярности, описывающее соотношение силы вязкости и силы поверхностного натяжения:

$$C_a = \frac{\mu_\gamma}{\sin^2 \alpha_0 \sqrt{\rho r_2 \sigma}} = \frac{\sqrt{\rho r_2^3 \omega_n^2 / \sigma}}{\rho r_2^2 \omega_n \sin^2 \alpha_0 / \mu_\gamma} = \frac{\omega_n^*}{\text{Re}_n^* \sin^2 \alpha_0}. \quad (10)$$

Здесь $\omega_n^* = \omega_n(\rho r_2^3/\sigma)^{1/2}$ и $Re_n^* = \rho\omega_n r_2^2/\mu_\gamma$ – безразмерная собственная частота и введённый критерий Рейнольдса для капиллярной жидкости.

Из выражения числа капиллярности C_a следует, что данное безразмерное число чувствительно к углу смачивания α_0 , который зависит от свойств жидкости и стенки сосуда. Реальное ракетное топливо в сосудах имеет маленький угол смачивания, близкий к нулю, так как необходимо учитывать диссипацию энергии хотя имеется большое значение Рейнольдса Re_n^* .

Определение комплексных частот колебаний капиллярной жидкости

Потенциал скоростей жидкости $\varphi(r, z, \theta, t)$ и поле смещений свободной поверхности $h(s, \theta, t)$ можно представить в виде:

$$\varphi(r, z, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r, z, \theta) e^{\Omega_n t}, \quad h(s, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s, \theta) e^{\Omega_n t}, \quad (11)$$

где $\Omega_n = -\varepsilon_n + i\omega_n$ – комплексная частота колебаний жидкости, а ε_n – коэффициент затухания за счёт диссипации энергии на линии контакта.

Исключив переменную времени t , получим задачу о собственных колебаниях жидкости с учётом капиллярного эффекта:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_n = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n + C_a \Omega_n h_n = 0 \text{ на } \gamma, \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} = \Omega_n h_n \text{ на } \Gamma_0, \quad \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n - \Delta_\Gamma h_n - \Omega_n \varphi_n = 0 \text{ на } \Gamma_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя вариационный метод Галёркина, запишем формулировку задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& -\int_{\Omega} \Delta \varphi_n \delta \varphi_n d\Omega + \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} - \Omega_n h_n \right) \delta \varphi_n d\Gamma_0 + \int_{\gamma} \left(\frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n + C_a \Omega_n h_n \right) \delta h_n d\gamma + \\
& \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Sigma + \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n - \Delta_{\Gamma} h_n - \Omega_n \varphi_n \right\} \delta h_n d\Gamma_0 = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Используя интегрирование по частям для $\Delta \varphi_n$ и $\Delta_{\Gamma} h_n$

$$\begin{aligned}
& -\int_{\Gamma_0} \Delta_{\Gamma} h_n \delta h_n d\Gamma_0 = -\int_{\gamma} \frac{\partial h_n}{\partial e} \delta h_n d\gamma + \int_{\Gamma_0} \nabla_{\Gamma} h_n \delta \nabla_{\Gamma} h_n d\Gamma_0, \\
& -\int_{\Omega} \Delta \varphi_n \delta \varphi_n d\Omega = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Sigma - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Gamma_0 + \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \delta \nabla \varphi_n d\Omega,
\end{aligned}$$

получим формулировку задачи в виде вариации функционала:

$$\begin{aligned}
\delta I = 0, \text{ где } I = & \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n^2 + \nabla_{\Gamma} h_n \nabla_{\Gamma} h_n \right\} d\Gamma_0 + \int_{\gamma} \chi h_n^2 d\gamma \\
& + \Omega_n \int_{\gamma} C_a h_n^2 d\gamma + \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n d\Omega.
\end{aligned} \tag{14}$$

В выражении функционала I_1 есть слагаемое $\nabla_{\Gamma} h_n$, которое представляет собой вторую производную потенциала скоростей жидкости φ_n и вызывает трудность при решении задачи колебаний капиллярной жидкости. Удобно рассматривать поле скоростей жидкости $\partial \varphi_n / \partial n$ на свободной поверхности как расчётную функцию в данной задаче и введена вспомогательная задача Неймана для создания связи между потенциалом скоростей жидкости φ_n и $\partial \varphi_n / \partial n$. Данный подход позволит использовать линейные треугольные элементы при применении метода конечных элементов.

