

УДК 004.51.7

Преобразование сигналов в информационной системе комплекса отслеживания движущихся объектов

И.Е. Богуславец, В.А. Вестяк

Аннотация: в данной работе описывается процесс сбора информации о движущихся летательных объектах, ее преобразование в цифровой вид. Рассмотрены основные методы преобразования: дискретное преобразование Фурье; быстрое преобразование Фурье (БПФ); преобразование Уолша-Фурье; дискретное преобразование Уолша (ДПУ). Исходя из предельного анализа, предлагается применять в датчиках процедуру быстрого преобразования Уолша, оно в силу своей простоты допускает аппаратную реализацию, способную выполнять преобразование в режиме реального времени.

Ключевые слова: комплекс отслеживания движущихся летательных объектов; дискретное преобразование Фурье; периодичная функция; быстрое преобразование Фурье; преобразование Уолша; функции Радемахера; матрица Адамара; быстрое преобразование Уолша.

Интенсивное развитие информационных технологий и их внедрение в различные отрасли производства, в том числе авиа- и ракетостроение, требует совершенствования алгоритмов преобразования информации.

Информационная система (ИС) комплекса отслеживания движущихся летательных объектов (КОДО) иерархически состоит из 3 уровней: установленные на территории работы КОДО средства обнаружения и фиксации первичной информации, так называемые датчики, подвижные информационные станции, осуществляющие непосредственную связь с датчиками, и информационный центр, связанный с подвижными информационными станциями, своими аналогами, и обладающий правом принятия решения.

Наименее технически оснащенными являются датчики. В их задачу входит сбор информации, ее преобразование к цифровому виду и передача на следующий уровень. Для обеспечения наибольшей эффективности необходимо осуществить преобразование информации и передачу ее в сжатом виде. Поэтому возникает задача выбора метода преобразования информации.

Рассмотрим дискретное преобразование Фурье. Для дискретизированного с шагом $\Delta t = \frac{T}{N}$ сигнала $x_d(t)$ получим:

$$x_d(t) = x(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\frac{2\pi}{\Delta t}t} = x(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imN\Omega t} \quad (1)$$

Тогда, спектр дискретизированного сигнала будет:

$$S_d(n\Omega) = \frac{1}{T} \int_0^T x_d(t) e^{-in\Omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^T x_d(t) e^{-i(n-mN)\Omega t} dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S[(n-mN)\Omega] \quad (2)$$

Спектр дискретизированного сигнала представляет собой дискретную периодичную функцию, образованную периодическим повторением спектра исходного сигнала $S(n\Omega)$ с периодом $N\Omega$.

Так как, $S_d(n\Omega)$ периодична с периодом $N\Omega = N\frac{2\pi}{T}$, то суммирование можно произвести на интервале $[m=0; n=\overline{0, N-1}]$. Тогда:

$$x(k\Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} S_d(n\Omega) e^{i\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3)$$

Аналогично, из (1) при $t = k\Delta t, 0 \leq n \leq N-1, m=0$ получим:

$$S_d(n\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta t_k} x(k\Delta t) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad (4)$$

где Δt_k обозначает интервал времени k -го отсчета.

Формулы (3) и (4) выражают точную зависимость между N отсчетами одного периода спектра дискретизированного сигнала и N выборочными значениями $x(k\Delta t)$. Эти выражения и представляют собой пару дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Обычно, формулы (3) и (4) записываются в несколько другом виде. Принимая шаг дискретизации по времени и частоте за 1 ($\Delta t = 1, \Omega = 1$) перепишем (3) и (4) в виде:

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} S_d(n) e^{i \frac{2\pi}{N} nk} \quad (5)$$

$$S_d(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} \quad (6)$$

На практике часто используется так называемое быстрое преобразование Фурье (БПФ) - это алгоритм эффективного вычисления спектральных коэффициентов ДПФ, позволяющий намного ускорить вычисления.

Пусть $\{x_k\}$ - конечная последовательность дискретных отсчетов континуального сигнала $x(t)$; $k = \overline{0, N-1}$, $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. ДПФ этой последовательности запишется в виде

(для простоты, множитель $\frac{1}{N}$ опущен):

$$X_m = \sum_{k=0}^{N-1} x_k W_N^{mk}, m = \overline{0, N-1} \quad (7)$$

Нетрудно заметить, что для вычисления N коэффициентов X_m требуется N^2 операций типа "комплексное сложение-умножение". Свойство периодичности ДЭФ W_N по обоим аргументам n и m позволяет уменьшить число необходимых операций. Периодичность позволяет записать матрицу ДЭФ $\|W_N^{mk}\|$ с минимальными фазами (для этого следует вычесть

2π из $\frac{2\pi}{N} mk$ целое число раз).

