УДК 519.8

Агрегирование предпочтений с учетом важности критериев

Смерчинская С.О.*, Яшина Н.П.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: dep805@mai.ru*

***e-mail: dep805@mai.ru*

Аннотация

Предлагается методика агрегирования многокритериальных предпочтений с учетом важности критериев. Разработан алгоритм нахождения весовых коэффициентов важности критериев. Решена задача оптимального выбора моделей самолетов средней дальности для закупки авиационно-транспортной компанией.

Ключевые слова: принятие решений, многокритериальный выбор, отношение предпочтения, ранжирование, агрегированное предпочтение, мажоритарный граф, коэффициенты важности критериев.

Введение

Проблема принятия сложных решений возникает на всех этапах создания и эксплуатации авиационной и ракетно-космической техники. Ответственность за жизнь людей, большие капиталовложения, престиж отрасли и даже страны – все это не должно подвергаться риску принятия ошибочных решений. Требуется разработать математически обоснованные методы, исключающие фактор субъективности в процессе выбора оптимальных вариантов решений.

Задачи многокритериального выбора являются одним из самых распространенных типов задач, возникающих при принятии решений. Необходимо выбрать наилучшие из альтернатив, оцениваемых по нескольким критериям качества: стоимости, весу, надежности, рентабельности и т.п. Подобные задачи могут возникать на всех этапах проектирования, создания и последующей эксплуатации авиационной и ракетно-космической техники. В частности, в интервью с президентом ОАО «Туполев» А. Бобрышевым, говорится о таких критериях, как цена, послепродажное обслуживание, летно-технические характеристики. Основной трудностью при применении традиционных алгоритмов является то, что они рассчитаны на задание численных оценок альтернатив по различным критериям, причем шкалы критериев должны быть однородными. Кроме того, при принятии решений необходимо учесть, что критерии могут иметь разную важность. Сравнительная важность критериев обычно задается либо отношением предпочтения на множестве критериев и групп критериев [1], либо весовыми коэффициентами [2, 3]. В данной статье предложена методика агрегирования предпочтений по критериям и выбора наилучших альтернатив, не требующая приведения шкал критериев к однородным. Кроме того, предложен алгоритм нахождения коэффициентов важности критериев на основе полученных в процессе диалога с ЛПР (лицом, принимающим решения) точек безразличия альтернатив.

Предложенная методика была применена к решению задачи закупки пассажирских самолетов средней дальности авиационно-транспортной компанией.

1. Агрегирование предпочтений по критериям

Пусть предпочтения по критериям $K_1, K_2, \ldots, K_m$ на множестве альтернатив $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ заданы матрицами предпочтений $R^1, R^2, \ldots, R^m$. Необходимо построить агрегированное (суммарное) отношение предпочтения, являющееся строгим порядком.

Матрица предпочтений представляет собой квадратную матрицу $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ порядка n (t=1, …, m) с элементами

$$r_{ij}^t = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \text{ менее предпочтительна } a_j; \\ 1/2, \text{ если } a_i \text{ и } a_j \text{ равноценны}; \\ 0, \text{ если } a_j \text{ менее предпочтительна } a_i \text{ или } a_i \text{ и } a_j \text{ не сравнимы} \end{cases}$$

при $i \neq j$. Элемент $r_{ii}^t = 1$, (i=1, …, n), если отношение ρ_t рефлексивно; в противном случае $r_{ii}^t = 0$. Равноценность двух альтернатив a_i и a_j означает, что отношению одновременно принадлежат пары $< a_i, a_j >$ и $< a_j, a_i >$ (i,j=1, …, n, $i \neq j$).

Матрица предпочтений R^t в случае, когда заданы оценки альтернатив по критерию K_t ($t \in \{1,\ldots,m\}$) вектором $h^t = (h_1^t, h_2^t, \ldots, h_n^t)$ с неотрицательными действительными компонентами, формируется следующим образом. $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ (t=1,…,m) – квадратная матрица порядка n (n – число альтернатив) с элементами $r_{ij}^t = \dfrac{h_j^t}{h_i^t + h_j^t}$, если значения оценок по шкале t-го критерия максимизируются, и

$r_{ij}^t = \dfrac{h_i^t}{h_i^t + h_j^t}$, если значения оценок по шкале t-го критерия минимизируются.

Причем, если $h_i^t = 0$ и $h_j^t = 0$, то $r_{ij}^t = r_{ji}^t = \dfrac{1}{2}$.

