

## **Применение TVD-схем для решения уравнений гемодинамики**

Е.В. Астраханцева, В.Ю. Гидаспов, Д.Л. Ревизников

*Рассмотрены вопросы математического моделирования течений крови в крупных кровеносных сосудах. Для задачи гемодинамики реализована TVD-схема второго порядка точности по времени и пространству. Предложен ряд тестовых задач, для которых получено аналитическое решение. В частности приведено решение для задачи о распаде произвольного разрыва. Рассмотрены особенности постановки граничных условий для системы уравнений гемодинамики. Исследованы вопросы сходимости и выбора оптимальных сеточных параметров для рассматриваемого класса задач.*

### ***Введение***

Строение сердечно-сосудистой системы является достаточно сложным, что обусловлено геометрией сосудов, свойствами тканей и органов, взаимодействующих с кровеносной системой, взаимным влиянием упругих стенок сосудов и потока крови, а также многими другими факторами. Возможности экспериментальных исследований гемодинамических процессов, как правило, ограничены. В то же время построенная с использованием доступных экспериментальных данных математическая модель позволяет обеспечить подробную детализацию и оценить взаимное влияние различных параметров друг на друга, а также на функционирование системы в целом. Важнейшим условием эффективности вычислительного эксперимента является адекватность математической модели протекающим в системе кровообращения физическим процессам.

Течение крови в системе кровообращения в общем случае описывается трехмерными нестационарными уравнениями для вязкой неньютоновской жидкости совместно с уравнениями динамики эластичных оболочек сосудов [1, 2]. Однако использование многомерных моделей связано с такими трудностями, как решение уравнений Навье-Стокса в областях с подвижными криволинейными границами [3], и высокими требованиями к вычислительным ресурсам. Поэтому, как правило, многомерные модели не применяются для описания системы кровообращения в целом, а используются для получения детальной картины течения в характерных локальных зонах. Для исследования волновых процессов в кровеносной системе часто

используются одномерные модели. Поскольку течение в кровеносном сосуде направлено, главным образом, вдоль его оси, допущение об одномерности течения является вполне приемлемым.

### Математическая модель

Рассмотрим одномерную модель гемодинамики. В этом случае течение в кровеносном сосуде (рис. 1) описывается следующей системой нелинейных гиперболических уравнений в частных производных [напр., 4, 5]:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial us}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = f_e + f_R \end{cases} \quad (0)$$

Здесь  $t$  - время,  $x$  - продольная координата,  $S$  - площадь поперечного сечения сосуда,  $u$  - осредненная по поперечному сечению скорость движения крови вдоль сосуда,  $P$  - осредненное артериальное давление,  $\rho$  - плотность крови, которая считается постоянной,  $f_e$  - внешняя сила,  $f_R$  - сила сопротивления (трения), обусловленная вязкими свойствами крови.

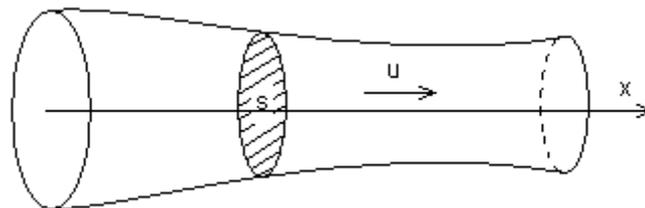


рис. 1. Кровеносный сосуд.

Для замыкания системы необходимо описать взаимодействие течения и эластичной стенки сосуда. Как правило, это делается с использованием полуэмпирических зависимостей площади поперечного сечения от давления в потоке:

$$s = s(p) \quad (2)$$

Зависимости такого рода описывают кровеносный сосуд как эластичную пассивную трубку. Несмотря на тот факт, что подобного рода модели, вообще говоря, не отражают активной роли сосуда в процессе регуляции кровотока, они, тем не менее, достаточно точно описывают эволюцию гемодинамических параметров в системе кровообращения [6].

Наиболее простой, но в тоже время неплохо отражающей основные закономерности взаимодействия течения и оболочки, является кусочно-линейная зависимость [5]:

$$s(p) = \begin{cases} s_{\min} + \frac{s_{\max} - s_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}}(p - p_{\min}), & p_{\min} < p < p_{\max} \\ s_{\min} & , p < p_{\min} \\ s_{\max} & , p_{\max} < p \end{cases} . \quad (3)$$

Здесь и далее  $s_{\min}$ ,  $s_{\max}$ ,  $p_{\min}$ ,  $p_{\max}$  являются характеристиками данного сосуда.

В работе [7] предложена близкая по форме, но обладающая свойством непрерывной дифференцируемости, функциональная зависимость вида:

$$s(p) = \left( \sqrt{s_{\min}} + \frac{\sqrt{s_{\max}} - \sqrt{s_{\min}}}{1 + M \exp\left(\frac{p}{E}\right)} \right)^2 . \quad (4)$$

Здесь  $M$  - характеризует степень напряженности сосуда,  $E$  - характеризует эластичность сосуда.

В работе [8], посвященной исследованию течений вязкой жидкости в эластичных трубках при наличии стеноза, используется двухпараметрическая степенная зависимость:

$$p - p_0 = K_p \left( \left( \frac{s}{s_0} \right)^{n_1} - \left( \frac{s}{s_0} \right)^{-n_2} \right) . \quad (5)$$

Здесь различные комбинации степеней соответствуют разной степени эластичности стенки,  $K_p$  - характеризует жесткость сосуда, индекс 0 соответствует невозмущенному состоянию покоящейся жидкости.

В [9] для описания связи между давлением и площадью поперечного сечения используется выражение, полученное из условия статического равновесия в поперечном направлении цилиндрической тонкостенной трубки, выполненной из эластичного материала с постоянным модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ :

$$p - p_0 = \frac{\sqrt{\pi} h_0 E}{(1 - \nu^2) s_0} (\sqrt{s} - \sqrt{s_0}) , \quad (6)$$

где  $h_0$  - толщина оболочки. В большинстве работ стенка считается несжимаемой и коэффициент Пуассона полагается равным 0.5.

Более общий подход к учету взаимодействия течения и стенки сосуда заключается в совместном решении системы уравнений (1) и уравнений, описывающих динамику эластичной оболочки. В качестве примера приведем простейшую модель, выражающую условие динамического равновесия вязкоэластичной тонкостенной оболочки [10]:

$$\rho_w h_0 \frac{d^2 r}{dt^2} + \rho_w h_0 c_v \frac{dr}{dt} + \frac{hE}{(1-\nu^2)r_0^2} (r - r_0) = p - p_0. \quad (7)$$

Здесь  $\rho_w$  - плотность оболочки,  $r$  - радиус поперечного сечения сосуда,  $c_v = \frac{\lambda_v}{r_0 \rho_w}$ ,  $\lambda_v$  - коэффициент вязкоэластичности оболочки. В отличие от рассмотренных выше подходов в данном уравнении учитываются инерционные (первый член в левой части) и вязкоэластичные свойства сосуда (второй член). При этом выражение (6) естественным образом вытекает из (7), если рассматривать квазистатическое равновесие, пренебрегая указанными эффектами.

В практике математического моделирования гемодинамических процессов находят применение и более сложные модели, учитывающие такие эффекты, как продольные напряжения и перемещения, конечная толщина и неоднородная структура оболочек [см. напр. 11-12] и др. Однако усложнение моделей связано с необходимостью задания дополнительных условий и параметров, что требует постановки специальных экспериментов. В этой связи, как уже отмечалось выше, наиболее распространенными являются алгебраические модели вида (2). Многочисленные расчеты, проведенные авторами настоящей работы, показали, что для типичных условий функционирования кровеносного сосуда решающее значение имеет величина

$$\alpha_0 = \left. \frac{ds}{dp} \right|_{p=p_0} \quad (8)$$

(в выражениях (5), (6) в качестве  $p_0$  выступает величина  $p_0 = 0.5(p_{\min} + p_{\max})$ ).

При одинаковых величинах  $\alpha_0$  различные зависимости  $s(p)$  дают достаточно близкие пространственно-временные распределения гемодинамических параметров. Это позволяет во многих случаях использовать линейное приближение.

Завершая описание одномерной математической модели, приведем некоторые важные свойства системы уравнений (1), (2) [см. напр. 5, 13].