Разобьем исходную последовательность $\{x_k\}$ на две:

$$x_k^1 = x_k, k = \overline{0, N/2-1}$$

$$x_k^2 = x_{k+N/2}, k = \overline{0, N/2-1}$$

Тогда, N - точечное преобразование Фурье запишется в виде:

$$X_m = \sum_{k=0}^{N/2-1} x_k^1 W_N^{mk} + \sum_{k=0}^{N/2-1} x_k^2 W_N^{m(k+N/2)}$$

Так как $W_N^{\frac{Nm}{2}} = e^{-i\pi m}$, то:

$$X_m = \sum_{k=0}^{N/2-1} \left[x_k^1 + e^{-i\pi m} x_k^2 \right] W_N^{mk}$$

Воспользовавшись соотношением $W_N^2 = W_{N/2}$, отдельно для четных и нечетных

отсчетов ДПФ можно записать:

$$X_{2m} = \sum_{k=0}^{N/2-1} [x_k^1 + x_k^2] W_{N/2}^{mk} \quad (8)$$

$$X_{2m+1} = \sum_{k=0}^{N/2-1} \left\{ [x_k^1 - x_k^2] W_N^k \right\} W_{N/2}^{mk} \quad (9)$$

Отсюда видно, что четные и нечетные отсчеты N -точечного ДПФ можно получить из $\frac{N}{2}$ - точечных ДПФ-последовательностей:

$$y_k = x_k^1 + x_k^2, k = \overline{0, N/2-1}$$

$$z_k = [x_k^1 - x_k^2] W_N^k, k = \overline{0, N/2-1}$$

Процесс "деления отсчетов пополам" можно продолжить до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ. Процесс уменьшения "размерности" преобразования вдвое называется итерацией. Очевидно, что число необходимых итераций будет $\log_2 N$ и, следовательно, число необходимых операций "сложения-умножения" уменьшится до величины $N \log_2 N$.

На входе алгоритма отсчеты сигнала расположены в "естественном" порядке. Спектральные отсчеты, получаемые на выходе алгоритма расположены в двоично-инверсном порядке.

Описанный алгоритм называют алгоритмом БПФ с прореживанием по частоте. Можно также получить алгоритм БПФ с прореживанием по времени.

Рассмотрим теперь преобразование Уолша. Напомним о семействе функций Уолша, образующих в L_2 ортонормированный базис. Система кусочно-постоянных функций

$$\{W_n(\Theta)\}, \Theta = \frac{t}{T}, t \in [0; T]$$

Система $\{W_n(\Theta)\}$ является полной и ортонормированной в $L_2[0;1]$ и обладает тем свойством, что ряд Фурье:

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n W_n(\Theta)$$

где

$$c_n = \int_0^1 x(\Theta) W_n(\Theta) d\Theta$$

для непрерывной функции $x(\Theta)$ равномерно сходится по подпоследовательности частичных сумм с номерами $n = 2^\nu, \nu \in N$.

Наглядно, функции Уолша описывают прямоугольный сигнал со значениями амплитуды ± 1 и переменной скважностью.

Функции Уолша определяются следующим образом:

$$W_n^*(\Theta) = 0$$

$$W_n^*(\Theta) = \prod_m R_{v_m}(\Theta), n > 1 \quad (10)$$

где

$$R_k(\Theta) = \text{sign}(\sin 2^{k+1} \pi \Theta), k \in N_0 \quad (11)$$

$$n = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \dots + 2^{\nu_m}, \nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_m$$

и набор чисел ν_m образуют двоичное представление числа n .

Функции (11) $R_k(\Theta)$ называются функциями Радемахера. Функции Радемахера, хотя и являются ортогональными в $L_2[0; 1]$, не образуют полной системы. Функции Радемахера называют еще меандровыми функциями, поскольку они описывают меандровые сигналы с полупериодами $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$. Меандром традиционно называется прямоугольный сигнал у которого смена значения амплитуды происходит через равные промежутки времени.

Характеристической особенностью функций Уолша является то, что число перемен знака функции W_n на отрезке $[0; 1]$ в точности равно n и номер функции Уолша можно рассматривать как аналог удвоенной частоты для синусоидальной функции.

Определение (6.1) задает систему функций Уолша W_k^* в нумерации Уолша-Пэли (Paley). При рассмотрении преобразования Уолша используются и другие способы построения функций Уолша нужного порядка.

