Труды МАИ. Выпуск № 108 https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4

УДК 629.7.015.3 534-16

О применении специальных обобщенных координат для исследования совместных изгибных колебаний лопастей несущего винта, закрепленного на упругодемпфирующей опоре

Загордан А.А.[1*], Загордан Н.Л.[2]**

[1]*Московский вертолетный завод им. М.Л. Миля,*

ул. Большая Пионерская, 1, Москва, 115054, Россия

[2]*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,*

ул. Вавилова, 44, кор.2, Москва, 119333, Россия

**e-mail: a.zagordan@gmail.com*

***e-mail: zagordann@gmail.com*

Статья поступила 01.10.2019

Аннотация

Рассматриваются связанные через опору – «пилон - несущий винт» изгибные колебания лопастей несущего винта вертолета, как естественно закрученных стержней, в плоскости тяги и плоскости вращения. Представлена общая система уравнений колебаний для динамической системы «несущий винт – опора», расчетные резонансные диаграммы несущего винта с соответствующими амплитудно-частотными характеристиками в виде зависимостей изменения коэффициентов динамичности по частоте для нагрузок, проходящих на вал несущего винта.

Для преобразования системы линейных интегро - дифференциальных уравнений с частными производными и периодическими коэффициентами, описывающими совместные изгибные колебания лопастей несущего винта и втулки несущего винта на упруго-демпфирующей опоре, в систему обыкновенных дифференциальных

уравнений с периодическими коэффициентами использован метод Бубнова-Галеркина. Также показано преобразование исходных обобщенных координат, описывающих колебания каждой отдельной лопасти во вращающейся системе координат, в специальные обобщенные координаты, описывающие совместные колебания всех лопастей несущего винта.

Для анализа получаемых результатов расчетов на вынужденные колебания и сопоставления с экспериментальными данными записей вибраций на вращающихся частях втулки, рассматривается характер движения и колебательных процессов втулки и лопастей во вращающейся и в невращающейся системах координат. Представлены графики, показывающие изменение траектории движения точки на лопасти и характера колебательного процесса при переходе из вращающейся системы в невращающуюся систему.

Проведены расчеты резонансных диаграмм и амплитудно-частотных характеристик для вертолета Ми-38 с шести и пяти лопастным несущим винтом, имеющего гибкие пластиково-композиционные лопасти. Проведен сравнительный анализ динамической реакции системы «несущий винт-опора» с различным числом лопастей с построением соответствующих амплитудно-частотных характеристик.

На основании сравнительного анализа динамической реакции системы «несущий винт-опора» для двух вариантов числа лопастей несущего винта для вертолета МИ-38, сделан вывод, о предпочтительности шестилопастного несущего винта пятилопастному по условиям вибраций.

Ключевые слова: вибрации, композиционные лопасти, совместные колебания, несущая лопасть, метод Бубнова-Галеркина, обобщенная система координат.

Введение

На этапе проектирования вертолета, при решении проблемы вибраций вертолета, действующих с проходными гармониками несущего винта (НВ), возникает необходимость проведения анализа совместных колебаний лопастей НВ и фюзеляжа вертолета, что в свою очередь приводит к рассмотрению задачи о собственных и вынужденных колебаниях винта на упругодемпфирующей опоре.

В данной работе рассматриваются связанные через опору – «пилон – НВ» изгибные колебания лопастей НВ, как естественно закрученных стержней, в плоскости тяги (ПТ) и плоскости вращения (ПВ). Представлена общая система уравнений колебаний для динамической системы «НВ-опора» в декартовой системе координат и основные преобразования для перехода к специальным обобщенным координатам НВ, как механической системы, обладающей круговой симметрией [1, 2]. Показаны расчетные резонансные диаграммы (РД) НВ на примере вертолета Ми-38 в невращающейся системе координат и соответствующие амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) в виде зависимостей изменения коэффициентов динамичности по частоте для нагрузок, проходящих на вал НВ. Для основных обобщенных координат, представлены соответствующие формы колебаний НВ, а также некоторые траектории движений втулки и лопастей в ПВ.

Расчетная модель и уравнения колебаний

Рассматриваются совместные колебания $z_л \ge 3$ упругих на изгиб лопастей и вращающейся с круговой частотой ω втулки НВ, имеющей горизонтальные и вертикальные шарниры и установленной на упруго-демпфирующей опоре.