Запишем систему (1) в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = f, \quad (9)$$

$$\text{где } q = \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} us \\ u^2 + \frac{p}{\rho} \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_e + f_r \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби этой системы имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} u & s \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} & u \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Ее собственные значения вещественны и различны, что свидетельствует о гиперболичности системы:

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{\frac{s}{\rho} \frac{dp}{ds}}. \quad (11)$$

Матрица правых собственных векторов выглядит следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{1}{\rho s} \frac{dp}{ds}} & -\sqrt{\frac{1}{\rho s} \frac{dp}{ds}} \end{pmatrix}.$$

### **Численный метод**

Как отмечалось во введении, стремление к описанию с помощью одномерной модели всей кровеносной системы стимулирует поиск высокоточных алгоритмов для решения задачи гемодинамики одиночного сосуда. При различных режимах функционирования в сосудах возможно появление зон со значительным продольным изменением гемодинамических параметров. Как следствие, применение схем первого порядка по пространству является малоэффективным в силу сильной схемной диссипации. В то же время традиционные схемы второго порядка обладают собственными дисперсионными свойствами, проявляющимися в виде ложных осцилляций численного решения в областях больших градиентов. Учитывая, что при определенных условиях в сосуде возможно возникновение высокочастотных колебаний физической природы, исследование которых представляет самостоятельный интерес, эффекты схемной диссипации и схемной дисперсии численного решения являются крайне нежелательными и требуют особого внимания при разработке вычислительных алгоритмов. Так авторами работы [5] использовалась схема второго порядка с искусственной вязкостью и дисперсией, в результате чего им удалось добиться подавления отмеченных негативных эффектов.

В настоящей работе для решения системы уравнений гемодинамики (1), (2) используется TVD-подход (Total Variation Diminishing). Этот подход связан с

построением схем, которые уменьшают или сохраняют полную вариацию функции, не допуская тем самым появления ложных осцилляций. Основная идея TVD-подхода состоит в том, что расчет ведется всюду со вторым порядком точности, кроме зон с резким изменением параметров, где схема автоматически переключается на первый порядок точности. Этот переход обеспечивается с помощью специальных функций – лимитеров (ограничителей). Вопросы построения TVD-схем подробно освещены, например, в [14, 15]. Следуя этим работам, рассмотрим общую схему построения вычислительного алгоритма применительно к задаче гемодинамики (9).

В результате интегрирования (9) по  $i$ -ой ячейке ( $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ ) разностная схема может быть представлена в виде:

$$\Delta x \frac{d\bar{q}_i}{dt} = -F_{i+\frac{1}{2}} + F_{i-\frac{1}{2}} + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f dx$$

(12)

где  $\bar{q}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q dx$  - среднее по ячейке; индекс  $i \pm \frac{1}{2}$  соответствует значениям параметров на границах ячейки.

Потоки на границах ячейки определяются из следующего соотношения:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( F_{i+\frac{1}{2}}^L + F_{i+\frac{1}{2}}^R - \left| \tilde{A}_{i+\frac{1}{2}} \right| \left( q_{i+\frac{1}{2}}^R - q_{i+\frac{1}{2}}^L \right) \right),$$

(13)

где  $\left| \tilde{A}_{i+\frac{1}{2}} \right| = R |\Lambda| R^{-1}$ ,  $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_l|)$   $l = 1, 2$ . Здесь все матрицы вычисляются при

$$\hat{q} = \frac{1}{2} \left( q_{i+\frac{1}{2}}^L + q_{i+\frac{1}{2}}^R \right);$$

индексы  $L, R$  означают, что соответствующие параметры вычисляются в левой и правой ячейках, соответственно.

Компоненты вектора  $Q$  на границах ячеек вычисляются с помощью разложений в ряд Тейлора. При этом с целью монотонизации схемы для производных, входящих в разложения, применяются ограничители (limiter):

$$(q_k)_{i+\frac{1}{2}}^L = (q_k)_i + \frac{1}{2} \Delta x_i \left( \frac{\partial q_k}{\partial x} \right)_i \text{limiter} \left( \frac{(q_k)_{i+1} - (q_k)_i}{(q_k)_i - (q_k)_{i-1}} \right),$$

(14)

$$(q_k)_{i+\frac{1}{2}}^R = (q_k)_{i+1} - \frac{1}{2} \Delta x_{i+1} \left( \frac{\partial q_k}{\partial x} \right)_{i+1} \text{limiter} \left( \frac{(q_k)_{i+2} - (q_k)_{i+1}}{(q_k)_{i+1} - (q_k)_i} \right), \quad k = 1, 2 \quad (15)$$

$$\text{где } \left( \frac{\partial q_k}{\partial x} \right)_i = \frac{(q_k)_i - (q_k)_{i-1}}{\Delta x}.$$

В работе используются различные ограничители: minmod, van Leer, MC, superbee,

МГУ. Обозначим  $\theta = \frac{(q_k)_{i+1} - (q_k)_i}{(q_k)_i - (q_k)_{i-1}}$ . Тогда выражения для ограничителей имеют

следующий вид [13-15]:

$$\text{minmod: } \text{limiter}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \leq 0 \\ \theta, & 0 < \theta \leq 1 \\ 1, & \theta > 1 \end{cases};$$

$$\text{van Leer: } \text{limiter}(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + |\theta|};$$

$$\text{MC: } \text{limiter}(\theta) = \max \left( 0, \min \left( \frac{1+\theta}{2}, 2, 2\theta \right) \right);$$

$$\text{Superbee: } \text{limiter}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \leq 0 \\ \max(\min(1, 2\theta), \min(2, \theta)) & \end{cases};$$

$$\text{МГУ: } \text{limiter}(\theta) = \max \left( 0, \min \left( 2\theta, \frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}, 2 \right) \right).$$

Для аппроксимации уравнения (12) применяется метод Рунге-Кутты второго порядка.

Обозначим

$$L(q) = \frac{\tau}{\Delta x_i} \left( F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f dx \right) \quad (16)$$

Тогда алгоритм перехода на новый временной слой можно записать в виде:

$$\bar{q}_i^* = \bar{q}_i^n - L(\bar{q}_i^n), \quad (17)$$

$$\bar{q}_i^{(n+1)} = 0.5(\bar{q}_i^n + \bar{q}_i^* - L(\bar{q}_i^*)) \quad (18)$$

Такая модификация метода Рунге-Кутты является SSP-методом (Strong Stability Preserving High – order Time Discretization) [16]. Проведенные в настоящей работе расчеты показали, что применительно к задачам рассматриваемого класса применение схем с повышенным порядком аппроксимации по времени дает существенный выигрыш по сравнению с методами первого порядка.

### **Тестовые расчеты**

В качестве тестовых предлагаются задачи, для которых получены аналитические решения:

- система уравнений гемодинамики с правыми частями специального вида;
- задача о распаде произвольного разрыва, решением которой являются различные комбинации центрированных вееров волн разрежения и ударных волн;
- линейная система уравнений гемодинамики.

### **Задача с правыми частями специального вида**

С целью тестирования вычислительного алгоритма на задачах с плавным изменением гемодинамических параметров был построен набор тестовых задач с правыми частями специального вида. При этом правые части, начальные и граничные условия подбирались так, чтобы задача имела аналитическое решение. Рассмотрим одну из таких задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial us}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = F_2 \\ s = s(p) \end{cases} \quad (19)$$

где

$$F_1 = \frac{1}{\alpha} (BF \cos(Bt) \cos(Cx) - ACF \sin(Bt) \cos(Bt) \sin(2Cx) - AC(D + \beta) \cos(Bt) \sin(Cx))$$

$$F_2 = -AB \sin(Bt) \cos(Cx) - 0.5A^2C \cos^2(Bt) \sin(2Cx) - FC \sin(Bt) \sin(Cx) / \rho$$

(20)

Граничные условия:

$$u(0, t) = A \cos(Bt)$$

$$p(L, t) = F \sin(Bt) \cos(CL) + D$$

(21)

Начальные условия:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= A \cos(Cx) \\ p(x,0) &= D \end{aligned} \tag{22}$$

$$A = 50, \quad B = 6.3, \quad C = 1, \quad F = 20, \quad D = 100$$

Здесь и далее во всех тестах

$$p(s) = \gamma s + \beta, \quad \gamma = 66.66, \quad \beta = -199.98 \quad (s - \text{в } \text{см}^2, \text{ } p - \text{в } \frac{\text{кг}}{\text{сек}^2 \text{см}}), \tag{23}$$

$$\rho = 0.001 \text{ кг/см}^3, \quad L = 20 \text{ см} - \text{длина сосуда}$$

При таких начальных и граничных условиях система уравнений (19) имеет следующее аналитическое решение:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A \cos(Bt) \cos(Cx) \\ p(x,t) &= F \sin(Bt) \cos(Cx) + D \end{aligned} \tag{24}$$

Ясно, что настоящая задача не имеет какого-либо физического смысла и используется исключительно в качестве тестовой. Тем не менее, коэффициенты здесь подобраны таким образом, чтобы значения параметров изменялись в характерных для задачи гемодинамики диапазонах.