На практике, наиболее часто используется схема построения функций Уолша в нумерации Адамара. Для построения функций Уолша в нумерации Адамара сначала несколько переопределим аргументы функций Уолша. Выше функции Уолша задавались целочисленным номером n и "безразмерным временем" $\Theta \in [0; 1]$. Однако, поскольку

функция Уолша кусочно-постоянна на интервалах $\left[\frac{k}{2^\nu}; \frac{k+1}{2^\nu}\right], k \in N_0$, то можно рассмат-

ривать функции Уолша как функции дискретного аргумента $W_n^*(k)$ или $W_n(k)$, имея ввиду,

что $\Theta_k \in \left[\frac{k}{2^v}; \frac{k+1}{2^v} \right], k = 0, 1, 2, \dots, 2^v - 1$.

В таком представлении, первым 2^v функциям Уолша можно сопоставить квадратная матрица $\|H_v\|$ порядка $N = 2^v$. Элементами i -той строки этой матрицы являются значения i -той функции Уолша (в нумерации Уолша или Пэли) на двоичных участках интервала. Матрицы $\|H_v\|$ называются матрицами Адамара. Матрицы Адамара ортогональны

$$\|H_v\| \|H_v^T\| = \|I\|$$

где I - единичная матрица и симметричны.

Для матриц Адамара порядка 2^v существует итеративная процедура построения на базе элементарной матрицы порядка 2:

$$\|H_1\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \|H_{v+1}\| = \begin{pmatrix} H_v & H_v \\ H_v & -H_v \end{pmatrix} \quad (12)$$

При таком построении, строки матрицы Адамара представляют собой значения Функций Уолша в нумерации Адамара. Обозначим систему функций Уолша в нумерации Адамара (систему Уолша-Адамара) через $H_h(k)$.

Функции $H_h(k)$ можно строить еще и следующим образом:

$$H_h(k) = (-1)^{\sum_{i=0}^{v-1} h_i k_i} \quad (13)$$

где h_i и k_i - коэффициенты двоичного разложения чисел h и k .

Преобразование Уолша можно выразить в матричном виде. Уравнение (14) определяет прямое преобразование Уолша, а уравнение (15) - обратное преобразование.

$$\vec{C} = \frac{1}{N} \|H_v\| \vec{X} \quad (14)$$

$$\vec{X} = \frac{1}{N} \|H_v^T\| \vec{C} \quad (15)$$

Здесь: \vec{C} - вектор-столбец коэффициентов Уолша-Фурье;

$\|H_v\|$ - матрица Адамара порядка N ;

$\|H_v^T\|$ - транспонированная матрица Адамара;

\vec{X} - вектор-столбец средних значений сигнала на участках длиной $\Delta t = T/N$;

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} x(t) dt \quad (16)$$

\tilde{x} - вектор-столбец значений восстановленного сигнала на двоичных участках $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$.

Дискретное преобразование Уолша (ДПУ) отличается от рассмотренного выше преобразования Уолша-Фурье тем, что вместо вектора средних значений \tilde{X} сигнала используется вектор-столбец \vec{X} выборочных значений $x(t_k), t_k \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$. Обычно, выборка берется в середине интервала.

ДПУ в матричной форме записывается аналогично (14) и (15):

$$\vec{C} = \frac{1}{N} \|H_v\| \vec{X} \quad (17)$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{N} \|H_v^T\| \vec{C} \quad (18)$$

Различие в преобразованиях определяет сферу их применения. Если преобразование Уолша-Фурье используется в основном в дискретно-аналоговых системах (с возможностью аппаратного усреднения по интервалу дискретизации), то ДПУ предпочтительно применять в цифровых системах обработки сигнала.

По аналогии с алгоритмом быстрого преобразования Фурье, алгоритм быстрого преобразования Уолша (БПУ) позволяет эффективно вычислять коэффициенты дискретного преобразования Уолша (17) и (18). Непосредственное вычисление компонент вектора \vec{C} , используя (17), требует N^2 сложений и вычитаний. Преобразование Уолша вычислительно проще преобразование Фурье, однако использование ортогональности и симметричности матриц Адамара позволяет сократить число необходимых операций.

В монографии [1] развит абстрактный алгебраический подход к ортогональным преобразованиям, основанный на алгебраических свойствах рассматриваемых преобразований. Показывается, что при адекватном выборе базиса возможно сократить количество необходимых операций до $N \log_2 N$, где N - количество вычисляемых коэффициентов. Для наших целей такой подход может оказаться излишне усложненным и мы можем ограничиться более простыми соображениями.

