УДК 536.24

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В РАЗЛАГАЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛАХ

НЕНАРОКОМОВ Алексей Владимирович – Московский авиационный институт (государственный технический университет), профессор, д.т.н.
Тел.: (499) 158-4790; e-mail: nenar@cosmos.com.ru

Alexey V. NENAROKOMOV – Moscow Aviation Institute (State Technical University), professor, doctor
Тел.: (499) 158-4790; e-mail: nenar@cosmos.com.ru

НЕТЕЛЕВ Андрей Викторович – Московский авиационный институт (государственный технический университет), ассистент
e-mail: netelev@cosmos.com.ru

Andrey V. NETELEV – Moscow Aviation Institute (State Technical University), assistant
e-mail: netelev@cosmos.com.ru

Данная работа посвящена алгоритму идентификации тепловых характеристик разлагающихся теплозащитных материалов. Решением обратной задачи является вектор, содержащий семь нестационарных коэффициентов (теплоемкость, теплопроводность, теплоемкость фильтрующегося газа, тепловой эффект разложения, параметры уравнения арениусовского типа: показатель реакции, предэкспоненциальный фактор, энергия активации). Устойчивость решения обратной задачи достигается применением в алгоритме метода итерационной регуляризации. Итерационный процесс для вектора искомых параметров базируется на методе градиентной минимизации:

$$u^s = u^{s-1} + \gamma^s g^s, s = 1,\dots,s^*,$$

где u – вектор неизвестных функций; s – номер итерации; γ *– шаг спуска; g – глубина спуска.*

In this work present algorithm of identification thermal characteristics destruction heat-shielding materials, based on methodology of inverse problems. At the decision inverse problem the vector of required characteristics consisting from 7 none-linear depending from temperature component (heat capacity, thermal conductivity, heat capacity of filtered gas, heat effect decomposition, and parameter of the Arenius equation is defined: sedate parameter, before exhibitor factor and energy of activation). Stability of the decision inverse problem is reached by application in algorithm of a method iterative regularization. Iterative process for a vector of required parameters is based formula gradient methods of optimization:

$$u^s = u^{s-1} + \gamma^s g^s, s = 1,\dots,s^*$$

Where u – vector of unknown functions, s – number of iteration, γ *– descent step, g – increment of unknown functions.*

Ключевые слова: обратная задача, идентификация, термодеструкция, регуляризация.

Key words: inverse problem, identification, thermal destruction, regularization.

Введение

В настоящее время для решения различных обратных задач теплообмена предложен и используется в практике тепловых исследований целый ряд методов, способов и вычислительных алгоритмов. Их описанию и анализу вычислительной эффективности посвящено достаточно много работ, включая монографии и большое количество оригинальных статей. При этом основная масса полученных результатов относится к обратным задачам теплопроводности по восстановлению граничных условий и коэффициентов уравнений.

Постановку обратных задач, в отличии от прямых, нельзя воспроизвести в реальном эксперименте, т.е. нарушить причинно-следственную связь не математическим а физическим путем. В этом смысле обратные задачи не соответствуют физически реализуемым событиям. Нельзя обратить ход теплообменного процесса и тем изменить течение времени. Таким образом, можно условно говорить о физической некорректности постановки обратной задачи. При математической формализации она проявляется уже как математическая некорректность (неустойчивое решение), и обратные задачи представляют собой типичный пример некорректно поставленных задач в теории теплообмена. Для приближенного решения таких задач широко используются регуляризационные методы.