В общем случае, положение втулки НВ т. А (рис.1), которая обладает массой M_0 и моментами инерции $J_0 = \left[J_{0x}, J_{0y}, J_{0z}\right]^T$, в невращающейся системе координат $0XYZ$ определяется вектором координат $q_0(t) = \left[x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\right]^T$, а упругие и демпфирующие свойства опоры втулки НВ – «пилона НВ», характеризуются матрицами динамической жесткости $C_0(\nu)$ и демпфирования $K_0(\nu)$ размерностью $\{6\times 6\}$, при этом для определенности предполагается, что матрица $K_0(\nu)$ диагональная.

Положение ρ - го сечения k-ой лопасти во вращающейся системе координат, связанной с k-ой лопастью (k-м рукавом втулки НВ) $o^1\zeta_k^1, \eta_k^1, z_k^1$ (рис. 1), определяется вектором-функцией $\left[\eta_{x.k}, \eta_{z.k}\right]^T$, где

$\eta_{x,k} = \eta_{x,k}(\rho, t)$ - функция деформации k-ой лопасти в ПВ,

$\eta_{z,k} = \eta_{z,k}(\rho, t)$ - функция деформации k-ой лопасти в ПТ.

Для общего случая главные центральные оси ρ-го сечения лопасти $V(\rho), U(\rho)$ повернуты на угол $\alpha(\rho)$ относительно осей $o^1\eta_k^1 z_k^1$.

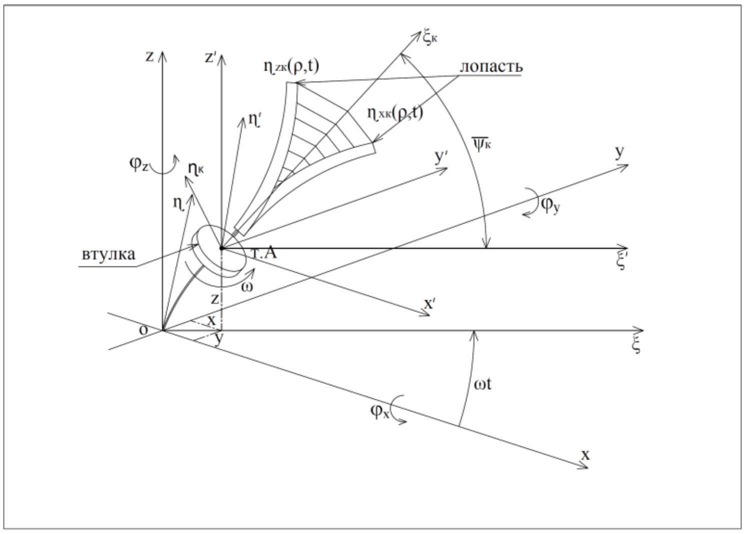

Рис. 1. Расчетная модель несущего винта на упруго-демпфирующей опоре и системы координат.

Связь между координатами в невращающейся и вращающейся системах для лопасти осуществляется через матрицу:

$$l\psi_k = \begin{vmatrix} cos\psi_k & -sin\psi_k & 0 \\ sin\psi_k & cos\psi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

где, $\psi_k = (\omega t + \overline{\psi}_k)$ - азимутальный угол k-ой лопасти,

$\overline{\psi}_k = 2\pi(k-1)/z_л$.

Для указанных переменных общая система линейных интегро - дифференциальных уравнений с частными производными и периодическими коэффициентами, описывающих совместные изгибные колебания лопастей НВ и втулки НВ на упруго-демпфирующей опоре, имеет следующий вид [3 - 7]:

$$(M_0 + z_л m_л)\ddot{x} + k_{xx}\dot{x} + (c_{xx}x + c_{xy}y \dots + c_{x\phi_z}\varphi_z) = \sum_{k=1}^{z_л}\cos\psi_k 2\omega\int_{l_{вш}}^{R} m\dot{\eta}_{xk}\,d\rho +$$

$$\sum_{k=1}^{z_л}\sin\psi_k\int_{l_{вш}}^{R}[m\cdot(\ddot{\eta}_{xk} - \omega^2\eta_{xk} - 2\omega\,\beta_0\dot{\eta}_{zk}) + m\ddot{\varphi}_z(l_{вш} + \rho) + f_{xk}]d\rho$$