На рис. 2 приведено распределения гемодинамического параметра  $p$  по времени, полученные численно и аналитически. Здесь численное решение соответствует следующим сеточным параметрам: число шагов по пространству  $N_x = 200$ , число

Куранта  $\text{CFL} = 0.9$  (здесь и далее  $\text{CFL} = \frac{\tau}{\Delta x} c_0$ , где  $c_0 = \sqrt{\gamma \frac{s_0}{\rho}}$  - средняя скорость распространения возмущений).

Видно, что выбранный метод (TVD-схема с ограничителем minmod) достаточно точно воспроизводит аналитическое решение.

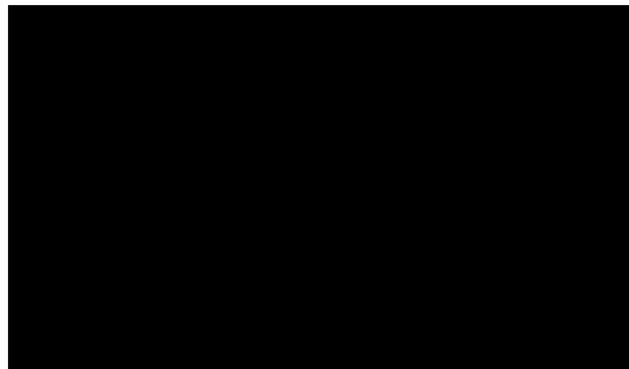


рис. 2. Сравнение численного и аналитического решения. Распределение  $p$  по времени в центре расчетной области. (число Куранта (CFL) 0.9,  $N_x = 200$ )

### Задача о распаде произвольного разрыва (задача Римана)

С целью тестирования вычислительного алгоритма на задачах с резким изменением гемодинамических параметров было получено точное решение автомодельной задачи о распаде произвольного разрыва (задача Римана) [14] для системы уравнений (1), (2).

Пусть вектор начальных данных  $q(0, x) = q^0(x)$  является ступенчатой векторной функцией:

$$q^0(x) = \begin{cases} q^1, & \text{при } x < \frac{L}{2} \\ q^2, & \text{при } x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (25)$$

Возникающее в результате таких начальных условий течение, в соответствии с [14], характеризуется одной из 4 возможных конфигураций:

- Влево от разрыва движется веер волн разрежения – вправо от разрыва движется ударная волна (ВР-УВ)
- Влево от разрыва движется ударная волна – вправо от разрыва движется веер волн разрежения (УВ-ВР)
- Влево и вправо от разрыва движутся ударные волны (УВ-УВ)
- Влево и вправо от разрыва движутся веера волн разрежения (ВР-ВР).

На ударной волне справедливы следующие соотношения [14]:

$$W\{q\} - \{F\} = 0, \text{ то есть}$$

$$\begin{cases} W\{s\} - \{us\} = 0 \\ W\{u\} - \left\{ \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right\} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Если обозначить  $u^\alpha, s^\alpha, p^\alpha, q^\alpha$  - значения параметров перед ударной волной;

$u, s, p, q$  - значения параметров за ударной волной, то  $\{q\} = q - q^\alpha, \{F\} = F - F^\alpha$  и

следует, что  $W(s - s^\alpha) - (us - u^\alpha s^\alpha) = 0$  или

$$W = \frac{us - u^\alpha s^\alpha}{s - s^\alpha} \quad (27)$$

Подставив (27) в (26) и выполнив ряд алгебраических преобразований, несложно получить соотношение:

$$u - u^\alpha \pm \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{s - s^\alpha}{s + s^\alpha}} (p - p^\alpha) = 0 \quad (28)$$

Теперь рассмотрим центрированный веер волн разрежения. Сначала найдем уравнения характеристик и соотношения на них.

Собственные значения матрицы Якоби (10):

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{\frac{s}{\rho} \frac{dp}{ds}} \quad (29)$$

Обозначим  $c^2 = \frac{s}{\rho} \frac{dp}{ds}$ , тогда уравнения характеристик можно записать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c \quad (30)$$

Найдем соотношения на характеристиках, приравняв определитель нулю [4]:

$$\begin{vmatrix} u - \lambda & -\frac{ds}{dt} \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} & -\frac{du}{dt} \end{vmatrix} = -(u - \lambda) \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} \pm \frac{p_s}{\rho c} \frac{ds}{dt} = 0$$

То есть на характеристиках выполняются следующие соотношения:

$$u - u_0 \pm \int_{s_0}^s \frac{p_s}{\rho c} ds = 0 \quad (31)$$

Соотношение (31) выполняется в общем случае, для произвольной зависимости  $p(s)$ .

Будем искать решение в виде  $q(t, x) = q(\xi) = q\left(\frac{x - x^c}{t - t^0}\right)$ . Здесь  $x^c = \frac{L}{2}$  - центр веера волн разрежения, в данном случае середина сосуда.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x - x^c}{t - t^0} = \xi = u \pm c \quad (32)$$

Подставив (32) в (31) получим соотношение, связывающее автомодельную переменную  $\xi$  и площадь поперечного сечения сосуда  $S$  внутри веера:

$$\xi \mp c \pm \int_{s_0}^s \frac{p_s}{\rho c} ds = 0 \quad (33)$$

Обобщенно решение задачи о распаде разрыва, используя (28) и (31) можно записать в виде:

$$F(s) = u^2 - u^1 + f^1(s, s^1) + f^2(s, s^2) = 0 \quad (34)$$

$$f^i = \begin{cases} \int_{s_0}^s \frac{p_s}{\rho c} ds, & s < s^i \\ \sqrt{\frac{2s-s^i}{\rho s+s^i}} (p-p^i), & s \geq s^i \end{cases} \quad (35)$$

Поскольку  $F(s)$  монотонно возрастающая функция, то ее исследование позволяет априорно определить конфигурацию, возникающую после распада разрыва:  $F(s^1) > 0$  - влево веер,  $F(s^1) < 0$  - влево ударная волна,  $F(s^2) > 0$  - вправо веер,  $F(s^2) < 0$  - вправо ударная волна.

Решив уравнение  $F(s) = 0$ , получим значения  $S$  и  $P$ . Подставив их в (27), для ударной волны, получим скорость распространения ударной волны, а для веера волн разрежения в (31) – получим скорость на крайней характеристике веера. Параметры внутри веера разрежения могут быть рассчитаны из (33) как функции переменной  $\xi$ .

В частном случае, для зависимости (23) можно записать (33) в виде:

$$\xi \mp c \pm 2(c - c^\alpha) = 0 \quad (36)$$

Откуда следует:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= u^\alpha + \frac{2}{3}(\xi - \xi^\alpha) \\ c(\xi) &= c^\alpha \pm \frac{1}{3}(\xi - \xi^\alpha) \end{aligned} \quad (37)$$

Для зависимости (23) можно записать (37) в виде:

$$f^i = \begin{cases} 2(c - c^i), & s < s^i \\ \frac{s - s^i}{\sqrt{\frac{\rho(s + s^i)}{2\gamma}}}, & s \geq s^i \end{cases} \quad (38)$$

Необходимо отметить, что в случае линейной зависимости  $p(s)$  можно аналитически получить соотношения, связывающие параметры до и после ударной волны.

Обозначим,

$$M = \frac{W - u^\alpha}{c^\alpha} \quad (39)$$

Несложно получить следующие зависимости:

$$\frac{s}{s^\alpha} = \frac{1}{4} M^2 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8}{M^2}} \right) \quad (40)$$

$$\frac{s^\alpha}{s} = -\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{8}{M^2}} \right) \quad (41)$$

$$u = u^\alpha + \frac{1}{2} Ma^\alpha \left( 3 - \sqrt{1 + \frac{8}{M^2}} \right) \quad (42)$$

Также можно получить выражения для числа  $M$  отраженной ударной волны в зависимости от параметров за падающей ударной волной.

$$M_{OB} = \frac{W - u}{c}$$

$$M_{OB} = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{u^2}{c^2} + 16} \quad (43)$$

Здесь знак «+» соответствует случаю отражения УВ от левой стенки «-» - от правой.

Отражение характеристик от границы расчетной области для веера волн разрежения схематически изображено на рис. 3 (пунктирными линиями обозначено продолжение характеристик вне расчетной области). Для областей 1, 2 решением являются начальные условия (25), для областей 3, 4 решение получено выше. Получим решение в областях 5, 6, 7 в предположении, что характеристики в области 5 являются прямыми линиями.