Все многообразие методов регуляризации можно разбить на две группы: методы «естественной» регуляризации и регуляризации по Тихонову. Первая группа методов основана на решении анализируемой обратной задачи в её исходной постановке, причем на неизвестные характеристики не накладываются какие-либо условия их принадлежности к определенному классу решений. Методы данной группы имеют ограниченное применение. В регуляризующих методах обеспечивается принадлежность искомых характеристик некоторому компактному множеству, которое получается в процессе решения задачи либо задается заранее. Такие методы применимы к широкому кругу некорректных задач. В основе этих методов лежит фундаментальное понятие регуляризирующего оператора, применение которого позволяет получить устойчивое приближенное решение анализируемой задачи. Для построения регуляризирующих операторов и алгоритмов используются различные принципы. Одним из наиболее общих методов решения некорректных задач является метод А.Н. Тихонова [1], основанный на введение в рассмотрение стабилизирующего функционала. В данной работе предлагается регуляризирующий алгоритм решения коэффициентной обратной задачи теплообмена при наличии термодеструкции на основе метода итерационной регуляризации, показавший высокую эффективность в практике решения различных обратных задач теплообмена.

Существует достаточно большое количество работ, посвященных математическому моделированию процесса термодеструкции в материале. В работах О.Ф.Шленского [2] для описания математической модели терморазложения одностадийной гомогенной химической реакции используется уравнение арениусовского типа:

$$m = m_0^n \exp\left[-k\tau\right], \qquad (1)$$

где n — порядок реакции; $m = \dfrac{M}{M_0}$ — относительная масса образца; M — масса образца на текущий момент времени; M_0 — масса образца до начала разложения; m_0 — постоянная интегрирования, определяемая начальным условием ; $m\big|_{\tau=0} = m_0$ — скорость реакции при данной температуре;

$$k = k_0 \exp\left[-E/RT\right], \qquad (2)$$

где k_0 — предэкспоненциальный множитель; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная. При этом параметры E и k_0 определяются из условия наилучшего описания экспериментальных данных зависимостью (1). В связи с этим зависимость (1) адекватно описывает процесс разложения на ограниченном участке, который определен выбором параметров E и k_0.

Также процесс термического разложения рассматривается в работах В.М. Юдина [3]. Процесс термодеструкции описывается уравнением

$$\frac{d\rho}{d\tau} = A\left(\rho_0 - \rho_g\right)^n \exp\left[\frac{-E}{RT}\right], \qquad (3)$$

где A — предэкспоненциальный множитель; ρ_g — гравиметрическая плотность материала, полученная путем нагрева материала до прекращения процесса разложения при стационарной температуре T.

В монографии Ю.В. Полежаева и Ф.Б. Юревича [4] используется модель термического разложения материалов следующего вида:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = A\rho^n \exp\left[\frac{-E}{RT}\right]. \qquad (4)$$

В данной работе анализируется одномерная нестационарная математическая модель теплопереноса в разлагающемся материале [5]:

$$C_l\left(T(\tau,x)\right)\rho\frac{dT(\tau,x)}{d\tau} = \frac{d}{dx}\left(\lambda_l\left(T(\tau,x)\right)\frac{dT(\tau,x)}{dx}\right) + C_{g,l}\left(T(\tau,x)\right)\int_{l_0}^{x}\frac{d\rho_l(x,\tau)}{d\tau}d\xi\,\frac{dT(\tau,x)}{dx} + H_l\left(T(\tau,x)\right)\frac{d\rho_l(x,\tau)}{d\tau}; \qquad (5)$$

$$(x,\tau) \in Q = \left(0, X_L\right)\times\left(0,\tau_m\right], l = \overline{1,L};$$

$$T(0,x) = T_0(x),\ X_{l-1} < x < X_l,\ l = \overline{1,L};$$

$$-\alpha_1\lambda_1\left(T(0,\tau)\right)\frac{dT(0,\tau)}{dx} + \beta_1 T(0,\tau) = q_1\left(T(0,\tau),\tau\right); \qquad (6)$$

$$\lambda_l\left(T_l\left(X_l,\tau\right)\right)\frac{\partial T_l\left(X_l,\tau\right)}{\partial x} = \lambda_{l+1}\left(T_{l+1}\left(X_l,\tau\right)\right)\frac{\partial T_{l+1}\left(X_l,\tau\right)}{\partial x},\quad l = \overline{1,L-1}; \qquad (7)$$

$$T_l\left(X_l,\tau\right)=T_{l+1}\left(X_l,\tau\right),\ l=\overline{1,L-1}\,; \tag{8}$$

$$-\alpha_2\lambda_L\left(T\left(X_L,\tau\right)\right)\frac{dT\left(X_L,\tau\right)}{dx}+\beta_2 T\left(X_L,\tau\right)=$$
$$=q_2\left(T\left(X_L,\tau\right),\tau\right). \tag{9}$$