Для матрицы $\|H_3\|$ можем записать:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Матрица $\|H_3\|$ может быть разложена на множители:

$$H_3 = \begin{pmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & -H_2 \end{pmatrix}$$

Аналогично:

$$H_2 = \begin{pmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & -H_1 \end{pmatrix}$$

Поэтому:

$$H_3 = \begin{pmatrix} I_r & I_r \\ I_r & -I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & I_r & 0 \\ I_r & -I_r & 0 \\ 0 & I_r & I_r \\ 0 & I_r & -I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 \end{pmatrix} = G_2 G_1 G_0 \quad (19)$$

где $\|I_r\|$ - единичная матрица размером $2^r \times 2^r$.

Матрица $\|G_r\|$ называются матрицей Гуда и представляет собой блочно-диагональную матрицу с блоками $H_1 \times I_r$. Вообще, матрицы $\|G_r\|$ являются квадратными, ортогональными и симметричными. Каждый блок является ортогональной матрицей.

Для матрицы Адамара $\|H_r\|$ справедливо разложение:

$$H_n = G_{n-1} G_{n-2} \times \dots \times G_0 = \prod_{r=0}^{n-1} G_r \quad (20)$$

Тогда, вектор $\vec{C} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$, $n = 2^v$, $v \in N_0$ может быть представлен в виде:

$$\vec{C} = G_{n-1} G_{n-2} \times \dots \times G_0 \times \vec{x} \quad (21)$$

Уравнением (21) определяется алгоритм быстрого преобразование Уолша. Граф

преобразования Уолша, соответствующий разложению (19) изображен на рис.1. Компоненты вектора отсчетов подаются на вход алгоритма в естественном порядке, а компоненты вектора коэффициентов Уолша \vec{C} - в порядке Адамара.

Нетрудно заметить непосредственную связь между ДПФ и ДПУ. Однако, если в результате ДПФ мы получаем именно частотный спектр сигнала, то в результате БПУ мы получаем "разложение по средним значениям".

Преобразование Уолша намного быстрее преобразования Фурье поскольку не требует операции умножения и, в силу своей простоты, допускает аппаратную реализацию, способную выполнять преобразование в режиме реального времени.

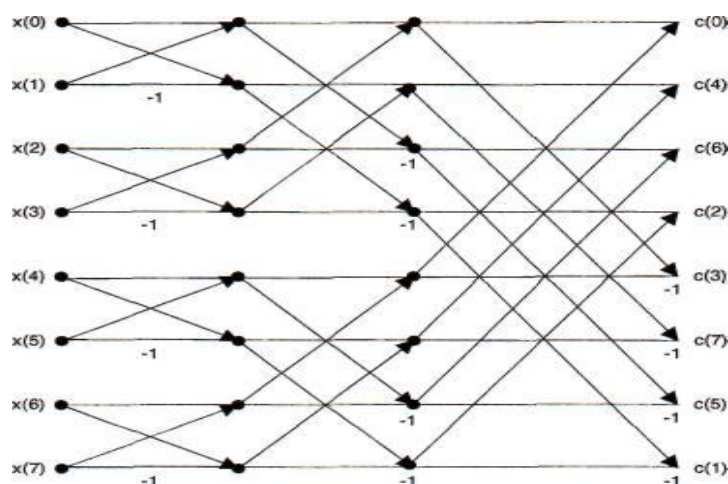


Рис. 1: 8-и точечное БПУ

Исходя из предельного анализа представляется целесообразным применять в датчиках процедуру быстрого преобразования Уолша.

Библиографический список

- [1] П. Ноден, К. Китте. Алгебраическая алгоритмика. М.: Мир, 1999. – 720 с.
- [2] Романюк Ю.А. Дискретные преобразования сигналов. М.: изд-во МФТИ, 1981. - 92 с.
- [3] И.М. Виноградов (ред.). Математическая энциклопедия. М.: изд-во Советская энциклопедия 1985. – 623 с.
- [4] Романюк Ю.А. Основы обработки сигналов. МФТИ, М., 1989. - 92 с.
- [5] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Высшая школа, 1989. – 352 с.
- [6] Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие. - СПб.: Питер, 2003. - 608с.

Богуславец Ирина Евгеньевна, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета)

МАИ, Волоколамское шоссе, д. 4; Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.(499)158-46-47, (499)195-91-65, e-mail: bogyslavets@yandex.ru, kaf311@yandex.ru

Вестяк Владимир Анатольевич, доцент, заведующий кафедрой Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.

МАИ, Волоколамское шоссе, д. 4; Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.(499)158-46-47, (499)195-91-65, e-mail: kaf311@yandex.ru