Рассмотрим характеристику  $\xi = u^1 - c^1$ .

Внутри веера

$$u = u^1 + \frac{2}{3} (\xi - u^1 + c^1)$$

$$c = c^1 - \frac{1}{3} (\xi - u^1 + c^1)$$

После отражения от жесткой стенки уравнение характеристики примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = u + c = u^1 + c^1 + \frac{1}{3} \xi - \frac{1}{3} (u^1 - c^1) = \frac{2}{3} u^1 + \frac{4}{3} c^1 + \frac{1}{3} \frac{x - x^c}{t}$$

То есть,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} u^1 + \frac{4}{3} c^1 + \frac{1}{3} \frac{x - x^c}{t} \quad (44)$$

Решив уравнение (44), получим уравнение движения отраженной характеристики:

$$x = x^c + Ct^{\frac{1}{3}} + (u^1 + 2c^1)t \quad (45)$$

где константа  $C$  найдена из условия  $x(t_1) = 0$

$$C = -\frac{x^c}{t_1^{\frac{1}{3}}} - (u^1 + 2c^1)t_1^{\frac{2}{3}},$$

здесь  $t_1 = -\frac{x^c}{u^1 - c^1}$

Найдем точку  $(t^*, x^*)$  :  $x - x^c = Ct^{\frac{1}{3}} + (u^1 + 2c^1)t = (u - c)t$

отсюда,  $t^* = \left(\frac{1}{C}((u - c) - (u^1 + 2c^1))\right)^{\frac{2}{3}}$ ,  $x^* = x^c + t^*(u - c)$

Уравнение характеристики I запишем из следующих соображений:

- 1) она проходит через точку  $(t^*, x^*)$
- 2) наклон характеристики равен  $u + c$

$$x = (u + c)t + x^* - (u + c)t^* = \xi_I t + b_I \tag{46}$$

здесь  $\xi_I = u + c$ ;  $b_I = x^* - (u + c)t^*$ .

Значение  $t_2$  найдем в предположении о том, что правая характеристика веера волн

разрежения прямолинейная:  $t_2 = -\frac{x^c}{u - c}$ .

Из соотношения на характеристике и равенства нулю скорости на границе области

следует, что наклон характеристики II равен  $\xi_{II} = c - \frac{1}{2}u$ .

Уравнение движения характеристики II можно записать в виде:

$$x = \left(c - \frac{1}{2}u\right)t - \left(c - \frac{1}{2}u\right)t_2 = \xi_{II}t + b_{II} \tag{47}$$

Здесь  $b_{II} = -\left(c - \frac{1}{2}u\right)t_2$

Найдем воображаемую точку пересечения отраженных характеристик  $(t^{**}, x^{**})$ :

$$t^{**} = \frac{b_{II} - b_I}{\xi_I - \xi_{II}}$$

$$x^{**} = \xi_I t^{**} + b_I$$

(48)

Тогда, считая, что решение представляет собой центрированный веер волн разрежения с центром в точке  $(t^{**}, x^{**})$  можно записать соотношения для параметров внутри отраженного веера:

$$u^4 = u + \frac{2}{3} \left( \frac{x - x^{**}}{t - t^{**}} - \xi_l \right) \quad (49)$$

$$c^4 = c \pm \frac{1}{3} \left( \frac{x - x^{**}}{t - t^{**}} - \xi_l \right)$$

В области 5:

$$u^5 = 0 \quad (50)$$

$$c^5 = c - \frac{1}{2} u$$

Необходимо отметить, что полученное полуаналитическое решение (49)-(50) хорошо совпадает результатами численных расчетов при  $t > t_2$ .

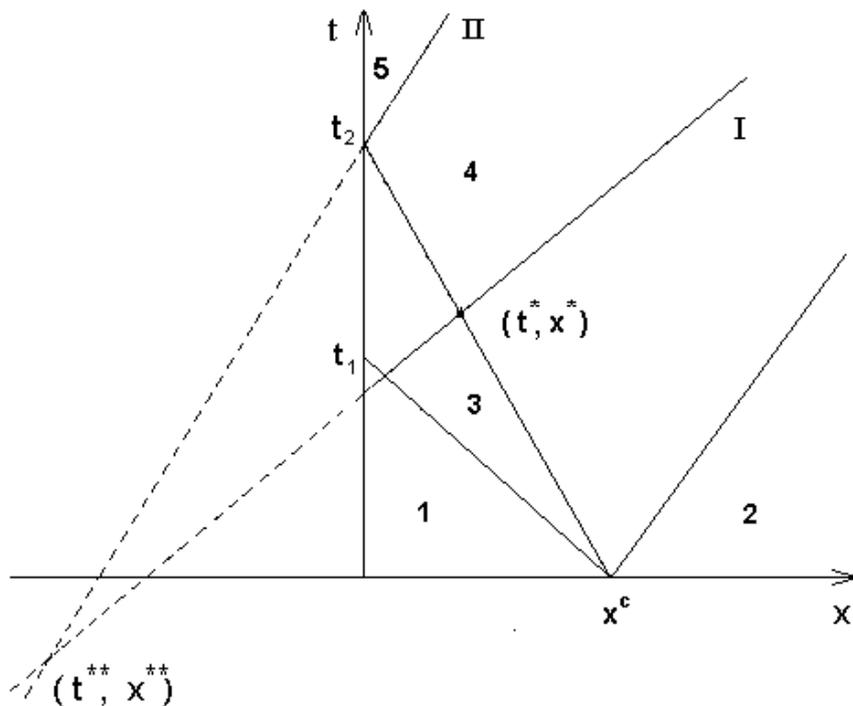


рис.3 Отражение характеристик от границ расчетной области

Рассмотрим результаты сравнения точного и численного решения.

На рис.4а приведено решение, полученное для конфигурации ВР-УВ (влево от разрыва движется веер волн разрежения (ВР); вправо – ударная волна (УВ)) до наступления момента времени, когда ВР и УВ достигнут границ сосуда.

На рис. 4а видно, что противопоточная схема довольно сильно «размазывает» решение как на ВР, так и на УВ, в то время как TVD-схема с лимитерами minmod и van Leer достаточно точно воспроизводит решение.

Кроме того, получено решение после отражения ВР и УВ от жестких стенок сосуда, которое также согласуется с численным решением (рис. 4б) Можно отметить небольшие ложные осцилляции численного решения, полученного с помощью лимитера superbee.

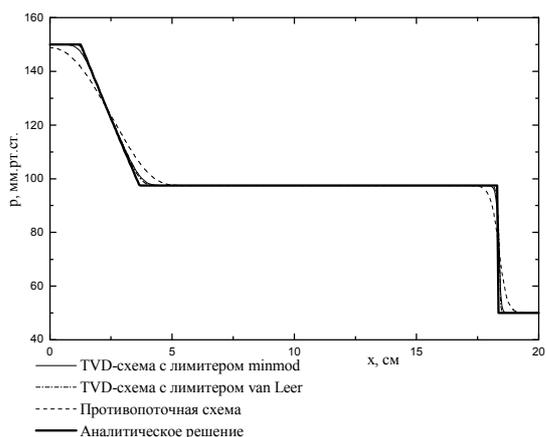


Рис. 4а. Распределение  $p$  по пространственной переменной в момент времени  $t=0.0138$  сек,  $CFL=0.5$ ,  $N_x = 400$  (конфигурация ВР-УВ)

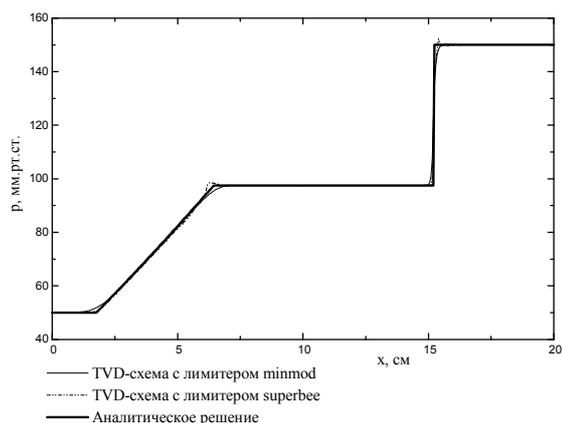


Рис. 4б. Распределение  $p$  по пространственной переменной в момент времени  $t=0.0252$  сек  $CFL=0.5$ ,  $N_x = 400$  (конфигурация ВР-УВ после отражения от жестких стенок)

### Моделирование сердечного выброса. Линейная модель.

Рассмотрим более простую, линейную, модель гемодинамики:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_e + f_R \\ s = s(p) \end{cases} \quad (51)$$

Линейная модель (51) получена из (1)-(2) в пренебрежении конвективными слагаемыми и в предположении о постоянной скорости распространения пульсовой

волны  $c_0 = \sqrt{\left(\frac{dp}{ds}\right)_0 \frac{s_0}{\rho}}$ .