Кинетика разложения материала описывается задачей Коши, ядром которой является дифференциальное уравнение арениусовского типа:

$$\rho_l\left(x,\tau_r\right)=\rho_{0,l}\,; \tag{10}$$

$$\rho_l\left(x,\tau_c\right)=\rho_{c,l}\,; \tag{11}$$

$$\frac{d\rho_l\left(x,\tau\right)}{d\tau}=\begin{cases}0, T\left(x,\tau\right)<T_{r,l};\\ -\rho_l^{n_l}A_l\left(T\right)\exp\left(\dfrac{-E_l\left(T\left(x,\tau\right)\right)}{RT\left(x,\tau\right)}\right);\\ 0,\rho_l\left(x,\tau\right)\le\rho_{c,l};\end{cases}$$
$$\rho_l\left(x,\tau\right)>\rho_{c,l}, T\left(x,\tau\right)\ge T_{r,l}; \tag{12}$$

коэффициенты C_l, λ_l, $C_{g,l}$, H_l, A_l, E_l, $l=\overline{1,L}$, являются функциями температуры, а величины q_1 и q_2 зависят от времени.

Алгоритм решения обратной задачи

В данной работе представлен алгоритм решения коэффициентной обратной задачи теплопереноса в разлагающемся материале. Основным отличием данного алгоритма является возможность определения из одного эксперимента одновременно коэффициентов: теплоемкости, теплопроводности, теплоемкости образующегося газа, теплового эффекта разложения, а так же коэффициентов уравнения арениусовского типа: энергии активации, предэкспоненциального коэффициента и показателя реакции.

Для решения обратной задачи необходима некоторая дополнительная информация, в рассматриваемом случае – это данные измерений температуры в некоторых точках $X_m, m=\overline{1,M}$, области $Q=\left(0,X_L\right)\times\left(0,\tau_m\right]$:

$$T_{\text{эксп}}\left(X_m,\tau\right)=f_m\left(\tau\right),\ m=\overline{1,M}\,, \tag{13}$$

где X_m – координата m- й точки, в которой производится измерение температуры.

Для построения эффективного численного алгоритма в точках установки термопар вводятся дополнительные фиктивные слои, а в математической модели (5)-(12) добавляются дополнительные условия идеального контакта между слоями. Тогда исходная модель (5)-(12) примет вид

$$C_l\left(T\left(\tau,x\right)\right)\frac{dT\left(\tau,x\right)}{d\tau}=\frac{d}{dx}\left(\lambda_l\left(T\left(\tau,x\right)\right)\frac{dT\left(\tau,x\right)}{dx}\right)+$$
$$+C_{g,l}\left(T\left(\tau,x\right)\right)\int\limits_{l_0}^{x}\frac{d\rho_l\left(x,\tau\right)}{d\tau}d\xi\frac{dT\left(\tau,x\right)}{dx}+$$
$$+H_l\left(T\left(\tau,x\right)\right)\frac{d\rho_l\left(x,\tau\right)}{d\tau}; \tag{14}$$

$$X_{l,m-1}<x<X_{l,m},\ 0\le\tau\le\tau_{\max},\ m=\overline{1,M_l+1},\ l=\overline{1,L};$$
$$X_{l,0}=X_{l-1}, X_{l,M_l+1}=X_l;$$

$$T\left(0,x\right)=T_0\left(x\right),\ X_{l,m-1}<x<X_{l,m},\ i=\overline{1,M_l+1},\ l=\overline{1,L}; \tag{15}$$