Если оценки по шкале критерия K_t $(t \in \{1,...,m\})$ отрицательные, то элементы матрицы $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ вычисляются следующим образом: $r_{ij}^t = \dfrac{\left|h_i^t\right|}{\left|h_i^t\right| + \left|h_j^t\right|}$, если значения оценок по шкале t-го критерия максимизируются, и $r_{ij}^t = \dfrac{\left|h_j^t\right|}{\left|h_i^t\right| + \left|h_j^t\right|}$, если значения оценок по шкале t-го критерия минимизируются. Если для некоторой альтернативы по какому-либо критерию не задана оценка, то эта альтернатива не сравнима с другими по данному критерию и в матрице предпочтений все элементы соответствующих строки и столбца равны нулю.

Алгоритм агрегирования предпочтений по критериям подробно описан в статье [4]. Там же приведен пример, иллюстрирующий работу алгоритма в случае, когда все критерии имеют равную важность.

Обобщим алгоритм агрегирования [4] для случая, когда заданы весовые коэффициенты важности $k_1, k_2, ..., k_m$ по критериям качества $K_1, K_2, ..., K_m$.

Алгоритм агрегирования предпочтений с учетом коэффициентов важности критериев

1. Находим матрицу суммарных предпочтений по формуле

$$P = \sum_{t=1}^{m} k_t R^t .$$

2. Находим мажоритарный граф $G = (A, \rho_{\Sigma})$. Для этого строим матрицу смежности $R_{\Sigma} = \left\| r_{ij}^{\Sigma} \right\|$ и матрицу весов $C = \left\| c_{ij} \right\|$ нагруженного мажоритарного графа с элементами

$$r_{ij}^{\Sigma} = \begin{cases} 1, \text{если } p_{ij} - p_{ji} > 0 \\ 0, \text{иначе;} \end{cases}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} p_{ij} - p_{ji}, \text{ если } \exists \text{дуга} < a_i, a_j > \in \rho_{\Sigma} \\ \infty, \qquad\qquad \text{иначе,} \end{cases},$$

где $p_{ij} = \sum_{t=1}^{m} k_t r_{ij}^t$ – элементы матрицы суммарных предпочтений $P = \left\| p_{ij} \right\|$. Матрица смежности мажоритарного графа R_{Σ} соответствует отношению ρ_{Σ}.

3. Используя матрицу весов мажоритарного графа, разрушаем противоречивые контуры мажоритарного графа отношения ρ_{Σ}, удаляя дуги с наименьшим весом. Получим отношение ρ.

4. Строим агрегированное отношение предпочтения $\hat{\rho}$ как транзитивное замыкание отношения ρ: $\hat{\rho} = Tr\rho$. Матрица предпочтений отношения $\hat{\rho}$ совпадает с матрицей смежности соответствующего графа.

Замечание. Если мажоритарный граф не содержит контуров, то построение матрицы весов не требуется для работы алгоритма.

При построении матрицы суммарных предпочтений $P = \left\| p_{ij} \right\|$ можно воспользоваться тем, что для ее элементов выполняется

$$p_{ij} + p_{ji} = \sum_{t=1}^{m} k_t r_{ij}^t + \sum_{t=1}^{m} k_t r_{ji}^t = \sum_{t=1}^{m} k_t (r_{ij}^t + r_{ji}^t) = \sum_{t=1}^{m} k_t ,$$

так как по построению матриц предпочтений $r_{ij}^t + r_{ji}^t = 1$ (t=1,…,m; m – число критериев). Если весовые коэффициенты важности критериев нормированы ($\sum_{t=1}^{m} k_t = 1$), то очевидно $p_{ij} + p_{ji} = 1$. Если все критерии имеют одинаковую важность, т.е. k_t =1 (t=1,…,m), то $p_{ij} + p_{ji} = m$.

2. Нахождение коэффициентов важности критериев по точкам безразличия

Опишем методику нахождения коэффициентов важности критериев, основывающуюся на построении прямых безразличия для каждой пары критериев [3]. Прямую безразличия построим, аппроксимируя точки безразличия, соответствующие векторным оценкам равноценных альтернатив. Равноценные альтернативы находим в диалоге с ЛПР: изменяем значения оценки альтернативы по одному из критериев, а затем устанавливаем компенсацию по шкале другого критерия.