$$(M_0+z_л m_л)\ddot{y}+k_{yy}\dot{y}+(c_{yx}x+c_{yy}y\ldots+c_{y\phi_z}\varphi_z)=\sum_{k=1}^{z_л}\sin\psi_k 2\omega\int_{l_{вш}}^{R}m\dot{\eta}_{xk}\,d\rho+$$
$$\sum_{k=1}^{z_л}\cos\psi_k\int_{l_{вш}}^{R}[m(\ddot{\eta}_{xk}-\omega^2\eta_{xk}-2\omega\beta_0\dot{\eta}_{zk})+m\ddot{\varphi}_z(l_{вш}+\rho)+f_{xk}]d\rho$$

$$(M_0+z_л m_л)\ddot{z}+k_{zz}\dot{z}+(c_{zx}x\ldots+c_{zz}z\ \ldots+c_{z\varphi_z}\varphi_z)=-\sum_{k=1}^{z_л}\int_{l_{гш}}^{R}\{m[\ddot{\eta}_{zk}+2\omega\beta_0\dot{\eta}_{xk}+(\ddot{\varphi}_x\sin\psi_k$$
$$-\ddot{\varphi}_y\cos\psi_k)\square(l_{вш}+\rho)+2\omega(\dot{\varphi}_y\sin\psi_k+\dot{\varphi}_x\cos\psi_k)(l_{вш}+\rho)]+f_{zk}\}d\rho$$
$$(J_{ox}+\frac{z_л}{2}J_{лов})\ddot{\varphi}_x+(J_o+z_л J_{лов})\omega\dot{\varphi}_y+k_{\phi_x\phi_x}\dot{\varphi}_x+(c_{\phi_x x}x\ldots+c_{\phi_x\phi_x}\varphi_x\ \ldots+c_{\phi_x\phi_z}\varphi_z)=$$
$$-\sum_{k=1}^{z_л}\sin\psi_k\int_{l_{гш}}^{R}[m(\ddot{\eta}_{zk}+2\omega\beta_0\dot{\eta}_{xk}+f_{zk}](l_{гш}+\rho)d\rho \tag{1}$$
$$(J_{oy}+\frac{z_л}{2}J_{лов})\ddot{\varphi}_y-(J_o+z_л J_{лов})\omega\dot{\varphi}_x+k_{\phi_y\phi_y}\dot{\varphi}_y+(c_{\phi_y x}x\ldots+c_{\phi_y\phi_y}\varphi_x\ \ldots+c_{\phi_y\phi_z}\varphi_z)=$$
$$\sum_{k=1}^{z_л}\cos\psi_k\int_{l_{гш}}^{R}[m(\ddot{\eta}_{zk}+2\omega\beta_0\dot{\eta}_{xk})+f_{zk}](l_{гш}+\rho)d\rho$$

$$(J_0+z_л J_{лов})\ddot{\varphi}_z+k_{\phi_z\phi_z}\dot{\varphi}_z+(c_{\phi_z x}x\ldots+c_{\phi_z z}z\ \ldots+c_{\phi_z\phi_z}\varphi_z)=$$
$$-\sum_{k=1}^{z_л}\int_{l_{гш}}^{R}\{m[(\ddot{\eta}_{xk}-\omega^2\eta_{xk}-2\omega\beta_0\dot{\eta}_{zk}+(\ddot{x}\sin\psi_k+\ddot{y}\cos\psi_k)]+f_{xk}\}(l_{вш}+\rho)d\rho$$
$$\left\{[(EJ_U\cos^2\alpha+EJ_V\sin^2\alpha)\eta''_{xk}]-[(EJ_U-EJ_V)\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\eta''_{zk}]\right\}''-[N\eta'_{zk}]' \tag{1а}$$
$$+m\ddot{\eta}_{xk}-\omega^2 m\eta_{xk}-2m\omega\beta_0\dot{\eta}_{zk}+m(\ddot{y}\cos\psi_k-\ddot{x}\sin\psi_k)+m\ddot{\varphi}_z(l_{вш}+\rho)=f_{xk}$$

$$\left\{-[(EJ_U-EJ_V)\sin\alpha\cdot\cos\alpha]\eta''_{xk}+[(EJ_V\cos^2\alpha+EJ_U\sin^2\alpha)\eta''_{zk}\right\}''-[N\eta'_{zk}]'$$
$$+m\ddot{\eta}_{zk}+2m\omega\beta_0\dot{\eta}_{xk}-m(\ddot{\varphi}_y\cos\psi_k-\ddot{\varphi}_x\sin\psi_k)(l_{гш}+\rho)+2m\omega(\dot{\varphi}_x\cos\psi_k+\dot{\varphi}_y\sin\psi_k) \tag{1б}$$
$$(l_{гш}+\rho)=f_{zk}$$
$$\ldots$$
$$2\times z_л-\textit{уравнений}\quad\textit{типа}\quad(1а),(1б)$$