$$-\alpha_1\lambda_1\left(T\left(0,\tau\right)\right)\frac{dT\left(0,\tau\right)}{dx}+\beta_1 T\left(0,\tau\right)=$$
$$=q_1\left(T\left(0,\tau\right),\tau\right); \tag{16}$$

$$\frac{\partial T_{l,m}\left(x_{l,m},\tau\right)}{\partial x}=\frac{\partial T_{l,m+1}\left(x_{l,m},\tau\right)}{\partial x},$$
$$m=\overline{1,M_l},\ l=\overline{1,L}; \tag{17}$$

$$T_{l,m}\left(x_{l,m},\tau\right)=T_{l,m+1}\left(x_{l,m},\tau\right),\ m=\overline{1,M_l},\ l=\overline{1,L}; \tag{18}$$

$$\lambda_l\left(T_{l,M_l+1}\left(X_l,\tau\right)\right)\frac{\partial T_{l,M_l+1}\left(X_l,\tau\right)}{\partial x}=$$
$$=\lambda_{l+1}\left(T_{l+1,1}\left(X_l,\tau\right)\right)\frac{\partial T_{l+1,1}\left(X_l,\tau\right)}{\partial x},\ l=\overline{1,L-1}; \tag{19}$$

$$T_{l,M_1+1}\left(X_l,\tau\right)=T_{l+1,1}\left(X_l,\tau\right); \tag{20}$$

$$-\alpha_2\lambda_L\left(T\left(X_L,\tau\right)\right)\frac{dT\left(X_L,\tau\right)}{dx}+\beta_2 T\left(X_L,\tau\right)=$$
$$=q_2\left(T\left(X_L,\tau\right),\tau\right); \tag{21}$$

$$\rho_{l,m}\left(x,\tau_r\right)=\rho_{0,l}, m=\overline{1,M_l+1},\ l=\overline{1,L}\,; \tag{22}$$

$$\rho_{l,m}\left(x,\tau_c\right)=\rho_{c,l}, m=\overline{1,M_l+1},\ l=\overline{1,L}\,; \tag{23}$$

$$\frac{d\rho_l(x,\tau)}{d\tau}=\begin{cases}0, T(x,\tau)<T_{r,l};\\ -\rho_l^{n_l}A_l(T)\exp\left(\dfrac{-E_l(T(x,\tau))}{RT(x,\tau)}\right);\\ 0, \rho_l(x,\tau)\le\rho_{c,l};\end{cases}$$
$$\rho_l(x,\tau)>\rho_{c,l}, T(x,\tau)\ge T_{r,l}; \tag{24}$$

$$\rho_{l,M_l+1}(x,\tau_c)=\rho_{l+1,1}(x,\tau_c),\ l=\overline{1,L}; \tag{25}$$

Решение системы уравнений (14)-(25) ищется посредством минимизации целевого функционала невязки [6], характеризующего среднеквадратичное уклонение рассчитанных температур в точках установки термодатчиков от экспериментально измеренных значений:

$$J=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}\int_0^{\tau_m}\chi_{m,l}(\tau)\left[T(x_{m,l},\tau)-f_{m,l}(\tau)\right]^2 d\tau. \tag{26}$$

Минимизация функционала осуществляется градиентным методом минимизации первого порядка-методом сопряженных градиентов:

$$u^{s+1}=u^s-\gamma_s\overline{g}^s,\ s=0,1,\dots,s^*, \tag{27}$$

где s – номер итерации; γ_s – глубина спуска, выбираемая из условия

$$\gamma_s=Arg\min_{\gamma>0}J\left(u^s-\gamma\overline{g}^s\right), \tag{28}$$

$\overline{g}^s$ – направление спуска, характеризующее используемый метод минимизации; u^0 – задаваемое априорно начальное приближение; s^* – номер последней итерации, определяемый в процессе решения задачи из регуляризирующего условия останова, осуществляемого в соответствии с принципом обобщенной невязки:

$$s^*: J\left(u^{s^*}\right)\cong\delta, \tag{29}$$

где s – параметр, зависящий от точности входных и измеренных данных.