Как будет показано в дальнейшем, несмотря на такие сильные допущения, линейная модель довольно неплохо описывает гемодинамику крупных сосудов.

Отметим, что ранее подобные модели применялись для описания эволюции малых отклонений от стационарных решений гемодинамики. В этой связи выделим работу [17], в который проведен детальный анализ линеаризованных уравнений.

В качестве тестовой для системы уравнений (51) рассмотрим задачу со следующими граничными условиями:

1) на левой границе известен расход крови, описываемый следующей

зависимостью (рис. 5), такой что выполняется  $\int_{t-\psi}^{t-\psi+0.3} Q_L(t) dt = 80 \text{ см}^3$  (здесь

$\psi = \left\{ \frac{t}{0.8} \right\}$ ,  $\{ \cdot \}$  - дробная часть). Здесь участки парабол соответствуют периоду систолы (выброс крови сердцем в кровеносную систему), участки, на которых расход равен нулю, соответствуют диастоле – периоду накопления сердцем крови. Такое граничное условие моделирует сердечный выброс в системе кровообращения человека [5].

Соответствующую указанным условиям зависимость расхода крови от времени на левой границе можно записать в следующем функциональном виде (расход приведен в  $\text{см}^3 / \text{с}$ ):

$$Q_L(t) = \begin{cases} 8000 \cdot \left( -\frac{5}{9} \psi^2 + \frac{1}{3} \psi \right), & \psi \leq 0.3 \\ 0, & \psi > 0.3 \end{cases} \quad (52)$$

2) На правой границе поддерживается постоянное давление  $p_R = 100 \text{ мм.рт.ст.}$

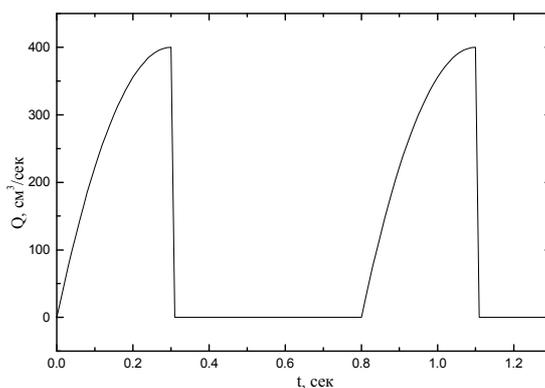


Рис. 5. Расход крови на левой границе сосуда

В начальный момент времени гемодинамические параметры постоянны:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 10 \text{ [см / с]} \\ s(x,0) &= 5 \text{ [см}^2 \text{]} \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь величина площади поперечного сечения сосуда, как и в

других тестах, соответствует аорте человека. Как

показывают расчеты,

проведенные в настоящей работе, при данных условиях влияние вязких эффектов в сосуде пренебрежимо мало.

Запишем систему уравнений (51), пренебрегая вязкостью, в виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (54)$$

где  $q = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & \rho c_0^2 \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}$  (55)

Используя характеристическое расщепление, систему уравнений (51) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (56)$$

где  $v = R^{-1}q$  - характеристические переменные,

(57)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & -c_0 \end{pmatrix} - \text{матрица собственных значений матрицы Якоби}$$

$$R = \begin{pmatrix} \rho c_0 & -\rho c_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица правых собственных векторов} \quad (58)$$

$$R^{-1} = \frac{1}{2\rho c_0} \begin{pmatrix} 1 & \rho c_0 \\ -1 & \rho c_0 \end{pmatrix} - \text{матрица левых собственных векторов.}$$

Используя характеристическое представление (56), можно получить аналитическое решение рассматриваемой задачи. Поскольку матрица  $\Lambda$  диагональная, система распадается на два независимых скалярных уравнения, каждое из которых является уравнением переноса с постоянными коэффициентами и имеет следующее решение:

$$v_i = v_i(x - \lambda_i t, 0) \quad i = 1, 2 \quad (59)$$

Это решение имеет место до отражения от границ. Для того, чтобы получить решение после отражений, были проанализированы две возможные конфигурации (для каждого из уравнений) отражений характеристик от границ расчетной области (см. рис. 6)

Заметим, что, поскольку характеристиками линеаризованной системы уравнений являются прямые с наклонами  $\lambda_1 = c_0$  и  $\lambda_2 = -c_0$ , точное решение настоящей задачи может быть представлено в виде композиции операторов отражений от границ расчетной области. Будем обозначать оператор отражения от левой границы  $\tilde{\mathcal{L}}(\cdot)$ , от правой границы  $\tilde{\mathcal{R}}(\cdot)$ .

Домножив (56) на  $R$  слева, получим

$$\begin{aligned} \rho c_0 (v_1 - v_2) &= p \\ v_1 + v_2 &= u \end{aligned} \tag{60}$$

Рассмотрим  $\tilde{R}(\cdot)$ . Из (60) получим соотношение на правой границе  $\rho c_0 (v_1 - v_2) = p_R$ , отсюда

$$v_2 = \tilde{R}(v_1, t) = v_1 - \frac{p_R}{\rho c_0} \tag{61}$$

Рассмотрим  $\tilde{L}(\cdot)$  Из (60) получим:

$$\begin{cases} \rho c_0 (v_1 - v_2) = p \\ v_1 + v_2 = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho c_0 (v_1 - v_2) = p \\ v_1 + v_2 = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho c_0 (v_1 - v_2) = p \\ v_1 + v_2 = u \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение относительно  $v_1$ , получим следующее соотношение для отражения от левой границы:

$$v_1 = \tilde{L}(v_2, t) = 0.5 \left( \frac{\beta}{\rho c_0} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\rho^2 c_0^2} + 4 \left( v_2^2 + v_2 \frac{\beta}{\rho c_0} + \frac{\gamma}{\rho c_0} Q_L(t) \right)} \right) \tag{62}$$

Рассмотрим первое уравнение из системы уравнений (56). Пусть мы ищем решение в точке  $(x, t)$ . Если из точки выпустить характеристику, соответствующую положительному собственному значению, то возможны две конфигурации отражений её от границ расчетной области, представленные на рисунке 6. Здесь и далее будем обозначать  $[ \cdot ]$  - целую часть,  $\{ \cdot \}$  - дробную часть.

Для первого случая  $\left( \begin{matrix} t \\ t_2 \\ 2t^* \end{matrix} \right) \left\langle t^* \right\rangle$ :

$$v_1 = \tilde{L}(\underbrace{\tilde{R}(\dots \tilde{L}(\tilde{R}(\tilde{L}(\tilde{R}(\tilde{L}(v_2^0, t_1), t_1 + t^*), t_1 + 2t^*), t_1 + 3t^*), t_1 + 4t^*) \dots)}_{\left[ \frac{t_2}{2t^*} \right]}, t_2) \tag{63}$$

Для второго случая  $\left( \left( \frac{t}{2} \right) \right)_{t_1^*}^{\phi}$ :

$$v_1 = \underbrace{\tilde{L}(\tilde{R}(\dots \tilde{L}(\tilde{R}(\tilde{L}(\tilde{R}(v_1^0, t_1), t_1 + t^*), t_1 + 2t^*), t_1 + 3t^*) \dots))}_{[\frac{t_2}{2t^*}] + 1}, t_2) \quad (64)$$

здесь  $t^* = \frac{L}{c_0}$   $t_2 = t - \frac{x}{c_0}$   $t_1 = \left( \frac{t}{2} \right)_{t_1^*}^{\phi}$   $v_{1,2}^0$  - начальные значения в точке  $(x_0, t_0)$

Аналогично для второго уравнения из системы уравнений (56). Для первого случая

$\left( \left( \frac{t}{2} \right) \right)_{t_1^*}^{\phi}$ :

(65)

Для второго случая  $\left( \left( \frac{t}{2} \right) \right)_{t_1^*}^{\phi}$ :



(66)

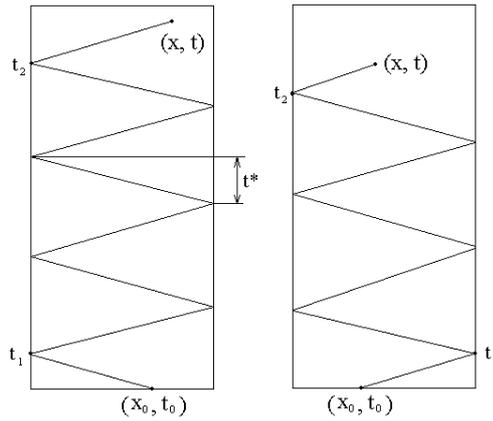


Рис. 6 Отражения характеристики, выпущенной из точки  $(x, t)$  с положительным наклоном, от границ расчетной области для линейризованной системы уравнений

На рис. 7 представлены результаты численного решения задачи, полученные с использованием лимитера `minmod` на дробных сетках. Сплошной линией показано точное решение. Наблюдается сходимость численного решения к точному.