Ограничимся в статье решениями, отвечающими функциям $\cos(m\theta)$:

$$\varphi_n(r, z, \theta) = \Phi(r, z) \cos(m\theta), \quad h_n(s, \theta) = H(s) \cos(m\theta). \tag{15}$$

Получим задачу на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости с учётом диссипации энергии вблизи ЛТК:

$$\delta I = 0,$$

$$I = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right] \right\} r ds + \quad (16)$$

$$\left[\chi r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right]_{\gamma} + \Omega_n \left[C_a r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right]_{\gamma} + \Omega_n^2 \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{m^2 \Phi^2}{r^2} \right] r dr dz.$$

При $m = 1$ Колебания имеют асимметричную моду колебаний и в этом случае возникает переменное результирующее давление в поперечном направлении сосуда. Данный случай вызывает большой интерес при проектировании систем управления летательных аппаратов.

Приведенная выше вариационная постановка задачи (16) пригодна для применения метода конечных элементов (МКЭ) [24–25]. В данной задаче выбраны линейные треугольные элементы для дискретизации области жидкости и соответствующая схема аппроксимации показана на рис. 3.

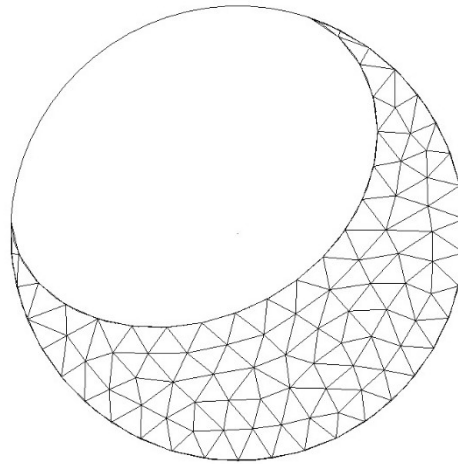


Рис. 3. Схема дискретизация области жидкости в правом сечении тора.

Представив расчётные функции в элементе по их узловым значениям, получим матричную форму задачи (16):

$$\left(\Omega_n^2 \mathbf{M} + \Omega_n \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (17)$$

В выражении (17) матрица инерции \mathbf{M} и матрица жёсткости \mathbf{K} уже определены при решении задачи о собственных колебаниях идеальной жидкости в условиях микрогравитации [21]. Матрица вязкости \mathbf{C} составлена из матриц \mathbf{C}_i , δ_{jk} – символ Кронекера,

$$\mathbf{C}_i = [C_{jk}^i] \text{ и } C_{jk}^i = (C_a r)_\gamma \delta_{jk}. \quad (18)$$

Задача (17) представляет собой задачу о собственных значениях 2-го порядка. Для её решения полагаем $\partial\Phi/\partial\mathbf{n}$ и $\Omega_n \partial\Phi/\partial\mathbf{n}$ как переменные и введём вспомогательное соотношение:

$$(\Omega_n \mathbf{M} - \Omega_n \mathbf{M}) \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0. \quad (19)$$

Из (17) и (29) следует задача на определение комплексных частот колебаний маловязкой жидкости с учётом капиллярного эффекта:

$$(\Omega_n \mathbf{S} + \mathbf{T}) \mathbf{X} = 0, \quad \text{где } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{l} \Omega_n \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} \end{array} \right\}. \quad (20)$$

После решения данной задачи получим собственные значения Ω_n , которые представляют собой комплексные числа с отрицательной вещественной частью. Вещественная часть комплексной частоты ε_n означает коэффициент затухания за счёт диссипации энергии на линии контакта, а мнимая часть ω_n – собственная частота колебаний жидкости.

Механический аналог колебаний маловязкой капиллярной жидкости

В статье [22] разработан механический аналог колебаний идеальной жидкости в условиях микрогравитации. Маятник моделирует воздействие массовой силы, а спиральная пружина характеризует влияние поверхностного натяжения. В данной работе для учёта небольшого вязкого демпфирования колебаний жидкого топлива введен линейный демпфер (рис. 4).