Параметр спуска выбирается на каждой s-й итерации из решения задачи минимизации функции одной переменной

$$\gamma_s=Arg\min_{\gamma}J\left(u^s-\gamma\overline{g}^s\right) \tag{30}$$

Для решения уравнения (30) используется линейная оценка параметра спуска. При таком подходе для вычисления параметра γ можно получить приближенную аналитическую форму:

$$\gamma_s=$$
$$=-\frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}\int_0^{\tau_{\max}}\chi_{l,m}(\tau)\left[T_{l,m}\left(X_{l,m},\tau,u^{(s)}\right)-f_{l,m}(\tau)\right]\Delta T_{l,m}\left(X_{l,m},\tau,\overline{g}^s\right)d\tau}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}\int_0^{\tau_{\max}}\chi_{l,m}(\tau)\left[\Delta T_{l,m}\left(X_{l,m},\tau,\overline{g}^s\right)\right]^2 d\tau}, \tag{31}$$

где приращение температуры $\Delta T_{l,m}(x,\tau)$ определяется из решения краевой задачи для приращения температуры, в которой приращение искомых параметров $\Delta u_i(T)$, $i=1,2,\dots,7$, вычисляется по формуле, $\chi_{m,l}(\tau)$, $m=\overline{1,M_l}$, $l=\overline{1,L}$, – веса, отражающие достоверность экспериментальных данных.

Такое соотношение позволяет для определения параметра спуска всего один раз решить краевую задачу для вариации температуры, чтобы вычислить поле приращения температур $\Delta T_{l,m}(x,\tau)$:

$$\rho_{l,m}C_l\frac{d\Delta T_{l,m}}{d\tau}=+\frac{d}{dx}\left(\lambda_l\frac{d\Delta T_{l,m}}{dx}\right)+$$
$$+\left(\frac{d\lambda_l}{dT}\frac{dT_{l,m}}{dx}+C_{g,l}\int_{l_0}^{x}\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}d\xi\right)\frac{d\Delta T_{l,m}}{dx}+$$
$$+\left(\frac{d^2\lambda_l}{dT^2}\left(\frac{dT_{l,m}}{dx}\right)^2+\frac{d\lambda_l}{dT}\frac{d^2T_{l,m}}{dx^2}+\frac{dH_l}{dT}\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{dC_{g,l}}{dT}\int_{l_0}^{x}\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}d\xi\frac{dT_{l,m}}{dx}-\rho_{l,m}\frac{dC_l}{dT}\frac{dT_{l,m}}{d\tau}\right)\Delta T_{l,m}$$
$$+C_{g,l}\int_{l_0}^{x}\frac{d\theta_{l,m}}{d\tau}d\xi\frac{dT_{l,m}}{dx}+H_l\frac{d\theta_{l,m}}{d\tau}-\theta_{l,m}C_l\frac{dT_{l,m}}{d\tau}+\beta_jR_i^j, \tag{32}$$

$$X_{l,m-1}<x<X_{l,m},\ 0<\tau\le\tau_{\max},\ m=\overline{1,M_l+1},\ l=\overline{1,L},$$

$$\Delta T(0,x)=0,\ X_{l,m-1}\le x\le X_{l,m},$$
$$m=\overline{1,M_l+1},\ l=\overline{1,L}; \tag{33}$$

$$-\alpha_1\left(\lambda_1(T(0,\tau))\frac{d\Delta T(0,\tau)}{dx}+\right.$$
$$\left.+\frac{dT(0,\tau)}{dx}\frac{d\lambda_1(T(0,\tau))}{dT}\Delta T(0,\tau)+\beta\Theta_j\right)$$
$$+\beta_1\Delta T(0,\tau)=0; \tag{34}$$