Алгоритм нахождения коэффициентов важности критериев.

1. В диалоге с ЛПР находим точки безразличия альтернатив по двум критериям.
2. Аппроксимируем точки безразличия прямой.
3. Тангенс угла наклона этой прямой по модулю равен отношению значений весовых коэффициентов важности критериев.

4. Повторяем пункты 1,2,3 для сравнения коэффициентов важности m–1 пары критериев (m – число критериев), причем в каждой паре должен присутствовать один критерий, которого еще не было в других парах.

5. По информации об отношении коэффициентов важности критериев находим величины коэффициентов.

Опишем подробнее шаги алгоритма на примере сравнения пассажирских самолетов средней дальности, оцениваемых ЛПР по трем критериям качества: K_1 – цена, K_2 – послепродажное обслуживание, K_3 – летно-технические характеристики [5].

Для нахождения коэффициентов важности всех критериев достаточно сравнить между собой m–1 пару критериев. В нашем примере возьмем следующие две пары критериев: цена и обслуживание, цена и летно-технические характеристики.

Сравним важность критериев цена и обслуживание. Пусть допустимая цена на самолет для ЛПР не более 2 млрд. руб. Оценка послепродажного обслуживания самолетов проведена экспертами по бальной шкале от 1 до 10 (наилучшая оценка – 10 баллов). Пусть самолету стоимостью 2 млрд. руб. поставлена оценка 10 баллов за обслуживание. На координатную плоскость наносим точку <2млрд., 10>. Зададим ЛПР вопрос.

– На сколько баллов максимально можно изменить оценку, характеризующую затраты на обслуживание, если цену самолета уменьшить на 400 млн. руб.?

Ответ ЛПР

– На два балла.

На координатную плоскость наносим точку <1,6 млрд., 8>. Зададим ЛПР вопрос.

– На сколько баллов максимально можно изменить оценку, характеризующую затраты на обслуживание, если цену самолета уменьшить еще на 400 млн. руб.?

– Еще на один балл.

На координатную плоскость наносим точку <1,2 млрд., 7>. Зададим ЛПР следующий вопрос.

– На сколько баллов максимально можно изменить оценку, характеризующую затраты на обслуживание, если цену самолета уменьшить на 1 млрд. руб.?

– На четыре балла.

На координатную плоскость наносим точку <1млрд., 6>. Последний вопрос.

– На сколько баллов максимально можно изменить оценку, характеризующую затраты на обслуживание, если цену самолета уменьшить на 1,2 млрд. руб.?

– На пять баллов.

На координатную плоскость наносим точку <0,8 млрд., 5>.

При построении аппроксимирующих прямых необходимо учитывать, что оценки альтернатив по критериям предварительно приводятся к однородным шкалам. Для этого достаточно выбрать на осях координат одинаковые отрезки, в которых будут заключены все оценки по критериям: от максимальной до минимальной.

В результате такого диалога выявляется информация об отношении весовых коэффициентов важности критериев: отношение коэффициентов равно модулю тангенса угла наклона прямой (коэффициент t в уравнении прямой).

Для аппроксимации полученных точек прямой воспользуемся методом наименьших квадратов. Напомним суть этого метода.

Задача заключается в нахождении коэффициентов линейной комбинации, при которых функция двух переменных k и b $F(k,b)=\sum_{i=1}^{l}\left(y_i-(kx_i+b)\right)^2$ принимает наименьшее значение. То есть, при данных k и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей.

Таким образом, задача сводится к нахождению экстремума функции двух переменных.

Находим частные производные функции $F(k,b)=\sum_{i=1}^{l}\left(y_i-(kx_i+b)\right)^2$ по переменным k и b, приравнивая затем их к нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(k,b)}{\partial k}=0\\[2mm] \dfrac{\partial F(k,b)}{\partial b}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\sum\limits_{i=1}^{l}\left(y_i-(kx_i+b)\right)x_i=0\\ -2\sum\limits_{i=1}^{l}\left(y_i-(kx_i+b)\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}k\sum\limits_{i=1}^{l}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{l}x_i=\sum\limits_{i=1}^{l}x_iy_i\\ k\sum\limits_{i=1}^{l}x_i+\sum\limits_{i=1}^{l}b=\sum\limits_{i=1}^{l}y_i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k\sum\limits_{i=1}^{l}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{l}x_i=\sum\limits_{i=1}^{l}x_iy_i\\ k\sum\limits_{i=1}^{l}x_i+lb=\sum\limits_{i=1}^{l}y_i\end{cases}.$$

Решаем полученную систему любым методом и получаем формулы для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} k = \dfrac{l\sum\limits_{i=1}^{l} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \sum\limits_{i=1}^{l} y_i}{l\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{l} x_i\right)^2} \\ b = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} y_i - k\sum\limits_{i=1}^{l} x_i}{l} \end{cases}.$$

При данных k и b функция $F(k,b) = \sum\limits_{i=1}^{l}\left(y_i - (kx_i + b)\right)^2$ принимает наименьшее значение.