где $k=1\ldots z_л$,

ρ, R-текущий и конечный радиус лопасти;

$m=m(\rho)$ - погонная масса лопасти;

$EJ_U = EJ_U(\rho), EJ_V = EJ_V(\rho)$ - погонные изгибные жесткости лопастей в плоскости наибольшей и наименьшей жесткости;

$k_{xx} \ldots k_{\varphi_z \varphi_z}$ - коэффициенты матрицы демпфирования опоры;

$c_{xx} \ldots c_{\varphi_z \varphi_z}$ - коэффициенты матрицы динамической жесткости опоры;

$l_{гш}, l_{вш}$ - выносы горизонтальных и вертикальных шарниров;

β_0 - средний угол конусности махового движения лопастей в ПТ;

$f_{x,k} = f_{x,k}(\rho,t),\ f_{z,k} = f_{z,k}(\rho,t)$ - внешняя распределенная переменная нагрузка на лопасть во вращающейся системе координат в ПВ и в ПТ.

В представленных уравнениях (1) для простоты индексы в скобках опущены. Функции $\eta_{x,k}(\rho,t), \eta_{z,k}(\rho,t)$ должны также удовлетворять обычным краевым условиям, соответствующим виду закрепления лопастей на втулке.

Замена переменных на специальные обобщенные координаты

Для решения системы уравнений (1) применяется метод Бубнова-Галеркина [6, 8, 9], при этом в качестве координатных функций разложения используются собственные формы колебаний изолированной лопасти

$$\begin{Bmatrix} \eta_{xk}(\rho,t) \\ \eta_{zk}(\rho,t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{N_T} \begin{Bmatrix} \psi_{x,j}(\rho) \\ \psi_{z,j}(\rho) \end{Bmatrix} q_{k,j}(t) \tag{2}$$

где, $j = 1 \ldots N_T$ - число учитываемых тонов в разложении по собственным формам;

$q_{j,k}$ - обобщенная координата j-го тона для k-ой лопасти;

$\psi_{x,j}(\rho), \psi_{z,j}(\rho)$ - собственные формы изолированной лопасти j-го тона в ПВ и ПТ [10].

В результате исходная система уравнений (1) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с периодическими коэффициентами размерностью:

$$n = (6 + z_л \cdot N_T).$$

Преобразование исходных обобщенных координат, описывающих колебания каждой отдельной лопасти во вращающейся системе координат, на специальные обобщенные координаты, описывающие совместные колебания всех лопастей НВ, в невращающейся системе координат осуществляется подстановкой [1, 11, 12]:

$$\bar{q}_{k,j}(t) = L_{\psi_k} \cdot \bar{U}_j(t) \tag{3}$$

где, $\bar{q}_{k,j}(t) = [q_{1,j} \dots q_{k,j} \dots q_{z,j}]^T$ - вектор исходных обобщенных координат, размерностью $[1 \times z_л]$;

$\bar{U}_j(t) = \left[u_{0j}, u_{1j}, v_{1,j}, \dots u_{s,j}, v_{s,j}\right]^T$ - вектор специальных обобщенных координат НВ, для систем, обладающих круговой симметрией, размерностью $[1 \times z_л]$;

$s = 2 \dots (z_л - 1)/2$ -целое число, определяющее порядок обобщенной координаты, для $z_л$ - нечетного числа лопастей;

$s = 2 \dots (z_л - 2)/2$ -порядок обобщенной координаты, для $z_л$ - четного числа лопастей;

$L_{\psi_k} = \{L_0 \quad L_{1\psi_k} \quad \cdots \quad L_{S\psi_k}\}$ - матрица преобразования координат, размерностью $[z_л \times z_л]$ для нечетного числа лопастей и размерностью $[(z_л - 1) \times z_л]$ - для четного числа (без учета координат для самоуравновешенных форм $z_л / 2 - порядка$);