$$\frac{\partial \Delta T_{l,m}\left(x_{l,m},\tau\right)}{\partial x}=\frac{\partial \Delta T_{l,m+1}\left(x_{l,m},\tau\right)}{\partial x}, \quad m=\overline{1,M_l},\ l=\overline{1,L}; \tag{35}$$

$$\Delta T_{l,m}\left(x_{l,m},\tau\right)=\Delta T_{l,m+1}\left(x_{l,m+1},\tau\right), \quad m=\overline{1,M_l},\ l=\overline{1,L}; \tag{36}$$

$$\frac{d\theta_{l,m}}{d\tau}=\begin{cases}0, T_{l,m}\le T_{r,l}\\ \left[\frac{\partial F}{\partial \rho}\theta_{l,m}+\frac{\partial F}{\partial T}\Delta T_{l,m}+\beta_j U_i^j\right],\\ 0, \rho_{l,m}\le \rho_{c,l}\end{cases} \quad \rho_{l,m}>\rho_{c,l}, T_{l,m}>T_{r,l}; \tag{37}$$

$$-\alpha_2\left(\lambda_L\left(T\left(X_L,\tau\right)\right)\frac{d\Delta T\left(X_L,\tau\right)}{dx}+\frac{dT\left(X_L,\tau\right)}{dx}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d\lambda_L\left(T\left(X_L,\tau\right)\right)}{dT}\Delta T\left(X_L,\tau\right)+\beta\Omega_j\right)+$$
$$+\beta_2\Delta T\left(X_L,\tau\right)=0, \tag{38}$$

где

$$R_i^1=-\rho_{l,m}\frac{dT_{l,m}}{d\tau}\sum_{i=1}^{m_1}J'_{C_l,i}\varphi_{C_l,i}\left(T\right);$$

$$R_i^2=\frac{d^2T_{l,m}}{dx^2}\sum_{i=1}^{m_2}J'_{\lambda_l,i}\varphi_{\lambda_l,i}\left(T\right)+\left(\frac{dT_{l,m}}{dx}\right)^2\sum_{i=1}^{m_2}J'_{\lambda_l,i}\frac{d\varphi_{\lambda_l,i}\left(T\right)}{dT};$$

$$R_i^3=\frac{dT_{l,m}}{dx}\int_{l_0}^{x}\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}d\xi\sum_{i=1}^{m_3}J'_{C_{g,l},i}\varphi_{C_{g,l},i}\left(T\right);$$

$$R_i^4=\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}\sum_{i=1}^{m_4}J'_{H_l,i}\varphi_{H_l,i}\left(T\right);$$

$$R_i^5=0; R_i^6=0; R_i^7=0;$$

$$U_i^1=0; U_i^2=0; U_i^3=0; U_i^4=0;$$

$$U_i^1=0; U_i^2=0; U_i^3=0; U_i^4=0;$$

$$U_i^5=\frac{\partial F}{\partial E}\sum_{i=1}^{m_5}J'_{E_l,i}\varphi_{E_l,i}\left(T\right);\ U_i^6=\frac{\partial F}{\partial A}\sum_{i=1}^{m_6}J'_{A_l,i}\varphi_{A_l,i}\left(T\right);$$

$$U_i^7=\frac{\partial F}{\partial n}J'_{n_l};$$

$$\Theta_1=0;\Theta_3=0;\Theta_4=0;\Theta_5=0;\Theta_6=0;\Theta_7=0;$$

$$\Theta_2=\frac{dT_{1,1}\left(0,\tau\right)}{dx}\sum_{i=1}^{m_2}J'_{\lambda_1,i}\varphi_{\lambda_1,i}\left(T\left(0,\tau\right)\right);$$

$$\Omega_1=0;\Omega_3=0;\Omega_4=0;\Omega_5=0;\Omega_6=0;\Omega_7=0;$$

$$\Omega_2=\frac{dT_{L,M_L}\left(X_L,\tau\right)}{dx}\sum_{i=1}^{m_2}J'_{\lambda_L,i}\varphi_{\lambda_L,i}\left(T\left(X_L,\tau\right)\right).$$