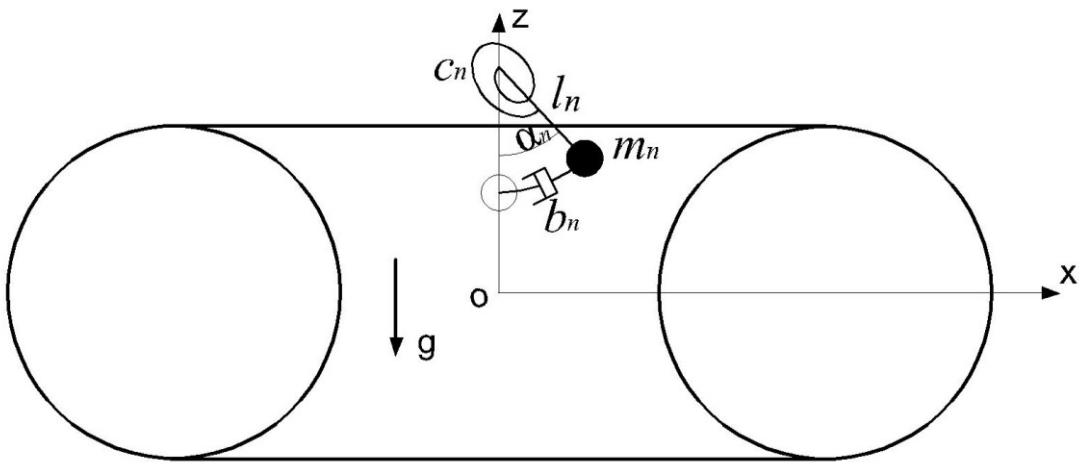


Рис. 4. Основные обозначения параметров маятниковой модели со спиральной пружиной и линейным демпфером.

В дальнейшем сразу запишем параметры механического аналога в виде переменных Φ_n и H_n :

$$m_n = \frac{\pi \left(\int_0^{s_0} r^2 \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} ds \right)^2}{\int_0^{s_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds}, \quad l_n = \frac{\int_0^{s_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds}{\int_0^{s_0} H_n^2 r_{0s} r ds}, \quad (21)$$

$$b_n = 2m_n \varepsilon_n, \quad \frac{c_n}{m_n l_n} = \frac{\int_0^{s_0} \left[(\nabla_{\Gamma} H_n)^2 - (k_1^2 + k_2^2) H_n^2 \right] r ds + (\chi H_n^2 r)_{s=0}^{s=s_0}}{\int_0^{s_0} H_n^2 r_{0s} r ds}.$$

В (21) s и s_0 означает переменную меридиана свободной поверхности и её общую длину дуги.

Приведенные параметры механического аналога колебаний маловязкой капиллярной жидкости безразмерные и для получения их размерных значений используем следующие соотношения, « p » означает размерную величину:

$$m_n^p = \rho r_2^3 m_n, l_n^p = r_2 l_n, b_n^p = \sqrt{\rho \sigma r_2^3} b_n, c_n^p = \sigma r_2^2 c_n. \quad (22)$$

Из приведённого выше текста вытекает, что алгоритм разработки механического аналога капиллярной жидкости с учётом диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта состоит в следующем:

- 1). определение формы равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости $z = z_0(s)$, $r = r_0(s)$ и получение функций r_{0s} , k_1 , k_2 , χ ;
- 2). создание геометрической модели области жидкости и выполнение её дискретизации треугольными элементами в программе PARTRAN;
- 3). обработка информации о координатах узлах и элементов в MATLAB;
- 4). получение матриц \mathbf{K} , \mathbf{M} , \mathbf{C} с использования численного интегрирования функции методом Гаусса;
- 5). решение задачи на определение комплексных частот и получение коэффициента затухания ε_n ;
- 6). определение параметров механического аналога капиллярной жидкости с учётом диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта.