$L_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$ - вектор столбец размерностью $[1 \times z_л]$, соответствующий нормальным координатам 0-го порядка $u_{0,j}(t)$ для синфазных форм колебаний лопастей НВ;

$L_{1\psi} = \begin{Bmatrix} \cos\psi_1 & \sin\psi_1 \\ \ldots & \ldots \\ \cos\psi_k & \sin\psi_k \end{Bmatrix}$ - прямоугольная матрица преобразования размерностью $[2 \times z_л]$ для циклических координат 1-го порядка $[u_{1,j}, v_{1,j}]^T$;

$L_{S\psi} = \begin{Bmatrix} \cos S\psi_1 & \sin S\psi_1 \\ \ldots & \ldots \\ \cos S\psi_k & \sin S\psi_k \end{Bmatrix}$ - прямоугольная матрица преобразования размерностью $[2 \times z_л]$ для циклических координат S-го порядка $[u_{S,j}, v_{S,j}]^T$.

Отметим существование обратного преобразования, имеющего следующий вид:

$$U_{0,j} = L_0^T \cdot q_{k,j}$$

$$U_{S,j} = \frac{2}{z_л} L_{\psi_k}{}^T \cdot q_{k,j}, \quad (индекс\ (t)\ опущен).$$

Якобиан преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} \partial U_{0,j} / \partial q_{1,j} & \cdots & \partial U_{0,j} / \partial q_{z,j} \\ \ldots & \cdots & \cdots \\ \partial U_{S,j} / \partial q_{1,j} & \ldots & \partial U_{S,j} / \partial q_{z,j} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

По своему физическому смыслу, обобщенные координаты $\left[u_{0,j}\ldots u_{S,j}, v_{S,j}\right]^T$ определяют форму колебаний НВ - конфигурацию всего винта в целом, для формы j- го тона собственных колебаний отдельной лопасти, задавая распределение амплитуд лопастей по азимуту ψ_k для каждой k- ой лопасти. По определению Л.Н. Гродко [1] такие координаты являются “нормальными координатами 2-го рода”, так как при их использовании уравнения свободных колебаний механической системы разделяются на отдельные независимые группы. Необходимо отметить, что подобные обобщенные координаты – «координаты Колемана» (Coleman R.P.) [13] использовались для исследования самовозбуждающихся колебаний типа «Земной и воздушный резонанс» [14 - 17].

В качестве примера на Рис.2 показаны нормальные формы изгибных колебаний лопастей в ПВ для обобщенных координат 0-го и 1-го порядков для шестилопастного НВ вертолета МИ-38 для $j = 4$, где $u_{0,j} - координате$ соответствует синфазные формы колебаний и распределение нагрузки с результирующей в невращающейся системе $OXYZ$ в виде крутящего момента M_z, $u_{1j} - координате$, соответствует распределение амплитуд колебаний с результирующей силой P_y в направлении поперечной оси *Y*, а $v_{1j} - координате$ с результирующей силой ($-P_x$) вдоль продольной оси *X*.

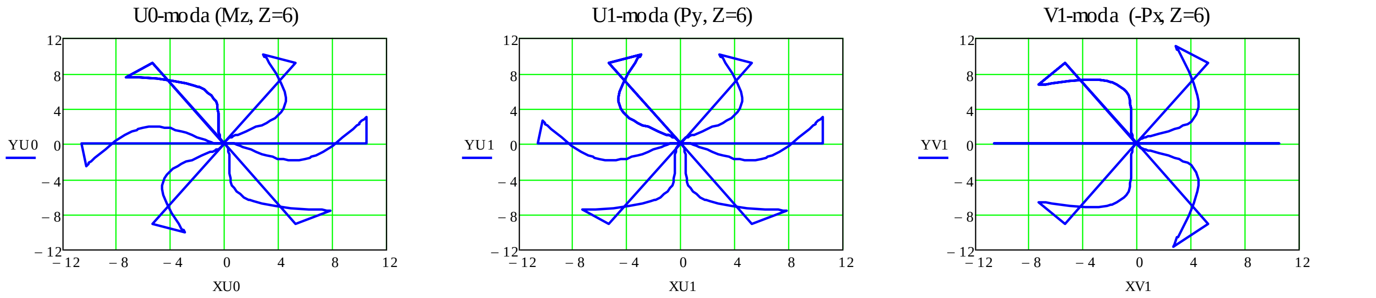

Рис.2. Формы синфазных и циклических колебаний лопастей НВ в ПВ для обобщенных координат $u_{0,j}$ - 0-го и $u_{1,j}, v_{1,j}$ 1-го порядков.