Направление спуска выбирается исходя из соотношения

$$\overline{g}^s=-\overline{J'}^s+\beta^s\overline{g}^{s-1}, \tag{39}$$

где параметр β^s вычисляется по формуле

$$\beta^s=\frac{\left(\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_L}J'\left(u^s\right)-J'\left(u^{s-1}\right)\right)}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_L}\left(J'\left(u^{s-1}\right)\right)^2}; \tag{40}$$

$\overline{J'}^s$ – вектор градиента функционала невязки на s-й итерации, компоненты которого вычисляются по формулам

$$J'_{C_l^k}=-\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}\int_0^{\tau_m}\int_{d_{m-1}}^{d_m}\rho\varphi_i^{C_l}\frac{dT}{d\tau}\psi dxd\tau; \tag{41}$$

$$J'_{\lambda_l^i}=\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}\int_0^{\tau_m}\int_{d_{m-1}}^{d_m}\left\{\varphi_i^{\lambda_l}\frac{d^2T_{l,m}}{dx^2}+\frac{d\varphi_i^{\lambda_l}}{dT}\frac{dT_{l,m}}{dx}\frac{dT_{l,m}}{dx}\right\}\psi_{l,m}dxd\tau+$$
$$+\int_0^{\tau_m}\alpha_1\frac{dT_1\left(0,\tau\right)}{dx}\varphi_i^{\lambda_l}d\tau+ \tag{42}$$
$$+\int_0^{\tau_m}\alpha_2\frac{dT_L\left(X_L,\tau\right)}{dx}\varphi_i^{\lambda_l}d\tau;$$

$$J'_{C_{gl}^{i}}=\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}\int_0^{\tau_m}\int_{d_{m-1}}^{d_m}\varphi_i^{C_g}\int_{l_0}^{x}\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}d\xi\frac{dT_{l,m}}{dx}\psi_{l,m}dxd\tau; \quad (43)$$

$$J'_{H_l^i}=\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}\int_0^{\tau_m}\int_{d_{m-1}}^{d_m}\varphi_i^{H}\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}\psi_{l,m}dxd\tau; \quad (44)$$

$$J'_{E_l^i}=\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}\int_0^{\tau_m}\int_{d_{m-1}}^{d_m}\frac{\partial F}{\partial E}\varphi_i^{E}\Phi_{l,m}dxd\tau; \quad (45)$$

$$J'_{A_l^i}=\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}\int_0^{\tau_m}\int_{d_{m-1}}^{d_m}\frac{\partial F}{\partial A}\varphi_i^{A}\Phi_{l,m}dxd\tau; \quad (46)$$

$$J'_{n}=\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_l}\int_0^{\tau_m}\int_{d_{m-1}}^{d_m}\frac{\partial F}{\partial n}n\Phi_{l,m}dxd\tau. \quad (47)$$

Сопряженные переменные и являются решением сопряженной краевой задачи:

$$\begin{aligned}&\frac{d\psi_{l,m}}{d\tau}\rho_{l,m}C_l+\frac{d}{dx}\left(\lambda_l\frac{d\psi_{l,m}}{dx}\right)-\\&-\left(\frac{d\lambda_l}{dT}\frac{dT_{l,m}}{dx}+C_{g,l}\int_{l_0}^{x}\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}d\xi\right)\frac{d\psi_{l,m}}{dx}+\\&+\left(\frac{dH_l}{dT}\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}+\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}C_l-C_{g,l}\frac{d\rho_{l,m}}{d\tau}\right)\psi_{l,m}+\\&+\Phi_{l,m}\frac{\partial F}{\partial T}=0,\end{aligned} \quad (48)$$

