

Труды МАИ. 2021. № 121
Trudy MAI, 2021, no. 121

Научная статья

УДК 539.3

DOI: [10.34759/trd-2021-121-03](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-03)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АВТОМАТИЧЕСКОЙ СЕГМЕНТАЦИИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СТАТИКИ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ

Екатерина Анатольевна Коровайцева

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова,

Москва, Россия

katrell@mail.ru

Аннотация. В работе используется алгоритм решения нелинейных краевых задач, основанный на применении метода дифференцирования по параметру, позволяющий проводить расчеты составных мягких оболочек канонических форм меридиана в диапазоне больших перемещений и деформаций при произвольных свойствах материала оболочки и условиях нагружения и закрепления. Для минимизации произвольных действий вычислителя при подборе параметров алгоритма предлагается использование метода автоматической сегментации интервала интегрирования краевой задачи. Исследование результатов применения указанного метода выполнено на примерах, имеющих аналитическое решение задач о

раздувании цилиндрической оболочки из материала Муни-Ривлина, закрепленной на торцах подвижным шарниром, и полусферической оболочки из неогуковского материала, закрепленной на экваторе подвижным шарниром. Показано, что использование метода автоматической сегментации позволяет добиться оптимального сочетания точности решения и скорости сходимости итерационных процессов решения задачи. При этом в случае, когда на интервале интегрирования возможно появление сингулярных коэффициентов в разрешающей системе уравнений, для использования алгоритма метода автоматической сегментации требуется разработка вспомогательных приемов. Для иллюстрации указанного положения приведен пример исследования не имеющей аналитического решения задачи о раздувании полусферической оболочки из неогуковского материала, закрепленной на экваторе неподвижным шарниром.

Ключевые слова: нелинейное деформирование, нелинейная краевая задача, мягкая оболочка, высокоэластичный материал, метод сегментации, метод дифференцирования по параметру

Для цитирования: Коровайцева Е.А. Использование метода автоматической сегментации в решении задач статики мягких оболочек вращения при больших перемещениях и деформациях // Труды МАИ. 2021. № 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-03](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-03)

AUTOMATIC SEGMENTATION METHOD USING IN SOLVING PROBLEMS OF SOFT SHELLS OF REVOLUTION STATICS AT LARGE DISPLACEMENTS AND STRAINS

Ekaterina A. Korovaytseva

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,

Moscow, Russia

katrell@mail.ru

Abstract. The presented work studies opportunities of automatic segmentation method implementation for solving problems of axisymmetric static deforming of soft shells of revolution at large displacements and strains.

Mathematical statement of the problem includes four quasilinear differential equations and nine nonlinear algebraic equations. Geometrical relations of thin shells nonlinear theory are employed herewith, and elastic potentials of various views are being engaged for nonlinear physical relations formulation. The opportunity of composite shell analysis is supposed, which corresponds to the statement of multipoint boundary problem.

Algorithm of the parametric differentiation method is used for the problem solution. The initial relations of the nonlinear boundary problem are being differentiated herewith by the preselected parameter of the problem solving continuation. As the result, a system of interconnected quasilinear boundary and nonlinear initial problems is being formed. The result of the obtained system solving while studying shell deforming under conditions of large displacements and strains depends on simultaneous successful setting of a whole

range of computational algorithm parameters. As far as the method of arbitrary search of parameters leads to irrational increasing the time of computer work with the program, the article suggests a reasonable setting of one of the algorithm parameters, namely, the number of segments into which the integration interval of quasi-linear boundary value problem is divided. The said number of segments is being determined at the stage of preprocessing with the help of authored automatic segmentation method, which was successfully applied earlier when solving the linear boundary value problems.

The article presents results of the three problems solutions on soft shell inflation by the pressure, uniformly distributed along meridian, using parameter differentiation method, one of the steps of which is the automatic segmentation method.

Selection of inflation problem of a cylinder from Mooney-Rivlin material fixed at its ends by a roller is stipulated by the existence of this problem analytical solution. Three cases of arbitrary selection of a number of segments, into which the shell is divided, and a case of automatic segmentation are considered. The article shows that it is possible in the last case to obtain an optimal combination of solution accuracy and iteration processes convergence rate. The choice of a hemisphere inflation from neohookean material fixed along the equator by a roller problem is dictated not only by the existence of analytical solution of this problem, but also by the presence of singular coefficients in resolving equation system Jacobi matrix at the problem integration interval. The said feature leads to the fact that in a fairly large vicinity of the shell pole the condition, used as a criterion of shell division into segments, is violated in each point of the meridian. As the result, the number of segments determined by the automatic segmentation method appears to be quite

large. However, the problem solution result turned out to be one of the best among the shell segmentation options considered from the viewpoint of both solution accuracy and iteration processes convergence rate. It is worth emphasizing that in both examples under consideration, one of the options of arbitrary setting of segments number lead to a principally unsatisfactory solution result. Thus, the automatic segmentation method application is necessary to obtain correct solution. The problem of inflation of a hinged hemisphere of neohookean material is selected as it does not have analytical solution. As the result of calculations, it was established that automatic segmentation leads to the lowest iteration processes convergence rate among all the shell meridian division considered options. Along with this, with insufficient number of segments the solution obtaining turned out to be impossible. The performed studies revealed that automatic segmentation method application was necessary for the computer groundless actions minimizing concerning the calculation algorithm parameters setting, as well as for the problem solution results accuracy and iteration processes convergence rate increasing. Along with this, when solving problems, which resolving equation system has singular coefficients at some point of integration interval, the said method application requires additional studies, and apparently, application of some auxiliary techniques.

Keywords: nonlinear deforming, nonlinear boundary-value problem, soft shell, hyperelastic material, segmentation method, parameter differentiation method

For citation: Korovaytseva E.A. Automatic segmentation method using in solving problems of soft shells of revolution statics at large displacements and strains. *Trudy MAI*, 2021, no.121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-03](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-03)

1. Введение

Деформирование мягких оболочек из высокоэластичных материалов в общем случае сопровождается большими перемещениями и деформациями, что требует привлечения соотношений нелинейной теории оболочек, а также специфических физических соотношений, характеризующих свойства высокоэластичного материала. Проведение вычислений по формируемой в результате системе разрешающих соотношений является затруднительным без предварительного введения упрощений, касающихся геометрии оболочки, условий закрепления и нагружения или рассматриваемого диапазона перемещений и деформаций. Поэтому в доступной литературе в работах, посвященных анализу статического поведения мягких оболочек, построению алгоритма решения задачи предшествует указанное введение упрощений.