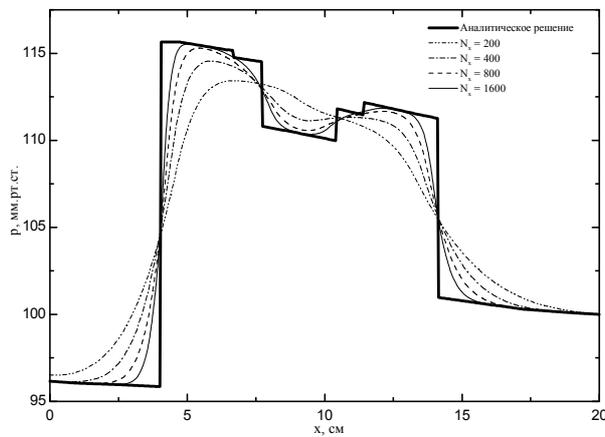


рис. 7. Распределение  $p$  по пространству в момент времени  $t=5$  сек. Решение получено с помощью TVD-схемы с лимитером `minmod`  $CFL=0.5$ .

В результате проведенного ряда численных экспериментов были вычислены осредненные по циклу значения погрешности в среднеквадратичной норме

$$\|\varepsilon\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N_x + 1} \sum_{i=1}^{N_x+1} (\varepsilon_i)^2}, \text{ где } \varepsilon_i \text{ относительная погрешность в } i\text{-ом узле по пространству)}$$

при различных сеточных параметрах (рис.8).

Полученные результаты позволяют говорить о сходимости методов. Видно также, что, начиная с CFL=0.5, дальнейшее измельчение шага по времени практически не снижает погрешность численного решения.

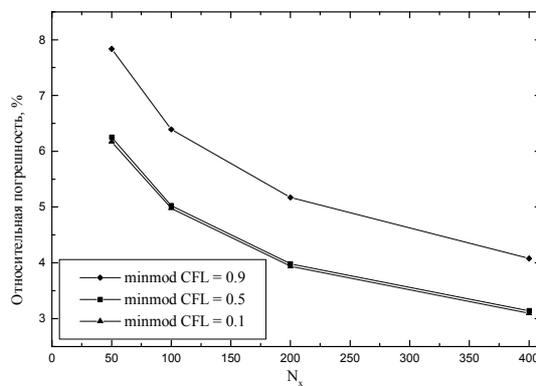


Рис. 8. Зависимость относительной погрешности при различных значения CFL от разбиения по пространству.

Сравнение результатов, полученных с использованием различных лимитеров, показано на рис. 9. Здесь же приведена кривая, полученная для противопоточной схемы первого порядка точности по пространству. На графике наблюдаются небольшие отличия между кривыми, соответствующим различным лимитерам. Видно, что для всех рассмотренных лимитеров, за исключением minmod, имеют место ложные осцилляции решения. Заметим, что во всех расчетах ограничители применялись к физическим переменным.

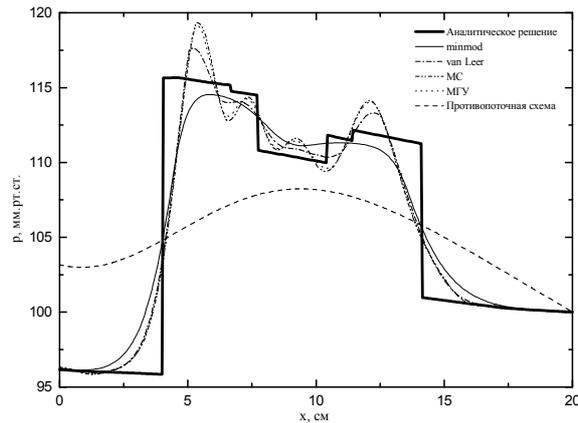


рис. 9 Распределение  $p$  по  $x$  в момент времени  $t = 5$  сек,  $CFL=0.5$ ,  $N_x = 400$ .

Зависимости погрешности численного решения от времени и пространственного разбиения для лимитеров minmod и Van Leer показаны на рис. 10,11 соответственно.

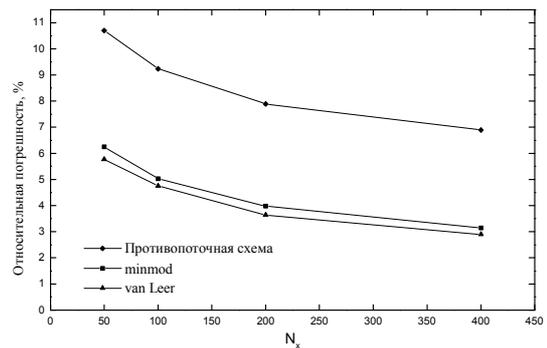
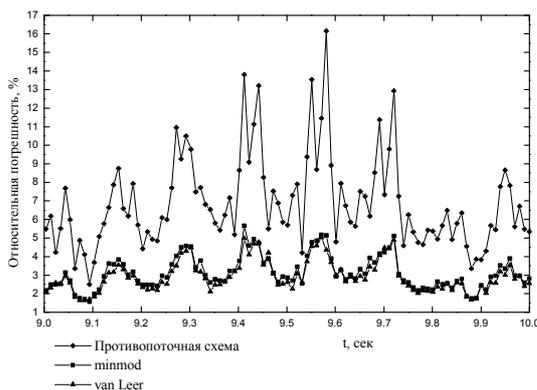


рис. 10 Распределение относительной погрешности методов, вычисленной в среднемквдратичной норме, по времени пространству (рис. 11 Зависимость относительной погрешности при  $CFL=0.5$  от разбиения по пространству) ( $CFL=0.5$ ,  $N_x = 400$ )

Видно, что использование более острого лимитера van Leer практически не снижает погрешность решения. Таким образом, по результатам, приведенным в данном разделе, можно сделать следующие выводы: поскольку противопоточная схема первого порядка точности сильно размывает решение, переход к монотонизированным схемам второго порядка оправдан, однако увеличение «остроты» лимитеров (в смысле точности воспроизведения разрывного решения) при условии их применения к физическим переменным в задачах рассматриваемого класса нецелесообразно.

### Моделирование сердечного выброса. Нелинейная модель.

Решается нелинейная система уравнений (1)-(2) с граничными условиями, рассмотренными в предыдущем разделе. Поскольку получение аналитического решения данной задачи затруднительно, основное внимание здесь уделяется сравнительному анализу различных методов численного решения. На рис. 12, 13 представлены результаты расчетов, проведенных с использованием противопоточной схемы первого порядка по пространству, традиционного метода (без монотонизации) второго порядка (схема Мак-Кормака) по пространству, и монотонизированной схемы второго порядка (TVD-схема с ограничителем minmod).

На рисунках отчетливо видно, что применение немонотонной схемы второго порядка приводит к возникновению ложных осцилляций решения, а применение схем первого порядка - к «размазыванию» решения, и, как следствие, к необходимости проведения расчетов на очень мелких сетках. На рис. 12 можно наблюдать, что результат, полученный на сетке  $N_x = 200$  при числе Куранта 0.5 при помощи монотонизированной схемы второго порядка с ограничителем minmod, достигается в случае использования противопоточной схемы лишь при  $N_x = 3200$ . Заметим также, что использование немонотонных схем второго порядка приводит к значительному увеличению ложных осцилляций решения при уменьшении числа Куранта. Таким образом, и в случае нелинейной задачи гемодинамики можно говорить об актуальности использования монотонизированных схем повышенного порядка точности.