Обсуждение результатов

В данной работе только исследованы колебания, отвечающие числу волн в окружном направлении $m = 1$. В этом случае мода колебаний жидкости антисимметричная ($\cos\theta$) и возникает переменное результирующее давление в поперечном направлении сосуда. В программе MATLAB был реализован разработанный алгоритм, получены коэффициент затахания и собственные частоты колебаний жидкости при различных числах капиллярности Ca , числах Бонда B_0 и объёмах жидкости β , показанные на рис. 5–7.

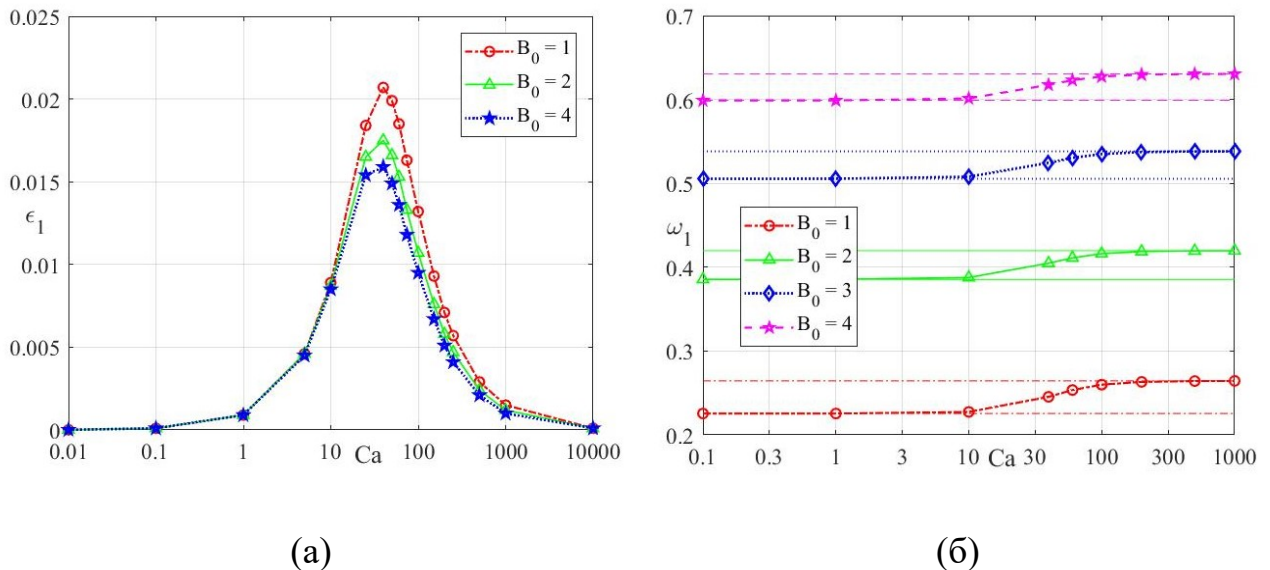
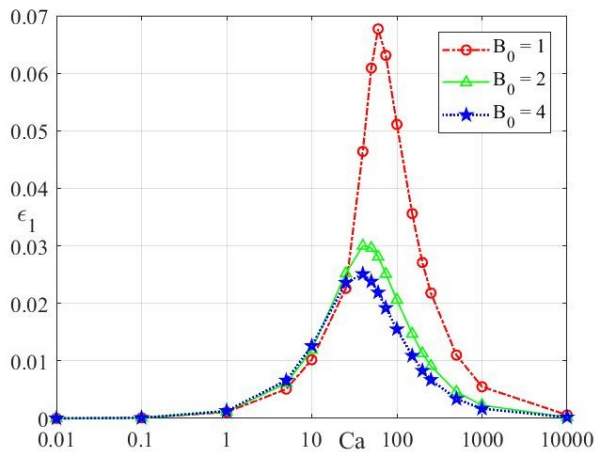
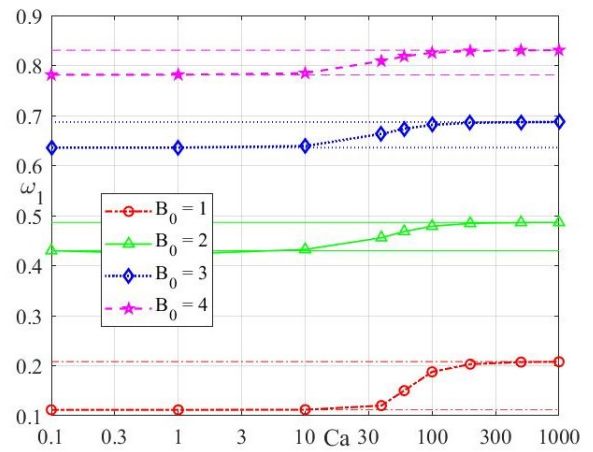