Так, при определении кинематических характеристик парашютных систем в простейшем случае может применяться модель абсолютно твердого тела [1-4]. В работах [5, 6] мягкая оболочка моделируется системой перекрестных лент, физические соотношения линейны, а деформации предполагаются малыми. В работах [7, 8] приняты аналогичные ограничения на физические соотношения, при этом рассматриваются частные случаи осесимметричных мягкооболочечных конструкций (круглая мембрана, круговые цилиндрическая и конусная оболочки, сферическая и торовая оболочки). В работах [9, 10] исследуется поведение пологих оболочек, также эксплуатируемых в незначительном диапазоне деформаций.

Во многих работах, посвященных анализу мягких оболочек простейшей геометрии, несмотря на учет и геометрической, и физической нелинейности задачи, разрешающие соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние оболочки, изначально формируются в предположении заданной формы меридиана (цилиндрической [11, 12], сферической [13-17] или тороидальной [18, 19]), что также позволяет упростить расчеты и снизить требования к разрабатываемым вычислительным алгоритмам.

В работе [20] предложен алгоритм расчета мягких оболочек вращения из высокоэластичного материала при осесимметричном нагружении, при этом на диапазон деформирования не накладывается каких-либо ограничений. Однако алгоритм ориентирован на решение лишь двухточечной краевой задачи, исследование составных оболочек не рассматривается. Кроме того, очевидно, что, чем меньше ограничений на постановку задачи накладывает вычислительный алгоритм, тем сложнее его численная реализация, тем большее количество особенностей необходимо учесть при его программировании. Решение нелинейных задач при этом усложняется возможностью одновременного существования нескольких решений. Вместе с тем доказательство единственности решения задачи по сути является объектом отдельного трудоемкого исследования. Поэтому представляется, что создание алгоритма решения подобных задач целесообразно дополнять исследованием особенностей его применения, в том числе на задачах, не имеющих аналитического решения. В работе [21] на примере решения нелинейных задач статики мягких оболочек вращения было показано, что результат

использования вычислительного алгоритма зависит от одновременного корректного назначения большого количества параметров алгоритма, т.е. по сути от искусства расчетчика. Поэтому стремление уменьшить неопределенность получения достоверного результата расчета представляется естественным.

В работе [22] был предложен метод автоматического контроля точности решения одномерных линейных краевых задач строительной механики (метод автоматической сегментации). Его высокая эффективность была продемонстрирована на примере решения задач модального анализа тонкостенных конструкций. Однако для решения нелинейных задач механики тонкостенных конструкций данный метод никогда не использовался. Поэтому в настоящей работе предпринята попытка использования метода автоматической сегментации для повышения точности решения нелинейных задач статического деформирования мягких оболочек вращения при больших перемещениях и деформациях.

2. Постановка задачи и алгоритм решения

Система нелинейных уравнений статического деформирования мягких оболочек вращения из высокоэластичных материалов представлена в [23] и включает в себя 4 дифференциальных уравнения и 9 дополнительных алгебраических соотношений. Данная система может быть приведена к системе одномерных нелинейных дифференциальных уравнений, в векторно-матричной форме имеющей вид

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}), \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\boldsymbol{\Psi}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i) = \mathbf{0}, \quad i=1, 2 \quad (2)$$

Здесь \mathbf{y}_i - значения вектора разрешающих переменных \mathbf{y} размерности n , образованного обобщенными усилиями и перемещениями на краях оболочки $x = x_1$, $x = x_2$; \mathbf{q} , \mathbf{q}_i - векторы внешних поверхностных и погонных нагрузок, $\boldsymbol{\mu}$ - вектор параметров задачи, \mathbf{f} - вектор-функция из n компонент правых частей разрешающей системы уравнений, $\boldsymbol{\Psi}_i$ - вектор-функции заданных краевых соотношений.

Для решения задачи (1)-(2) используем метод дифференцирования по параметру [24]. Его соотношения имеют вид совокупности квазилинейной краевой задачи

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_i}{\partial \mathbf{y}_i} \dot{\mathbf{y}}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}, \quad i=1, 2 \quad (4)$$

и нелинейной начальной задачи

$$\frac{d\mathbf{y}_k}{dT} = \dot{\mathbf{y}}_k(\dot{\mathbf{y}}_k, x_k, T), \quad k \in [1, m], \quad (5)$$

где T – параметр продолжения решения задачи [25], $\dot{\mathbf{y}}$, $\dot{\mathbf{q}}$ – производные соответствующих функций \mathbf{y} , \mathbf{q} по указанному параметру, m – число точек дискретизации интервала интегрирования.

Алгоритм решения взаимосвязанных задач (3)-(4) и (5) и его особенности, связанные с реализацией применительно к задачам статики мягких оболочек, представлены в [21]. При этом назначение величин параметров вычислительного алгоритма, при которых становится возможным получение корректного решения задачи, в указанной работе проводится методом перебора. Вместе с тем представляется возможным внести в этот процесс большую определенность при использовании метода автоматической сегментации при решении квазилинейной краевой задачи (3)-(4). Суть метода заключается в проверке выполнения условия ортогональности фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений, определяемых численно на этапе препроцессирования задачи. Сегментация интервала интегрирования выполняется в тех точках, в которых норма произведения фундаментальных матриц отличается от единицы с некоторой заданной вычислителем погрешностью [22].

Рассмотрим результаты использования указанного метода на примере решения ряда задач статического деформирования мягких оболочек вращения.