$$X_{l,i-1}<x<X_{l,i},0\le\tau<\tau_{\max},$$

$$\psi_{l,m}\left(x,\tau_{\max}\right)=0,X_{l,m-1}\le x\le X_{l,m}; \quad (49)$$

$$\begin{aligned}&\frac{d\psi_1}{dx}\lambda_1\left(T_1\left(X_1,\tau\right)\right)-\psi_1C_{g,1}\left(T_1\left(X_1,\tau\right)\right)\times\\&\times\int_{l_0}^{x}\frac{d\rho_1\left(T_1\left(X_1,\tau\right)\right)}{d\tau}d\xi+\frac{\psi_1}{\alpha_1}\beta_1=0;\end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}&\frac{d\psi_L}{dx}\lambda_L\left(T_L\left(X_L,\tau\right)\right)-\psi_LC_{g,L}\left(T_L\left(X_L,\tau\right)\right)\times\\&\times\int_{l_0}^{x}\frac{d\rho_L\left(T_L\left(X_L,\tau\right)\right)}{d\tau}d\xi+\frac{\psi_L}{\alpha_L}\beta_L=0;\end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}&\lambda_l\left(T_{l,m}\left(X_{l,m},\tau\right)\right)\left[\frac{\partial\psi_{l,m}\left(X_{l,m},\tau\right)}{\partial x}-\frac{\partial\psi_{l,m-1}\left(X_{l,m},\tau\right)}{\partial x}\right]=\\&=\chi_{l,m}(\tau)\left[T_{l,m}\left(X_{l,m},\tau\right)-f_{l,m}(\tau)\right],\\&m=\overline{1,M_l},l=\overline{1,L};\end{aligned} \quad (52)$$

$$\psi_{l,m}\left(X_{l,m},\tau\right)=\psi_{l,m+1}\left(X_{l,m},\tau\right),\ m=\overline{1,M_l},\ l=\overline{1,L}; \quad (53)$$

$$\begin{aligned}&-\frac{d\Phi_{l,m}}{d\tau}=\Phi_{l,m}\frac{\partial F}{\partial\rho}-H_l\frac{d\psi_{l,m}}{d\tau}-\\&-\left(C_l\frac{dT_{l,m}}{d\tau}+\frac{dH_l}{dT}\frac{dT_{l,m}}{d\tau}\right)\psi_{l,m}-\\&-\frac{d}{d\tau}\left(\int_x^{l}C_{g,l}\frac{dT_{l,m}}{dx}\psi_{l,m}d\xi\right),\end{aligned} \quad (54)$$

$$\Phi_{l,m}\left(\tau_r\right)=0. \quad (55)$$

Выводы

Разработанный алгоритм позволяет с помощью метода итерационной регуляризации эффективно решать обратную задачу идентификации математической модели теплопереноса в материале при наличии термодеструкции. Алгоритм предусматривает проведение одного эксперимента, в результате которого определяется информация о температуре в некотором количестве точек образца. Достоинством алгоритма является возможность одновременного определения четырех теплофизических параметров и трех параметров термохимической кинетики. Использование метода итерационной регуляризации позволяет повысить скорость решения задачи, которая обусловлена тем, что алгоритм предусматривает решение на каждой итерации одной прямой задачи теплопереноса для определения поля температур с вновь полученными характеристиками и двух сопряженных задач для нахождения градиента целевого функционала и приращения поля температур.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, мероприятие 1.1, государственный контракт № 02.740.11.0471. от 30.09.2009

Библиографический список:

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. 1979.

2. *Шленский О.Ф., Шашков А.Г., Аксенов Л.Н.* Теплофизика разлагающихся материалов. – М.: Энергоатомиздат, 1985.

3. *Юдин В.М.* Распространение стекла в стеклопластиках // Труды ЦАГИ. 1970. Вып. 1267.

4. *Полежаев Ю.В. Юркевич Ф.Б.* Тепловая защита. – М.: Энергия, 1976.

5. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В.* Идентификация математических моделей сложного теплообмена. – М.:Изд-во МАИ, 1999.

6. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

7. *Алифанов О.М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979.

Московский авиационный институт
(государственный технический университет)