Рис. 5. Коэффициент затахания ϵ_1 (а) и собственная частота ω_1 (б) основного тона колебаний жидкости при $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 20\%$.

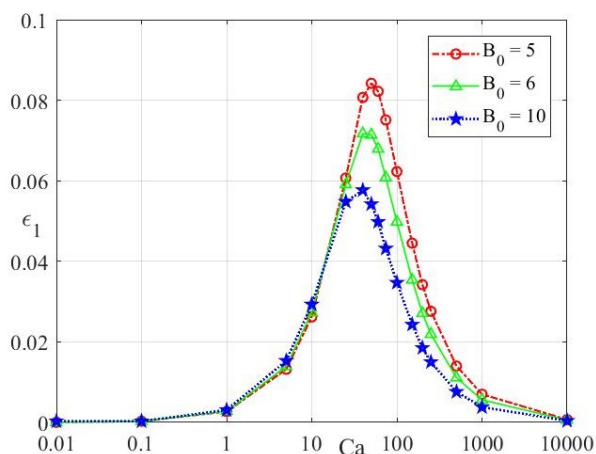


(a)

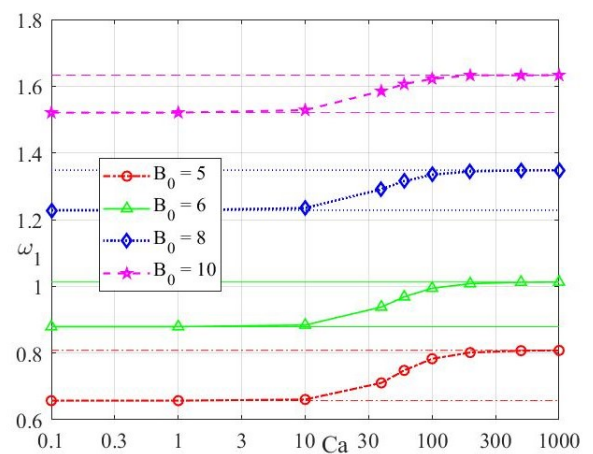


(б)

Рис. 6. Коэффициент затухания ϵ_1 (а) и собственная частота ω_1 (б) основного тона колебаний жидкости при $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$.



(a)



(б)

Рис. 7. Коэффициент затухания ϵ_1 (а) и собственная частота ω_1 (б) основного тона колебаний жидкости при $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 80\%$.

Из (а) этих графиков следует, что число капиллярности C_a в диапазоне 10–100 приводит к значительной диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта и коэффициент демпфирования ϵ_1 имеет порядок как коэффици затухания на

погранслое стенки сосуда. А из выражения числа капиллярности C_a видно, что при маленком угле смачивания α_0 и большом коэффициенте трения μ_γ число капиллярности C_a реальной жидкости может быть находится в этом диапазоне. Также заметим, что при $C_a \rightarrow 0$ собственная частота совпадает с численным значением частоты колебаний жидкости с граничным условием о сохранении угла смачивания α_0 , а при $C_a \rightarrow \infty$ собственная частота ω_1 приближается к результатам при неподвижной линии трёхфазного контакта γ ($h = 0$ на γ).

Заключение

В настоящей работе получено граничное условие с учётом диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта. Исследованы задачи о нормальных колебаниях маловязкой капиллярной жидкости на основе метода конечных элементов. Разработанный алгоритм определения параметров механического аналога капиллярной жидкости с учётом диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта пригоден для любого осесимметричного сосуда. Из исследований следует, что число капиллярности C_a оказывает существенное влияние на диссипацию энергии вблизи линии трёхфазного контакта и его значение в диапазоне 10–100 приводит к большему значению ε_1 , имеющему порядок как коэффицици затухания на стенке сосуда. При $C_a \rightarrow 0$ собственная частота совпадает с численным значением частоты колебаний жидкости с граничным условием о сохранении угла смачивания α_0 , а при $C_a \rightarrow \infty$ ω_1 приближается к полученным результатам с неподвижной линией контакта γ .