3. Результаты применения метода автоматической сегментации к решению статических задач деформирования мягких оболочек вращения

3.1. Задача деформирования цилиндрической оболочки, закрепленной на торцах подвижным шарниром

Рассмотрим задачу о раздувании равномерно распределенным по меридиану давлением цилиндра длиной $L_0 = 2R_0$, где R_0 - радиус недеформированного цилиндра, из материала Муни-Ривлина, для которого физические соотношения имеют вид

$$T_1 = 2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^3 \cdot \lambda_2^3} \right) (C_{M1} + C_{M2} \lambda_2^2), \quad 1 \leq 2.$$

Здесь $\lambda_i = 1 + e_i$, T_1, e_1 - меридиональные, T_2, e_2 - окружные усилия и деформации соответственно. Параметры материала примем равными $C_{M1} = 1.097 \cdot C$, $C_{M2} = 0.00784 \cdot C$, где C - некоторая упругая постоянная. Пусть отношение радиуса к толщине недеформированного цилиндра $R_0/h_0 = 100$. Граничные условия обеспечивают возможность свободного перемещения торцев цилиндра по касательной к его меридиану, что приводит к независимости компонент напряженно-деформированного состояния от осевой координаты и позволяет сравнить результаты расчета с аналитическим решением задачи [26].

На рис. 1 показан график, демонстрирующий результаты использования метода автоматической сегментации задачи при допустимой погрешности расчета нормы произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений $\delta = 5\%$. Полученное рекомендуемое число сегментов, на которые следует разбить интервал интегрирования, составляет

$N_{сегм}=17$. Отметим, что интервал интегрирования соответствует половине длины цилиндра, т.к. условия нагружения и закрепления цилиндра симметричны.

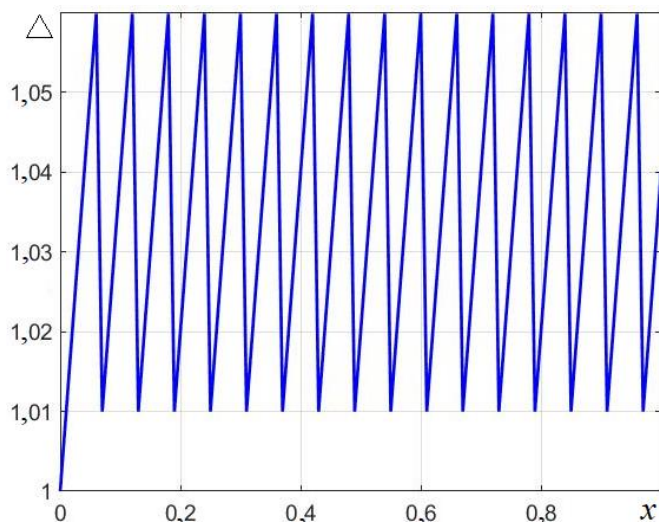


Рис. 1. Зависимость нормы произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений от координаты при выполнении автоматической сегментации интервала интегрирования

Выполним сравнение результатов численного решения задачи с аналитическим на основании типичной для подобных задач характеристики – диаграммы нагружения цилиндра, т.е. зависимости давления p , потребного для раздувания цилиндра до текущей величины радиального перемещения w_0 , от этой величины. Связь безразмерных величин с размерными примем в виде $p = p^*/C$, $w_0 = w_0^*/R_0$, где R_0 – радиус недеформированного цилиндра. Для проведения расчетов выберем следующие варианты сегментации отрезка интегрирования: а) сегментация отсутствует ($N_{сегм}=1$); б) $N_{сегм}=2$; в) $N_{сегм}=10$; г) автоматическая сегментация ($N_{сегм}=17$).

На рис. 2 представлена диаграмма нагружения цилиндра, полученная при расчетах по указанным четырем вариантам сегментации цилиндра за 30 шагов по параметру продолжения решения задачи. Полученные графики визуально неотличимы, за исключением расчета при числе сегментов $N=2$ (максимальная величина радиального перемещения превышает полученную в остальных рассмотренных вариантах сегментации в 3,5 раза).

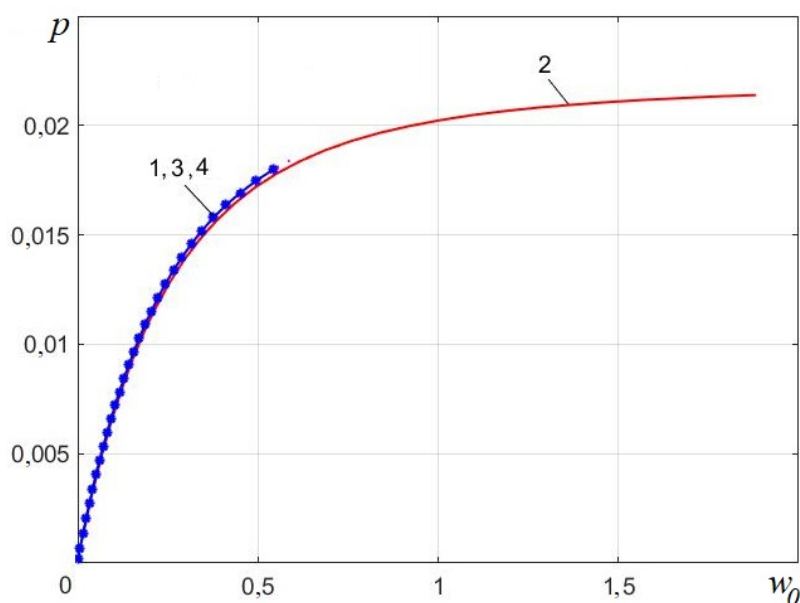


Рис. 2. Диаграмма нагружения цилиндра (1 – $N_{сегм}=1$; 2 – $N_{сегм}=2$; 3 – $N_{сегм}=10$; 4 – автоматическая сегментация)

На рис. 3 представлена зависимость погрешности определения раздувающего оболочку давления от номера шага по параметру продолжения решения задачи для рассмотренных вариантов сегментации.