В нашем примере число точек l=5. Переведем значения стоимости в однородную шкалу [1;10]: 2 млрд.$\Leftrightarrow$ 1; 1,6 млрд.$\Leftrightarrow$ 3; 1,2 млрд. $\Leftrightarrow$ 5; 1 млрд. $\Leftrightarrow$ 6; 0,8 млрд. $\Leftrightarrow$ 7.

Для удобства вычисления заполним следующую таблицу.

	i =1	i =2	i =3	i =4	i =5	$\sum\limits_{i=1}^{5}$
x_i	1	3	5	6	7	22
y_i	10	8	7	6	5	36
$x_i y_i$	10	24	35	36	35	140
x_i^2	1	4	9	16	25	55

Вычислим значения коэффициентов прямой:

$$k = \frac{5\cdot 140 - 22\cdot 36}{5\cdot 120 - 22^2} = -\frac{23}{29} \approx -0.793;\; b = \frac{36 - k\cdot 22}{5} = \frac{36 + \frac{23}{29}\cdot 22}{5} \approx 10.69\,.$$

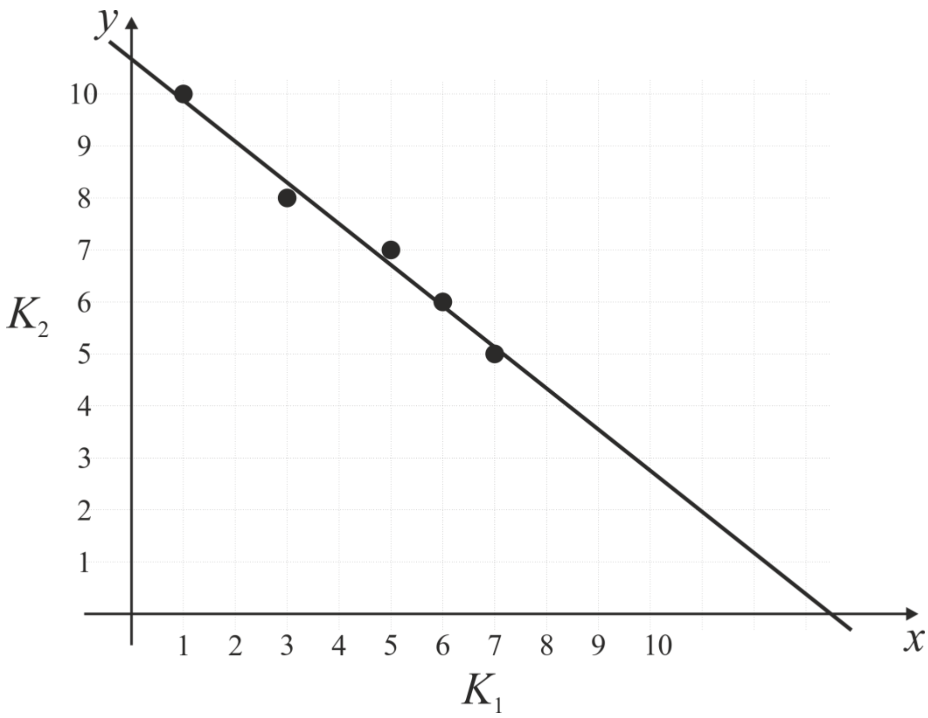

Рис. 1

Прямая имеет вид y=–0.793x+10.69 (рис. 1), $tg\alpha = -\frac{23}{29}$. Таким образом, отношение весовых коэффициентов важности $\frac{k_2}{k_1} = \frac{23}{29}$.

Аналогично найдем в диалоге с ЛПР равноценные точки по критериям цена и летно-технические характеристики: <2млрд.; 10>, <1,6млрд.; 9>, <1,2 млрд.; 8>, <1 млрд.; 7>, <0,8 млрд.; 6>.