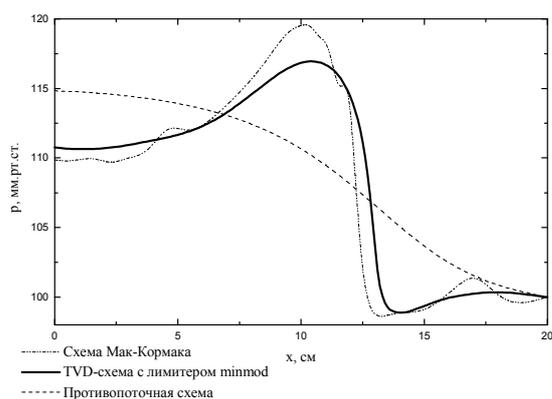


рис.13. Распределение давления по длине сосуда в момент времени  $t=4.95$  сек (CFL=0.5).

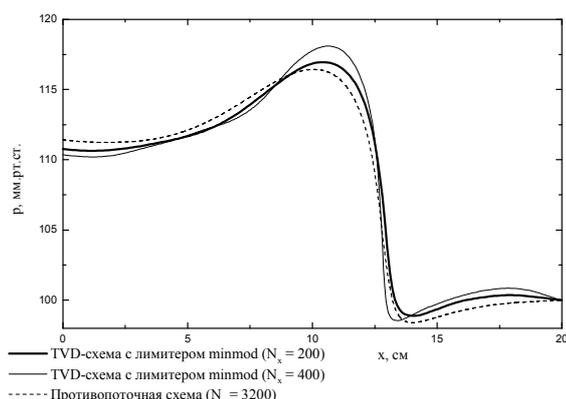


рис.12. Распределение давления по длине сосуда в момент времени  $t=4.95$  сек

(CFL=0.5).

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что для получения высокого пространственного разрешения даже при использовании схем второго порядка требуются довольно мелкие сетки. Однако, если необходима оценка временных характеристик гемодинамических параметров (частота, амплитуда колебаний), то удовлетворительные результаты можно получить и на достаточно грубых сетках. Это проиллюстрировано на рис. 14, где приведены зависимости давления от времени в центре сосуда, полученные на мелкой (сплошная кривая, сетка  $N_x = 200$ ) и грубой (штриховая кривая –  $N_x = 20$ ) сетках.

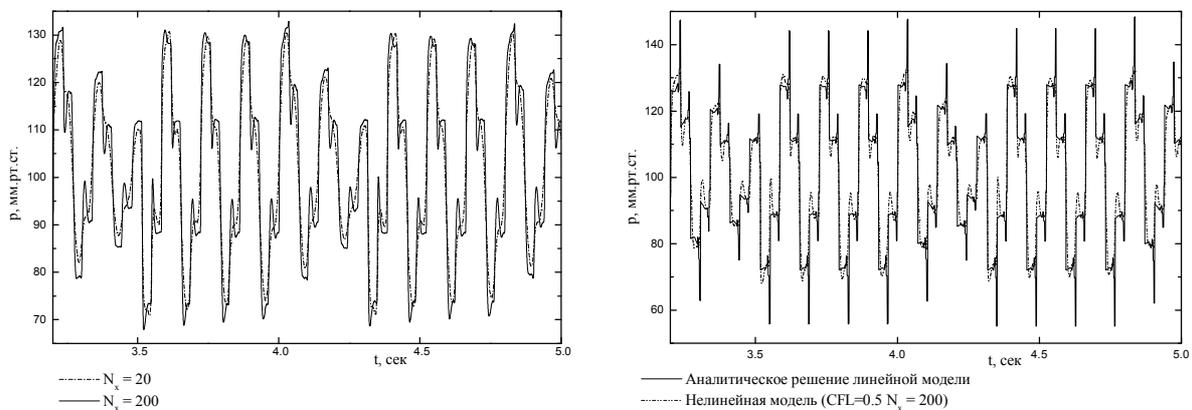


рис. 15. Распределение артериального давления по времени в центре сосуда (TVD-схема второго порядка с лимитером minmod). CFL=0.7,  $N_x = 200$ .

рис. 14. Распределения давления по времени в центре сосуда (CFL=0.7).

В заключение данного раздела приведем результаты сравнительного анализа решений полученных с использованием нелинейной модели и более простой, линейной, модели, рассмотренной в предыдущем разделе. Результаты, полученные для задачи, моделирующей сердечный выброс, представлены рис. 15. Видно, что частотные свойства решений очень близки для обеих моделей. Различия проявляются в амплитудах. Как и следовало ожидать, линейная модель дает несколько завышенные значения.

***Многомасштабное моделирование. Сопряжение 0-мерной модели системы кровообращения в целом и одномерной модели одиночного сосуда.***

***0-мерная модель системы кровообращения в целом***

Граничные условия, с которыми решались рассмотренные в предыдущем разделе задачи, являются в большей мере тестовыми и не отвечают реальным процессам, происходящим в кровеносной системе. Для постановки адекватных граничных условий необходимо учитывать взаимосвязь исследуемого сосуда с сопряженными участками. Наиболее эффективный путь решения этой проблемы – сопряжение уравнений гемодинамики одиночного сосуда с уравнениями, описывающими кровеносную систему в целом. Во введении отмечалось, что существуют два основных класса математических моделей гемодинамики кровеносной системы – модели, построенные на нестационарных одномерных по пространству уравнениях типа (1)-(2) для каждого из участков и 0-мерные модели, в которых временная эволюция средних по пространству гемодинамических параметров на каждом элементарном участке описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим 0-мерную модель, предложенную в работе [18]. Модель включает шесть основных участков, каждый из которых характеризуется двумя параметрами - артериальным давлением и расходом крови. Таким образом, кровеносная система описывается системой из двенадцати ОДУ:

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{s_1 z_1}{(R_l + R_1)} - y_2 & L_1 \frac{dy_2}{dt} = y_1 - R_2 y_2 - y_3 \\ C_2 \frac{dy_3}{dt} = y_2 - y_4 & L_2 \frac{dy_4}{dt} = y_3 - R_3 y_4 - y_5 \\ C_3 \frac{dy_5}{dt} = y_4 - \frac{s_2 z_2}{R_4} & \frac{dy_6}{dt} = \frac{s_2 z_2}{R_4} - \frac{s_3 z_3}{(R_r + R_5)} \\ C_4 \frac{dy_7}{dt} = \frac{s_3 z_3}{(R_r + R_5)} - y_8 & L_3 \frac{dy_8}{dt} = y_7 - R_6 y_8 - y_9 \\ C_5 \frac{dy_9}{dt} = y_8 - y_{10} & L_4 \frac{dy_{10}}{dt} = y_9 - R_7 y_{10} - y_{11} \\ C_6 \frac{dy_{11}}{dt} = y_{10} - \frac{s_4 z_4}{R_8} & \frac{dy_{12}}{dt} = \frac{s_4 z_4}{R_8} - \frac{s_1 z_1}{(R_l + R_1)} \end{array} \right. \quad (67)$$

В данной модели коэффициенты  $C_l$  характеризуют инерционные свойства крови,  $L_l$  - упругие свойства стенок сосудов,  $R_l$  - сопротивление течению крови.

Здесь  $C_1 = 0.22$ ,  $C_2 = 1.46$ ,  $C_3 = 20$ ,  $C_4 = 0.09$ ,  $C_5 = 2.67$ ,  $C_6 = 46.7$ ,  $L_1 = 0.000825$ ,  
 $L_2 = 0.0036$ ,  $L_3 = 0.00075$ ,  $L_4 = 0.00308$ ,  $R_1 = R_4 = R_5 = R_8 = 0.003751$ ,  $R_2 = 0.0675$ ,  
 $R_3 = 1$ ,  $R_6 = 0.03376$ ,  $R_7 = 0.1013$ ,  $R_l = 0.08$ ,  $R_r = 0.0175$

$$z_1 = U_l + y_{12}E_l - y_1, \quad z_2 = y_5 - U_r - y_6E_r, \quad z_3 = U_r + y_6E_r - y_7, \quad z_4 = y_{11} - U_l - y_{12}E_l -$$

перепады давления

$$U_l = 50A, \quad U_r = 24A$$

$$E_l = 0.1 + 1.375A, \quad E_r = 0.03 + 0.3288A$$

$$A = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi t}{t_s} \right) \right), & \text{если } t < t_s \\ 0, & \text{если } t \geq t_s \end{cases} \quad t_s = 0.4 - \text{ время систолы}$$

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } z_i > 0 \\ 0, & \text{если } z_i \leq 0 \end{cases} \quad i = 1..4 - \text{сердечные клапаны}$$

Начальные условия:

$$y_1 = 71.132, \quad y_2 = 8.89, \quad y_3 = 70.537, \quad y_4 = 67.359, \quad y_5 = 3.3268, \quad y_6 = 105.46, \\ y_7 = 13.416, \quad y_8 = 0.78612, \quad y_9 = 13.392, \quad y_{10} = 23.830, \quad y_{11} = 11.295, \quad y_{12} = 112.76$$

Данная модель использовалась в настоящей работе для сопряжения с одномерной моделью одиночного сосуда, описанной выше.