Список источников

1. Case K., Parkinson W. Damping of surface waves in an incompressible liquid // Journal of Fluid Mechanics, 1957, vol. 2, no. 2, pp. 172–184. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112057000051>
2. Abramson H.N. The Dynamic Behavior of liquids in Moving Containers, NASA SP-106, 1966, 467 p.
3. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей и космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. – 416 с.
4. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
5. Черноусько Ф.Л. Движение твёрдого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. - М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. – 232 с.
6. Богоряд Е.Д. Динамика вязкой жидкости со свободной поверхностью. - Томск: Изд-во Томского университета, 1980. - 101 с.
7. Miles J.W. Surface-wave damping in closed basins // Proceedings of the Royal Society of London, 1967, vol. 297, issue 1451, pp. 459–475. URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.1967.0081>
8. Henderson D.M, Miles J.W. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line // Journal of Fluid Mechanics, 1994, vol. 275, pp. 285–299. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112094002363>

9. Wang W., Li J., Wang T. Modal analysis of liquid sloshing with different contact line boundary conditions using FEM // Journal of Sound and Vibration, 2008, vol. 317, issues 3–5, pp. 739–759. DOI: [10.1016/j.jsv.2008.03.070](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.070)
10. Utsumi M. Slosh damping caused by friction work due to contact angle hysteresis // AIAA Journal, 2017, vol. 55, no. 1. pp. 1–9. DOI: [10.2514/1.J055238](https://doi.org/10.2514/1.J055238)
11. Dodge F.T., Kana D.D. Dynamics of liquid sloshing in upright and inverted bladdered tanks // Journal of fluids engineering, 1987, vol. 109, no. 1, pp. 58-63. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3242617>
12. Колесников К.С. Динамика ракет. - М.: Машиностроение, 2003. – 520 с.
13. Li Q., Ma X., Wang T. Equivalent mechanical modal for liquid sloshing during draining // Acta Astronautica, 2011, vol. 68, issues 1-2, pp. 91-100. URL: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2010.06.052>
14. Попов И.П. Монореактивный грамонический осциллятор // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168987>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)
15. Авдудевский В.С., Полежаев В.И. Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. - М.: Наука, 1982. – 288 с.
16. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости. - Киев: Наукова Думка, 1992. – 592 с.
17. Dodge F.T. The new "Dynamic behavior of liquids in moving containers", NASA SP-106, 2000, 202 p.

18. Ibrahim R.A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 2005, 948 p.
19. Александров Л.Г., Константинов С.Б., Марков А.В., Платов И.В. О методике подтверждения работоспособности фазоразделителя внутрибакового устройства капиллярного типа // Труды МАИ. 2022. № 127. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=170335>. DOI: [10.34759/trd-2022-127-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-127-07)
20. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. № 3. С. 1-11. URL: <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-3-2060>
21. Юй Чжаокай. Волновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учётом капиллярного эффекта // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 151–165. DOI: [10.17223/19988621/78/12](https://doi.org/10.17223/19988621/78/12)
22. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Механический аналог малых колебаний жидкости в условиях, близких к невесомости // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168991>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-05).
23. Вильке В.Г. Теоретическая механика. - СПб.: Изд-во «Лань», 2003. – 304 с.
24. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Под редакцией Б.Е. Победри. - М.: Мир, 1975. – 542 с.
25. Bathe K.J. Finite element procedures. 2nd edition, Waterton, 2014, 1065 p.