Заполним таблицу.

	i =1	i =2	i =3	i =4	i =5	$\sum_{i=1}^{5}$
x_i	1	3	5	6	7	22
y_i	10	9	8	7	6	40
$x_i y_i$	10	27	40	42	42	161

x_i^2	1	9	25	36	49	120

Вычислим значения коэффициентов для второй прямой.

$$k=\frac{5\cdot 161-22\cdot 40}{5\cdot 120-22^2}=-\frac{75}{116}\approx -0.647;\ b=\frac{40-k\cdot 22}{5}=\frac{40+\frac{75}{116}\cdot 22}{5}\approx 10.85.$$

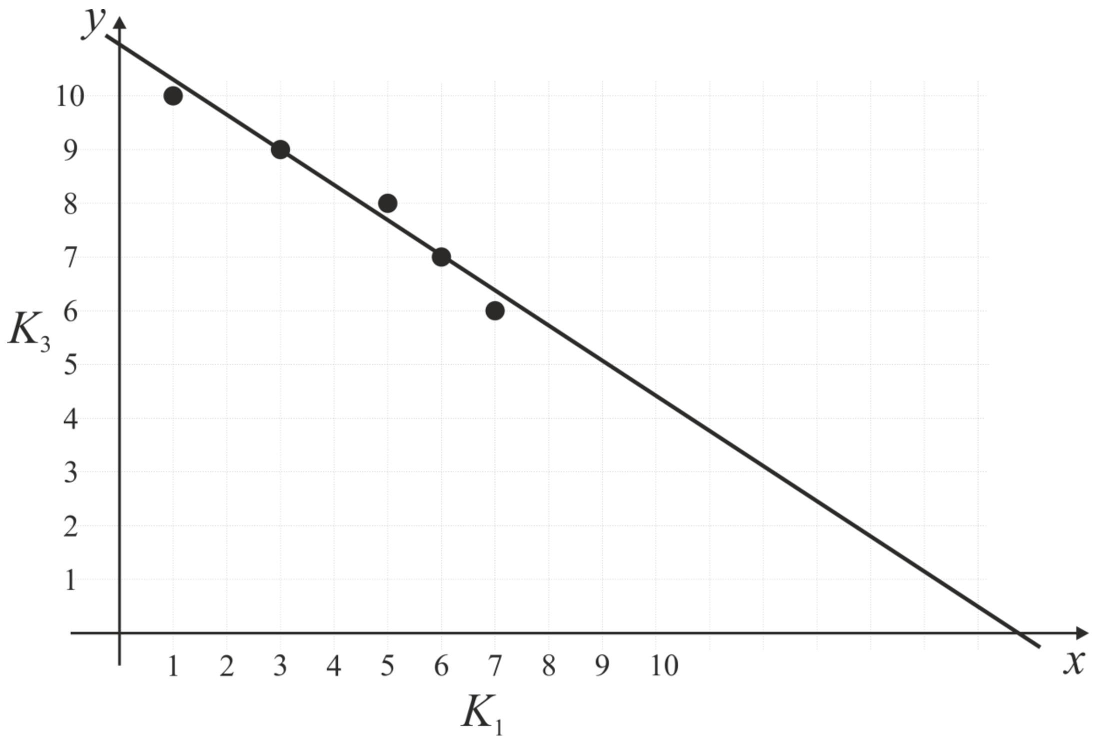

Рис. 2

Прямая имеет вид y=–0.647x+10.85 (рис. 2), $tg\alpha=-\frac{75}{116}$. Таким образом, отношение весовых коэффициентов важности $\frac{k_3}{k_1}=\frac{75}{116}$.

Для нахождения значений коэффициентов важности критериев составим систему уравнений:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1, \\ \dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{23}{29}, \\ \dfrac{k_3}{k_1} = \dfrac{75}{116}. \end{cases}$$

Решая систему, получим: $k_1 = \dfrac{116}{283} \approx 0.41$; $k_2 = \dfrac{92}{283} \approx 0.325$; $k_3 = \dfrac{75}{283} \approx 0.265$.

Приведем пример, иллюстрирующий работу алгоритма агрегирования предпочтений с учетом задания весовых коэффициентов важности критериев.