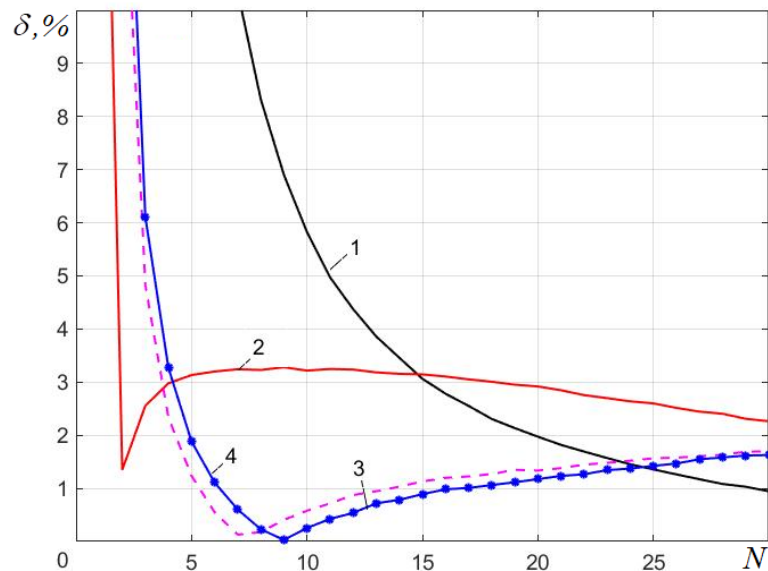


Рис. 3. Зависимость погрешности расчета давления от номера шага по параметру продолжения решения задачи (1 – $N_{сегм}=1$; 2 – $N_{сегм}=2$; 3 – $N_{сегм}=10$; 4 – автоматическая сегментация)

Из графика видно, что наименьшая точность определения диаграммы нагружения на большей части рассматриваемого диапазона нагружения соответствует случаю отсутствия сегментации либо варианту сегментации $N_{сегм}=2$.

Помимо обеспечения необходимой точности решения, важнейшим требованием, предъявляемым к вычислительным алгоритмам, является удовлетворительная скорость сходимости итерационных процессов. На рис. 4 представлена иллюстрация скорости сходимости для рассматриваемых четырех случаев сегментации цилиндра, представляющая собой зависимость величины прогиба цилиндра, полученного на текущем шаге по параметру продолжения решения задачи, от номера этого шага. Наибольшая скорость сходимости соответствует варианту сегментации $N_{сегм}=2$,

случае одна из низших (см.рис.3). Отметим, что при кажущейся незначительной разнице случаев отсутствия сегментации оболочки ($N_{сегм}=1$) и разбиении интервала интегрирования лишь на два сегмента $N_{сегм}=2$ разница в скоростях сходимости принципиальна – в первом случае она существенно ниже (рис. 4).

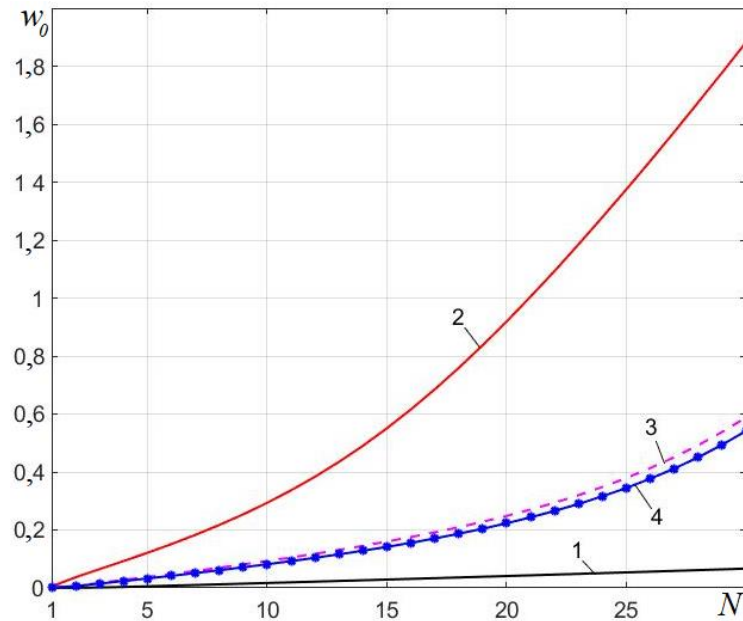


Рис. 4. Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов (1 – $N_{сегм}=1$; 2 – $N_{сегм}=2$; 3 – $N_{сегм}=10$; 4 – автоматическая сегментация)

Судя по графикам рис. 3 и рис. 4, случаи сегментации $N_{сегм}=10$ и автоматической сегментации ($N_{сегм}=17$) приводят к практически одинаковым результатам расчета при одинаковой скорости сходимости шаговых процессов. Однако следует подчеркнуть, что число сегментов $N_{сегм}=10$ было назначено произвольно и при других исходных данных задачи могло привести к иным результатам.

Проиллюстрируем вышесказанное на примере решения задачи раздувания полусферической оболочки.

3.2. Задача деформирования полусферы, закрепленной на экваторе подвижным шарниром

Рассмотрим задачу о раздувании равномерно распределенным по меридиану давлением полусферы из неогукковского материала, закрепленной на экваторе подвижным шарниром. Примем отношение радиуса к толщине недеформированной оболочки $R_0/h_0 = 100$. Аналитическое решение данной задачи представлено в [27].

Отметим, что использование метода автоматической сегментации для сферической оболочки представляется нецелесообразным в связи с тем, что в полюсе такой оболочки матрица Якоби разрешающей системы уравнений имеет сингулярные элементы, что приводит к нарушению выполнения условия ортогональности фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений на достаточно большом участке в окрестности полюса. На рис. 5 представлена зависимость нормы произведения указанных фундаментальных матриц от координаты точки меридиана полусферы. Масштаб графика выбран необходимым для хорошего визуального восприятия результата, т.к. в окрестности полюса в каждой точке меридиана величина Δ многократно превышает единицу, достигая значений порядка десятков. Лишь при значениях координат точек меридиана $x \geq 1.183$ удалось получить величину $\Delta \leq 1.05$ хотя бы в

двух точках подряд. Вследствие этого число сегментов, на которые необходимо разбить меридиан рассматриваемой оболочки, оказалось велико – $N_{сегм} = 132$.