References

1. Case K., Parkinson W. Damping of surface waves in an incompressible liquid, *Journal of Fluid Mechanics*, 1957, vol. 2, no. 2, pp. 172–184. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112057000051>
2. Abramson H.N. *The Dynamic Behavior of liquids in Moving Containers*, NASA SP-106, 1966, 467 p.
3. Rabinovich B.I. *Vvedenie v dinamiku raket-nositelei i kosmicheskikh apparatov* (Introduction to the dynamics of launch vehicles and spacecraft), Moscow, Mashinostroenie, 1975, 416 p.
4. Mikishev G.N. *Eksperimental'nye metody v dinamike kosmicheskikh apparatov* (Experimental methods in the dynamics of spacecraft), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 247 p.
5. Chernous'ko F.L. *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, sodержashchimi vyazkuyu zhidkost'* (The motion of a rigid body with cavities containing a viscous fluid), Moscow, Vychislitel'nyi tsentr AN SSSR, 1968, 232 p.
6. Bogoryad E.D. *Dinamika vyazkoi zhidkosti so svobodnoi poverkhnost'yu* (Dynamics of a viscous fluid with a free surface), Tomsk, Izd-vo Tomskogo universiteta, 1980, 101 p.
7. Miles J.W. Surface-wave damping in closed basins, *Proceedings of the Royal Society of London*, 1967, vol. 297, issue 1451, pp. 459–475. URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.1967.0081>

8. Henderson D.M, Miles J.W. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line, *Journal of Fluid Mechanics*, 1994, vol. 275, pp. 285–299. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112094002363>
9. Wang W., Li J., Wang T. Modal analysis of liquid sloshing with different contact line boundary conditions using FEM, *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 317, issues 3–5, pp. 739–759. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.03.070
10. Utsumi M. Slosh damping caused by friction work due to contact angle hysteresis, *AIAA Journal*, 2017, vol. 55, no. 1. pp. 1–9. DOI: 10.2514/1.J055238
11. Dodge F.T., Kana D.D. Dynamics of liquid sloshing in upright and inverted bladdered tanks, *Journal of fluids engineering*, 1987, vol. 109, no. 1, pp. 58-63. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3242617>
12. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* (Rocket dynamics), Moscow, Mashinostroenie, 2003, 520 p.
13. Li Q., Ma X., Wang T. Equivalent mechanical modal for liquid sloshing during draining, *Acta Astronautica*, 2011, vol. 68, issues 1-2, pp. 91-100. URL: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2010.06.052>
14. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168987>. DOI: 10.34759/trd-2022-126-01
15. Avduevskii V.S., Polezhaev V.I. *Gidromekhanika i teplomassoobmen v nevesomosti* (Hydromechanics and heat and mass transfer in weightlessness), Moscow, Nauka, 1982, 288 p.

16. Myshkis A.D., Babskii V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskii N.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Metody resheniya zadachi gidromekhaniki dlya uslovii nevesomosti* (Methods for solving the problem of hydromechanics for weightlessness conditions), Kiev, Naukova Dumka, 1992, 592 p.
17. Dodge F.T. *The new "Dynamic behavior of liquids in moving containers"*, NASA SP-106, 2000, 202 p.
18. Ibrahim R.A. *Liquid sloshing dynamics: theory and applications*, Cambridge, Cambridge University Press, 2005, 948 p.
19. Aleksandrov L.G., Konstantinov S.B., Markov A.V., Platov I.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 127. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=170335>. DOI: 10.34759/trd-2022-127-07
20. Yui Chzhaokai, Temnov A.N. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, 2021, no. 3, pp. 1-11. URL: <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-3-2060>
21. Yui Chzhaokai. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2022, no. 78, pp. 151–165. DOI: 10.17223/19988621/78/12
22. Yui Chzhaokai, Temnov A.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168991>. DOI: 10.34759/trd-2022-126-05.
23. Vil'ke V.G. *Teoreticheskaya mekhanika* (Theoretical mechanics), Saint Petersburg, Izd-vo «Lan'», 2003, 304 p.
24. Zenkevich O. *The finite element method in engineering science*, London, Mc-Graw-Hill, 1971, 521 p.
25. Bathe K.J. *Finite element procedures*. 2nd edition, Waterton, 2014, 1065 p.

Статья поступила в редакцию 01.03.2023

Одобрена после рецензирования 12.03.2023

Принята к публикации 27.04.2023

The article was submitted on 01.03.2023; approved after reviewing on 12.03.2023; accepted for publication on 27.04.2023