Пример. Авиационно-транспортная компания решила приобрести дополнительно два пассажирских самолета средней дальности. Выбор решено было сделать из четырех самолетов a_1, a_2, a_3, a_4 на основе сравнения их по трем критериям качества: K_1 – цена, K_2 – послепродажное обслуживание, K_3 – летно-технические характеристики. Проведем сравнение самолетов с учетом и без учета важности критериев, т.е. с равными и с различными весовыми коэффициентами важности критериев. Оценки самолетов a_1, a_2, a_3, a_4 приведены в таблице

Критерий/ Самолет	Цена млрд. руб.	Обслуживание 1-10 баллов	ЛТХ 1-10 баллов
a_1	2	10	8
a_2	1,5	8	6
a_3	1	6	6
a_4	0,5	4	4

На основе значений оценок альтернатив по каждому критерию качества найдем соответственно матрицы предпочтений

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{7} & \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}; \ R^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{9} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{8} & \frac{4}{7} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}; \ R^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{7} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим агрегированное отношение предпочтения для равных по важности критериев. В этом случае матрица суммарных предпочтений P_1 и матрица смежности $R_{\Sigma 1}$ соответствующего мажоритарного графа имеют вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{13}{9} & \frac{247}{168} & \frac{149}{105} \\ \frac{14}{9} & 0 & \frac{107}{70} & \frac{89}{60} \\ \frac{257}{168} & \frac{103}{70} & 0 & \frac{22}{15} \\ \frac{166}{105} & \frac{91}{60} & \frac{23}{15} & 0 \end{pmatrix}, \ R_{\Sigma 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мажоритарный граф представлен на рис. 3.

Найдем теперь агрегированное отношение предпочтения с учетом полученных выше коэффициентов важности критериев: $k_1 \approx 0.41$; $k_2 \approx 0.325$; $k_3 \approx 0.265$. Матрица суммарных предпочтений P_2 и матрица смежности $R_{\Sigma 2}$ соответствующего мажоритарного графа имеют вид:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}492 & 0{,}509 & 0{,}509 \\ 0{,}508 & 0 & 0{,}518 & 0{,}522 \\ 0{,}491 & 0{,}492 & 0 & 0{,}509 \\ 0{,}491 & 0{,}478 & 0{,}491 & 0 \end{pmatrix}, \ R_{\Sigma 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мажоритарный граф представлен на рис. 4.

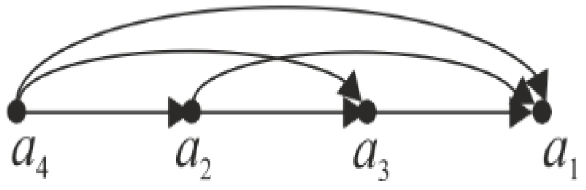

Рис. 3

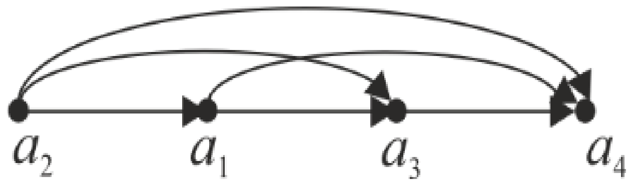

Рис. 4

Графы, изображенные на рис. 3 и 4, транзитивны и не содержат контуров. Следовательно, можно ранжировать альтернативы по предпочтительности: $a_1 - a_3 - a_2 - a_4$ (a_1 – лучший самолет, рис.3) и $a_4 - a_3 - a_1 - a_2$ (a_4 – лучший самолет, рис. 4). Если считать, что все критерии имеют одинаковую важность, то следует закупить самолеты a_1 и a_3. С учетом полученных весовых коэффициентов важности критериев было решено приобрести недорогие самолеты a_3 и a_4.

Приведенный пример иллюстрирует влияние предпочтений ЛПР по критериям на конечный результат ранжирования альтернатив: задание коэффициентов важности критериев кардинально изменило ранжирование самолетов.

Библиографический список

1. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. - М.: Физматлит, 2007. – 64 с.
2. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений. - М.: Логос, 2002. - 392с.
3. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. -560 с.

4. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Агрегирование предпочтений в многокритериальных задачах. // «Вестник Московского авиационного института». 2013. Т.20. том 20. № 2. С. 219–225.
5. Т. Латыпов. Интервью с президентом ОАО «Туполев» А. Бобрышевым // Газета «БИЗНЕС online», 22.03.2012.: URL http://www.business-gazeta.ru/article/56361/