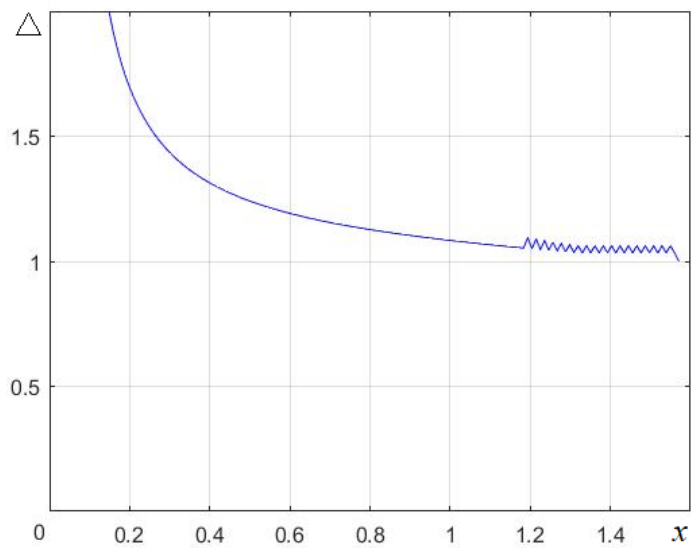


Рис. 5. Зависимость нормы произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений от координаты при выполнении автоматической сегментации интервала интегрирования

Поэтому для данной задачи, помимо вышеописанного варианта сегментации меридиана полусферы, было предложено назначить число сегментов разбиения интервала интегрирования на основании использования метода автоматической сегментации применительно к оболочке вращения, имеющей ту же длину меридиана, параметр тонкостенности и свойства материала, что и рассматриваемая сферическая оболочка, но иной формы меридиана, исключающей появление сингулярных элементов в матрице Якоби системы уравнений, т.е. к цилиндру. Ниже в тексте указанный вариант сегментации назван «сфера как цилиндр». Всего было рассмотрено 6 вариантов сегментации сферической оболочки: а) сегментация

отсутствует; б) $N_{сегм} = 2$; в) $N_{сегм} = 3$; г) $N_{сегм} = 10$; д) «сфера как цилиндр» ($N_{сегм} = 34$);
е) $N_{сегм} = 132$.

В первых двух случаях на первом же шаге по параметру продолжения решения вычисления сопровождались потерей устойчивости счета. Таким образом, использование сегментации является необходимым условием получения решения задачи.

На рис. 6 показана диаграмма нагружения полусферической оболочки, полученная при расчетах по разным вариантам сегментации интервала интегрирования. В случае $N_{сегм} = 10$ после достижения значения прогиба оболочки $w_0 = 1.83R_0$ продолжение решения являлось ошибочным, сопровождаясь уменьшением прогиба.

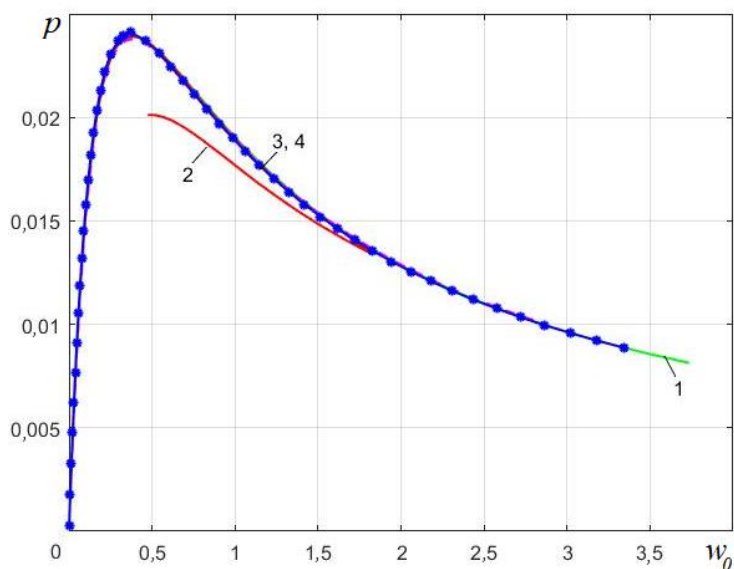


Рис.6. Диаграмма нагружения полусферы, закрепленной подвижным шарниром на экваторе (1 – $N_{сегм} = 3$; 2 – $N_{сегм} = 10$; 3 – «сфера как цилиндр»; 4 – $N_{сегм} = 132$)

На рис. 7 представлена зависимость погрешности определения раздувающего оболочку давления от номера шага по параметру продолжения решения задачи для рассмотренных вариантов сегментации, на рис. 8 – иллюстрация скорости сходимости для рассматриваемых случаев сегментации оболочки, аналогичная представленной на рис. 4.

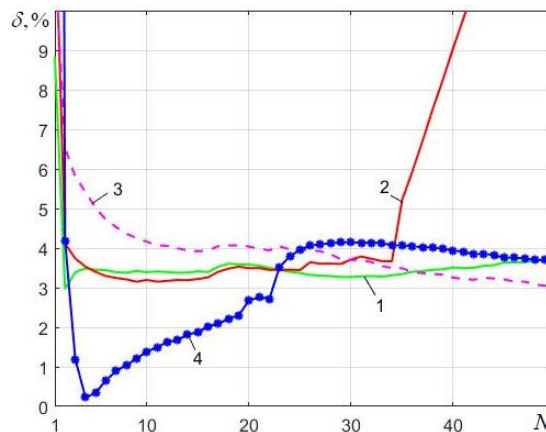


Рис. 7. Зависимость погрешности расчета давления от номера шага по параметру (1 – $N_{сегм}=3$; 2 – $N_{сегм}=10$; 3 – «сфера как цилиндр»; 4 – $N_{сегм}=132$)

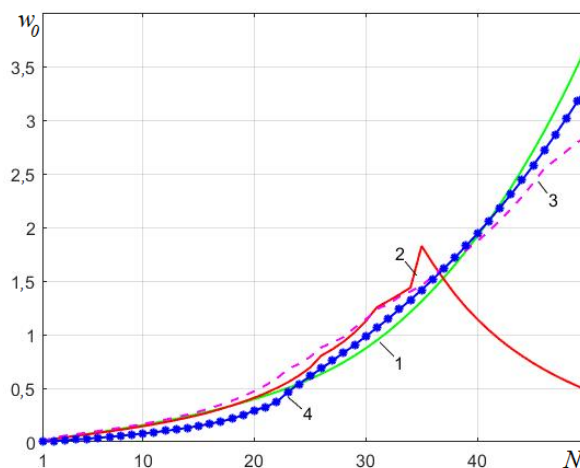


Рис. 8. Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов (1 – $N_{сегм}=3$; 2 – $N_{сегм}=10$; 3 – «сфера как цилиндр»; 4 – $N_{сегм}=132$)

Полученные результаты оказались труднопредсказуемыми. Так, наилучшая точность при наивысшей скорости сходимости соответствуют значению $N_{сегм}=10$ до 35-ого шага по параметру, после которого продолжение решения становится ошибочным. Использование метода автоматической сегментации меридиана полусферы позволяет получить наилучшую точность вычислений среди всех рассмотренных вариантов, но лишь до 23-го шага по параметру.