### **Сопряжение 1-мерной модели сосуда с 0-мерной моделью кровеносной системы**

В работе [19] предложен подход, позволяющий с помощью 0-мерной модели получать граничные условия для 1-мерной модели сосуда. Этот подход заключается в том, что 1-мерная модель сосуда «врезается» в 0-мерную модель сердечно-сосудистой системы на определенном участке. Гемодинамические параметры вычисляются путем сопряженного решения системы нелинейных уравнений в частных производных (1)–(2) и системы ОДУ(67).

С этой целью в системе ОДУ (67) соответствующие исследуемому участку уравнения (в данном случае первое и второе) модифицируются:

$$C_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{s_1 z_1}{(R_l + R_1)} - Q_L \tag{68}$$

$$L_1 \frac{dy_2}{dt} = p_R - R_2 y_2 - y_3$$

где  $Q_L$  - поток крови через левую границу сосуда,  $p_R$  - давление на правой границе сосуда.

В качестве начальных значений  $Q_L^0$  и  $p_R^0$  используются значения, полученные из решения одномерной модели кровеносного сосуда с граничными условиями  $p_L^0 = y_1^0$  и  $Q_R^0 = y_2^0$  (здесь верхний индекс указывает на шаг по времени).

Для перехода с  $k$ -го на  $k+1$ -ый временной слой применяется следующий алгоритм:

Сначала осуществляется переход на новый временной слой для модифицированной системы уравнений (67)-(68). При этом в правые части (68) входят  $Q_L^k$  и  $p_R^k$ .

Затем производится переход на новый временной слой для системы (1)-(2). При этом в качестве граничных условий выступают  $p_L^{k+1} = y_1^{k+1}$   $Q_R^{k+1} = y_2^{k+1}$ .

Оба этапа реализуются с использованием метода Рунге-Кутты второго порядка (17)-(18).

Результаты решения сопряженной задачи для аорты (данные для сосуда аналогичны принятым выше) представлены на рис. 16. Здесь показаны зависимости давления от времени в различных сечениях сосуда. В целом полученные результаты достаточно хорошо воспроизводят качественную картину изменения давления как в период систолы, так в период диастолы [20].

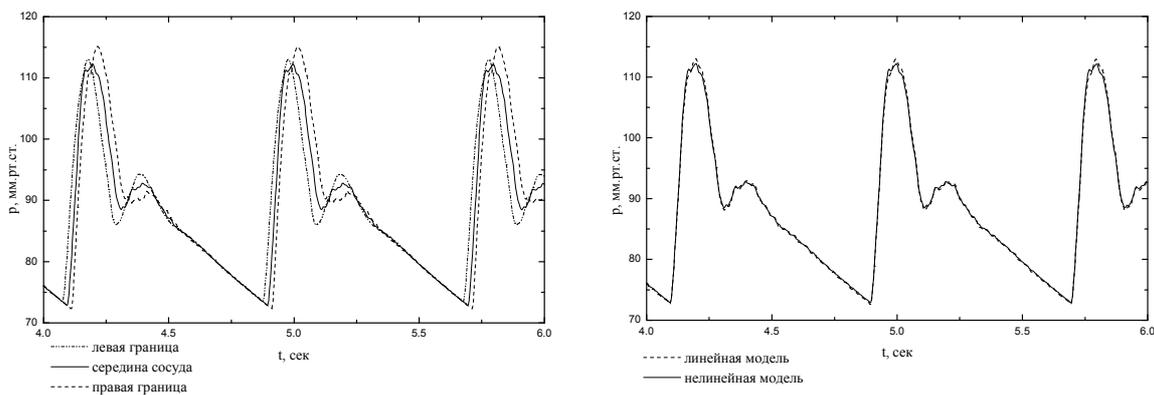


рис. 17. Сравнение нелинейной и линейной моделей в центре аорты. (TVD-схема с лимитером minmod,  $N_x = 50$ , CFL=0.5).

Рис. 16. Распределения давления по времени в аорте. (TVD-схема с лимитером minmod,  $N_x = 50$ , CFL=0.5).

В заключение проведем сравнительный анализ нелинейной и линейной моделей гемодинамики одиночного сосуда применительно к решению сопряженной задачи (рис.17). Видно, что в данном случае результаты хорошо согласуются как по частотам, так и по амплитудам. Это позволяет использовать свойства инвариантов Римана (57) линейной системы для приближенного анализа гемодинамических процессов.

### Список литературы

1. Каро К., Педли Т., Штотер Р., Сид У. Механика кровообращения. – М.: Мир, 1981. – с. 624.
2. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. – М.: Мир, 1983. – с. 400.
3. Винников В.В., Ревизников Д.Л. Неявный метод погруженной границы с фиктивными ячейками для решения задач о течении вязкой несжимаемой жидкости в сложных областях. //Электронный журнал «Труды МАИ», №17. – <http://www.mai.ru> (2004, 18.11).
4. Абакумов М.В., Гаврилюк К.В., Есикова Н.Б., Кошелев В.Б., Лукшин А.В., Мухин С.И., Соснин Н.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы. //Дифференциальные уравнения, 1997, 33(7), с. 892-898.
5. Абакумов М.В., Есикова Н.Б., Мухин С.И., Соснин Н.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностная схема решения задач гемодинамики на графе. //Препринт. – М.: Диалог-МГУ, 1998.
6. Волобуев А.Н. Биофизика., -Самара: «Самар. Дом печати», 1999. –с. 168.
7. Fukushima T. and Homma T.. A Logistic-type curve fits pressure-diameter relationship for relaxed and contracted dog renal arteries. // Biorheology, 1988, №25, pp. 37-48.
8. Liu B., Tang D. A numerical simulation of viscous flows in collapsible tubes with stenoses. // Applied Numerical Mathematics, 2000, № 32, pp. 87-101.

9. Rathish Kumar B.V., Quarteroni A., Formaggia L., and Lamponi D. On parallel computation of blood flow in human arterial network based on 1-D modelling. // *Computing*, 2003, 71, pp. 321-351.
10. Formaggia L., Nobile F., Quarteroni A., Veneziani A. Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis. // *Computing and Visualization in Science*, 1999, № 2, pp. 75-83.
11. *Advances in Computational Bioengineering. Vol.6. Wall – Fluid Interactions in Physiological Flows.* // Ed. by M.W. Collins, G. Pontrelli, M.A. Atherton. WITpress 2004, 204 pp.
12. Rathish Kumar B.V., Yamaguchi T., Liu H., Himeno R.. 3D parallel flow solver for LV hemodynamics. // *Riken Review*, 2001, № 40, pp. 29-33.
13. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа. // *Математическое моделирование*, 1989, т.1, №5, с.95-120.
14. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.
15. LeVeque R.J. *Numerical Methods for Conservation Laws, Lectures in Mathematics*, Birkhauser, Basel, 1992. – p. 194.
16. Gottlieb S., Shu C.W., Tadmor E.. Strong Stability Preserving High-order Time Discretization Methods. // *SIAM REVIEW*. – 2001, v. 43, №1, pp. 89–101.
17. Ашметков И.В., Мухин С.И., Соснин Н.В., Фаворский А.П., Хруленко А.Б. Частные решения уравнений гемодинамики. // *Препринт.* –М: Диалог-МГУ, 1999. – 43 с.
18. Avanzolini G., Barbini P., Cappello A. and Cevenini G. CADCS simulation of the closed-loop cardiovascular system // *International Journal of Biomedical Computations*, 1988, № 22, pp. 39-49.
19. Pontrelli G. A Multiscale Approach for Modelling Wave Propagation in an Arterial Segment. // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2004, v.7, №2, pp. 79-89.
20. Segers P., Verdonck P. Non-invasive estimation of total arterial compliance. // *von Karmann Institute Lecture Notes*, 1998-04, 1998.

*Астраханцева Елена Владимировна, аспирант кафедры вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (государственного технического университета);  
e-mail: astra\_lena@mail.ru;  
контактный телефон: 158-48-94;*

*Гидаспов Владимир Юрьевич, ведущий научный сотрудник кафедры вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н;  
e-mail: gidasov@k806.mainet.msk.su;  
контактный телефон: 158-48-94.*

*Ревизников Дмитрий Леонидович, профессор кафедры вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (государственного технического университета), д.ф.-м.н;  
e-mail: reviz@k806.mainet.msk.su;  
контактный телефон: 158-48-94.*