В случае использования метода автоматической сегментации при замене формы меридиана со сферической на цилиндрическую погрешность вычислений на большей части шагов по параметру оказалась выше, чем в случае произвольного назначения количества сегментов, при несущественно отличающейся скорости сходимости итерационных процессов.

Таким образом, наилучшими с точки зрения оптимального сочетания точности и скорости сходимости оказались результаты расчета при вариантах сегментации оболочки $N_{сегм}=3$ и «сфера как цилиндр», а применение метода автоматической сегментации непосредственно к полусфере не привело к принципиальному улучшению результатов вычислений по сравнению с остальными рассмотренными вариантами.

Исходя из анализа представленных графиков, можно сделать следующие выводы:

- 1) неоднозначность решения задачи может быть обусловлена не только ее нелинейностью, но и свойствами вычислительного алгоритма и некорректным выбором его параметров;
- 2) использование метода автоматической сегментации является желательным для повышения точности решения, для минимизации необоснованных действий вычислителя;
- 3) использование метода автоматической сегментации может являться нецелесообразным при наличии сингулярных коэффициентов в разрешающей системе уравнений на интервале интегрирования. В этом случае, по-видимому, необходима разработка альтернативных рекомендаций по сегментации.

3.3. Задача деформирования полусферы, закрепленной на экваторе неподвижным шарниром

Данная задача выбрана в связи с тем, что у нее отсутствует аналитическое решение, и необходима выработка критериев, на основании которых можно рекомендовать выбор параметров вычислительного алгоритма, а также судить о достоверности получаемых результатов расчета. Геометрические и физические параметры оболочки примем такими же, что и в предыдущей задаче. Рассмотрим те же варианты сегментации оболочки.

В рассматриваемом случае процесс вычислений сопровождался потерей устойчивости счета на первом же шаге по параметру при $N_{сегм} = 2$, $N_{сегм} = 3$ и $N_{сегм} = 34$ (последнее соответствует варианту сегментации «сфера как цилиндр»).

Минимальное число сегментов разбиения меридиана оболочки, при котором удалось получить решение, оказалось $N_{сегм} = 4$.

Диаграмма нагружения оболочки, полученная в случаях сегментации $N_{сегм} = 4$, $N_{сегм} = 10$, $N_{сегм} = 132$, показана на рис. 9. При этом решение сопровождалось потерей устойчивости счета при $N_{сегм} = 4$ на 26-м шаге по параметру продолжения решения, а при $N_{сегм} = 132$ на 83-м шаге.

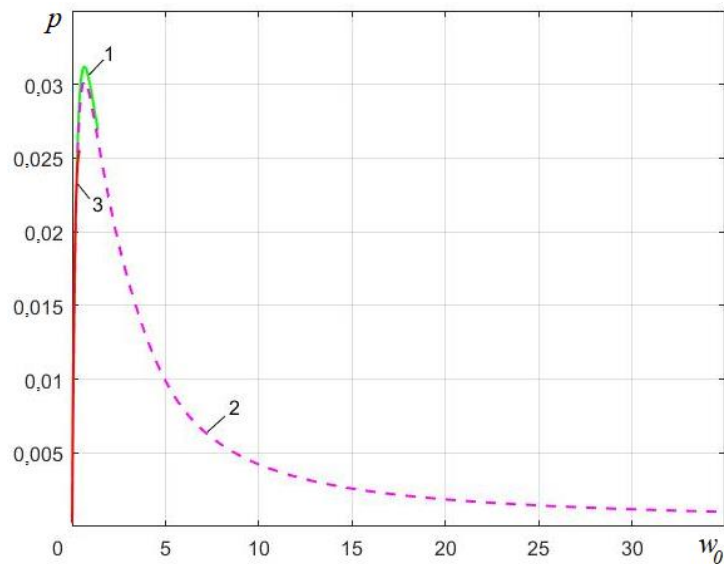


Рис. 9. Диаграмма нагружения полусферы, закрепленной неподвижным шарниром на экваторе (1 – $N_{сегм}=4$; 2 – $N_{сегм}=10$; 3 – $N_{сегм}=132$)

Иллюстрация сходимости итерационных процессов показана на рис. 10.

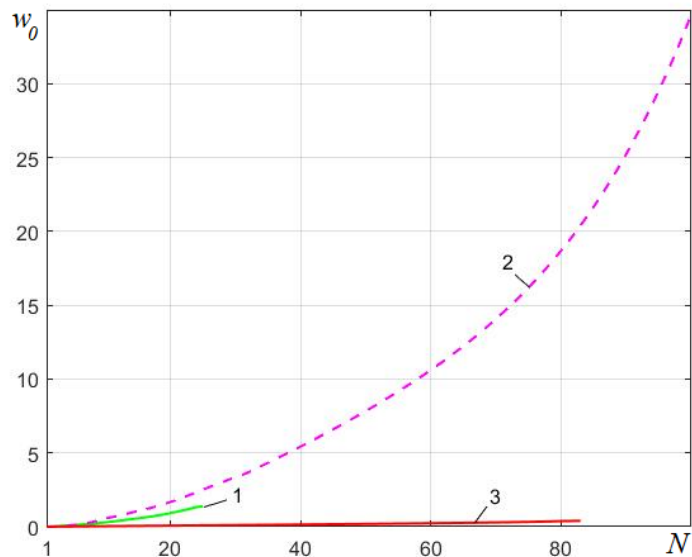


Рис.10. Иллюстрация скорости сходимости итерационных процессов (1 – $N_{сегм}=4$; 2 – $N_{сегм}=10$; 3 – $N_{сегм}=132$)

Из представленных графиков видно, что варианты сегментации меридиана оболочки, аналогичные назначенным в предыдущей задаче, влияют на результат решения иначе. Так, минимальное и максимальное число сегментов не обеспечивают высокой скорости сходимости и позволяют построить решение в достаточно ограниченном диапазоне деформирования оболочки, в то время как вариант сегментации $N_{сегм}=10$ является единственным, позволяющим получить решение во всем рассмотренном диапазоне деформирования.

Однако необходимо подчеркнуть, что аналитическое решение задачи, так же как и численное, полученное в работах других авторов, в данном случае отсутствует, поэтому о корректности представленных результатов можно судить по их близости при назначении различных величин параметров вычислительного алгоритма (в данном случае – числа сегментов на отрезке интегрирования). Тогда

можно заключить, что решение задачи можно считать достоверным по крайней мере до получения точки на диаграмме нагружения, соответствующей значению прогиба полюса оболочки $w_0 = 0.343$ при сравнении всех трех полученных решений, или значению $w_0 = 1.385$ при сравнении решений, соответствующих $N_{сегм}=10$ и $N_{сегм}=132$. При этом с точки зрения обеспечения наивысшей скорости сходимости наилучшим вариантом сегментации меридиана оболочки является $N_{сегм}=10$.

4. Заключение

В работе исследованы возможности применения метода автоматической сегментации для решения нелинейных задач статического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов. Показано, что данный метод может быть рекомендован для минимизации необоснованных действий при назначении параметров вычислительного алгоритма, а также для повышения точности результатов решения задачи и скорости сходимости итерационных процессов. Отмечено, что возможность использования данного метода в задачах, разрешающая система уравнений которых содержит сингулярные коэффициенты в какой-либо точке отрезка интегрирования, требует дополнительного исследования и, по-видимому, применения каких-либо вспомогательных приемов. При этом необходимо подчеркнуть, что успешный результат решения нелинейной задачи зависит от одновременного корректного назначения целого ряда параметров вычислительного алгоритма. Таким образом, для успешной работы по созданию

вычислительных алгоритмов решения нелинейных задач, по-видимому, необходимы:

- 1) формирование базы тестовых задач для максимально полного исследования свойств алгоритма;
- 2) разработка методики проведения вычислительного эксперимента по внедрению алгоритма в расчетную практику, предполагающую решение задач с произвольной нелинейностью.

Список источников

1. Трямкин А.В., Емельянов Ю.Н. Математическая модель процесса торможения объекта десантирования парашютно-реактивной системой // Труды МАИ. 2000. № 1. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=34731>
2. Трямкин А.В., Скиданов С.Н. Исследование процесса наполнения парашютных систем // Труды МАИ. 2001. № 3. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=34686>
3. Чуркин В.М., Попов Д.А., Серпичева Е.В. Анализ колебаний парашютных систем, вызванных пульсацией купола // Труды МАИ. 2002. № 7. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=34618>
4. Чуркин В.М. Вынужденные колебания парашютной системы с упругими стропами // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=63004>
5. Рахматулин Х.А. Теория осесимметричного парашюта // Труды института механики МГУ. 1975. № 35. Ч. 1. С. 3-35.

6. Гимадиев Р.Ш. Некоторые результаты численного исследования статики и динамики мягких оболочек // Сборник докладов НТК НИИ автоматических устройств. 1981. № 7. С. 34-39.
7. Магула В.Э. Судовые эластичные конструкции. – Л.: Судостроение, 1978. – 263 с.
8. Друзь Б.И., Друзь И.Б. Теория мягких оболочек. – Владивосток: Изд-во МГУ, 2003. – 381 с.
9. Ермолов В.В. Воздухоопорные здания и сооружения. – М.: Стройиздат, 1980. – 304 с.
10. Ким А.Ю. Итерационный метод приращений параметров для расчета нелинейных мембранно-пневматических систем с учетом упругой работы воздуха: Дисс. ... д.т.наук. – Волгоград: ВолгГАСУ, 2005. – 568 с.
11. Zubov L.M., Sheidakov D.N. Instability of a hollow elastic cylinder under tension, torsion and inflation // Journal of Applied Mechanics, 2008, vol. 75, pp. 0110021-0110026. URL: <https://doi.org/10.1115/1.2723824>
12. Fu Y.B., Pearce S.P., Liu K.K. Post-bifurcation analysis of a thin-walled hyperelastic tube under inflation // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2008, vol. 43, pp. 697-706. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003>
13. Aranda-Iglesias D., Vadillo G., Rodríguez-Martínez J.A. Oscillatory behaviour of compressible hyperelastic shells subjected to dynamic inflation: a numerical study // Acta Mechanica, 2017, vol. 228, pp. 2187-2205. URL: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1821-8>

14. Verron E., Khayat R., Derdouri S., Peseux B. Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes // Journal of Rheology, 1999, vol. 43, pp. 1083-1097. DOI:[10.1122/1.551017](https://doi.org/10.1122/1.551017)
15. Zhao Zh., Zhang W., Zhang H., Yuan X. Some interesting nonlinear dynamic behaviors of hyperelastic spherical membranes subjected to dynamic loads // Acta Mechanica, 2019, vol. 230, pp. 3003-3018. URL: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02467-y>
16. Beatty M.F. Small amplitude radial oscillations of an incompressible, isotropic elastic spherical shell // Mathematics and Mechanics of Solids, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 492-512. URL: <https://doi.org/10.1177/1081286510387407>
17. Jiusheng R. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyper-elastic spherical shells // International Journal of Engineering Science, 2009, vol. 47, pp. 745-753. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.02.001>
18. Полякова Е.В., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Осесимметричная деформация мягкой армированной нитями тороидальной оболочки // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 131-142.
19. Papargyri-Pegiou S., Stavrakakis E. Axisymmetric numerical solutions of a thin-walled pressurized torus of incompressible nonlinear elastic materials // Computers and Structures, 2000, vol. 77, pp. 747-757. URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00021-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00021-3)
20. Колесников А.М. Большие деформации высокоэластичных оболочек: Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Ростов-на-Дону: РГУ, 2006. – 115 с.

21. Коровайцева Е.А. О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=118881>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-04](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-04)
22. Коровайцев А.В., Коровайцева Е.А., Ломовской В.А. Решение прикладных одномерных линейных краевых задач с автоматической точностью // Вестник МИТХТ. 2012. Т. 7. № 6. С. 41–45.
23. Усюкин В.И. Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 1. С. 70-75.
24. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Доклады АН СССР. 1953. Т. 88, № 4. С. 601-602.
25. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. – М.: Наука, 1988. – 231 с.
26. Shahinpoor M., Balakrishnan R. Large amplitude oscillations of thick hyperelastic cylindrical shells // International Journal of Non-Linear Mechanics, 1978, vol. 13, pp. 295–301. URL: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(78\)90035-5](https://doi.org/10.1016/0020-7462(78)90035-5)
27. Green A.E., Adkins J.E. Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics, Oxford, Clarendon Press, 1960, 348 p.

References

1. Tryamkin A.V., Emel'yanov Yu.N. *Trudy MAI*, 2000, no. 1. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=34731>

2. Tryamkin A.V., Skidanov S.N. *Trudy MAI*, 2001, no. 3. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=34686>
3. Churkin V.M., Popov D.A., Serpicheva E.V. *Trudy MAI*, 2002, no. 7. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=34618>
4. Churkin V.M. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=63004>
5. Rakhmatulin Kh.A. *Trudy instituta mekhaniki MGU*, 1975, no. 35, vol. 1, pp. 3-35.
6. Gimadiev R.Sh. *Cbornik dokladov NTK NII avtomaticheskikh ustroystv*, 1981, no. 7, pp. 34-39.
7. Magula V.E. *Sudovye elastichnye konstruksii* (Ship Elastic Structures), Leningrad, Sudostroenie, 1978, 263 p.
8. Druz' B.I., Druz' I.B. *Teoriya myagkikh obolochek* (Theory of Soft Shells), Vladivostok: Izd-vo MGU, 2003, 381 p.
9. Ermolov V.V. *Vozdukhoopornye zdaniya i sooruzheniya*. (Air-supported Buildings and Structures), Moscow, Stroiizdat, 1980, 304 p.
10. Kim A.Yu. *Iteratsionnyi metod prirashchenii parametrov dlya rascheta nelineinykh membranno-pnevmaticheskikh sistem s uchetom uprugoi raboty vozdukha* (Iterative Method of Parameter Increment for Calculation of Nonlinear Membrane Pneumatic Systems Taking into Account Air Elastic Influence), Doctor's thesis, Saratov, SGAU, 2005, 568 p.

11. Zubov L.M., Sheidakov D.N. Instability of a hollow elastic cylinder under tension, torsion and inflation, *Journal of Applied Mechanics*, 2008, vol. 75, pp. 0110021-0110026. URL: <https://doi.org/10.1115/1.2723824>
12. Fu Y.B., Pearce S.P., Liu K.K. Post-bifurcation analysis of a thin-walled hyperelastic tube under inflation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, pp. 697-706. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003>
13. Aranda-Iglesias D., Vadillo G., Rodríguez-Martínez J.A. Oscillatory behaviour of compressible hyperelastic shells subjected to dynamic inflation: a numerical study, *Acta Mechanica*, 2017, vol. 228, pp. 2187-2205. URL: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1821-8>
14. Verron E., Khayat R., Derdouri S., Peseux B. Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes, *Journal of Rheology*, 1999, vol. 43, pp. 1083-1097. DOI:[10.1122/1.551017](https://doi.org/10.1122/1.551017)
15. Zhao Zh., Zhang W., Zhang H., Yuan X. Some interesting nonlinear dynamic behaviors of hyperelastic spherical membranes subjected to dynamic loads, *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, pp. 3003-3018. URL: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02467-y>
16. Beatty M.F. Small amplitude radial oscillations of an incompressible, isotropic elastic spherical shell, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 492-512. URL: <https://doi.org/10.1177/1081286510387407>

17. Jiusheng R. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyperelastic spherical shells, *International Journal of Engineering Science*, 2009, vol. 47, pp. 745-753. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.02.001>
18. Polyakova E.V., Tovstik P.E., Filippov S.B. Osesimmetrichnaya deformatsiya myagkoi armirovannoi nityami toroidal'noi obolochki, *Vestnik SPbGU. Ser. 1*. 2011, no. 3, pp. 131-142.
19. Papargyri-Pegiou S., Stavrakakis E. Axisymmetric numerical solutions of a thin-walled pressurized torus of incompressible nonlinear elastic materials, *Computers and Structures*, 2000, vol. 77, pp. 747-757. URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00021-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00021-3)
20. Kolesnikov A.M. *Bol'shie deformatsii vysokoelastichnykh obolochek* (Large Deformations of hyperelastic shells), Candidate's thesis, Rostov-na-Donu, RGU, 2006, 115 p.
21. Korovaitseva E.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=118881>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-04](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-04)
22. Korovaitsev A.V., Korovaitseva E.A., Lomovskoi V.A. *Vestnik MITKhT*, 2012, vol. 7, no. 6, pp. 41-45.
23. Usyukin V.I. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1976, no/ 1, pp. 70-75.
24. Davidenko D.F. *Doklady AN SSSR*, 1953, vol. 88, no. 4, pp. 601-602.
25. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineinogo deformirovaniya* (Problems of Nonlinear Deforming: Parameter Continuation Method in Nonlinear Problems of Mechanics of Deformed Solid), Moscow, Nauka, 1988, 231 p.

26. Shahinpoor M., Balakrishnan R. Large amplitude oscillations of thick hyperelastic cylindrical shells, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1978, vol. 13, pp. 295–301. URL: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(78\)90035-5](https://doi.org/10.1016/0020-7462(78)90035-5)
27. Green A.E., Adkins J.E. *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*, Oxford, Clarendon Press, 1960, 348 p.

Статья поступила в редакцию 11.10.2021; одобрена после рецензирования 24.10.2021; принята к публикации 21.12.2021

The article was submitted on 11.10.2021; approved after reviewing on 24.10.2021; accepted for publication on 21.12.2021.