Полученную для "новых" координат систему дифференциальных уравнений, можно записать в обычном виде [6], как для линейной механической системы с постоянными коэффициентами:

$$A\ddot{\bar{q}}(t) + B\dot{\bar{q}}(t) + C\bar{q}(t) = \bar{Q}(t) \quad , \qquad (4)$$

где

$$q(t) = [x, y, \ldots \varphi_z, u_{0,1} \ldots u_{0,N_T} \ldots u_{s,N_T}, v_{s,N_T}]^T,$$
$$\bar{Q}(t) = \left[Px, Py, \ldots M_z, Qu_{0,1} \ldots Qu_{0,N_T} \ldots Qu_{s,N_T}, Qv_{s,N_T}\right]^T$$

– векторы-столбцы, соответственно, обобщенных координат и обобщенных сил, имеющие размерность $[1 \times n]$, а соответствующие матрицы A, B, C - есть квадратные матрицы размерностью $[n \times n]$ с постоянными коэффициентами. Отметим, что система уравнений (4) практически в большинстве случаев разделяется на независимые группы уравнений, описывающие синфазные, циклические и самоуравновешенные формы колебаний НВ, что существенно понижает размерность задачи, и упрощает проведение анализа совместных колебаний упругих лопастей НВ.

После преобразования внешних нагрузок и решения задачи о собственных и вынужденных колебаниях для рассматриваемой системы ОДУ (4) в обобщенных координатах с правой частью, для заданных значений ω, можно определить, как собственные частоты, так и амплитуды вынужденных колебаний втулки НВ в невращающейся системе и соответствующие формы колебаний лопастей НВ [11, 18].

Преобразование нагрузок и формирование векторов обобщенных сил

В общем случае, компоненты вектора нормальных обобщенных сил для нагрузок на лопастях НВ будут иметь следующий вид:

$$\left\{Qu_{0,j}\right\} = L_0^T \cdot \begin{Bmatrix} Q_{1,j}(t) \\ \vdots \\ Q_{z_л,j}(t) \end{Bmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{Bmatrix} Qu_{s1,j} \\ Qv_{s1,j} \end{Bmatrix} = L^T_{S\psi_K} \cdot \begin{Bmatrix} Q_{1,j}(t) \\ \vdots \\ Q_{z_л,j}(t) \end{Bmatrix} \tag{6}$$

где

$s1 = 1\ldots(z_л - 1)/2$ - для четного числа лопастей,

$s1 = 1\ldots(z_л - 2)/2$- для нечетного числа лопастей,

$Q_{k,j}$ -обобщенные силы во вращающейся системе координат.

Для определенности, рассмотрим преобразования для переменных нагрузок, действующих в ПВ на лопасть НВ во вращающейся системе, следующего вида:

$$f^n{}_{x,k}(\rho,t) = \delta_c^n \cdot \varphi_c^n(\rho) \cdot \cos[n(\omega t + \bar{\psi}_k)] + \delta_s^n \cdot \varphi_s^n(\rho) \cdot \sin[n(\omega t + \bar{\psi}_k)] \tag{7}$$

где, δ_c^n, δ_s^n - коэффициенты амплитуд для $n-ой$ гармонической составляющей,

$\varphi_c^n(\rho), \varphi_s^n(\rho)$ - нормированные функции формы распределения для $n-ой$ гармонической составляющей внешней нагрузки.

$$f^n{}_{z,k}(\rho,t)=0$$

Тогда, для каждой обобщенной силы во вращающейся системе можно записать:

$$Q^n{}_{k,j}=p_{c,j}^n\cdot\cos[n(\omega t+\overline{\psi}_k)]+p_{s,j}^n\cdot\cos[n(\omega t+\overline{\psi}_k)]\ ,$$

где

$p_{c,j}^n=\delta_c^n\cdot\int\limits_{l0}^{R}\psi_j(\rho)\cdot\phi_c^n(\rho)\,d\rho$ - обобщенная амплитуда $\cos-ой$ составляющей $n-ой$ гармоники для $j-го$ тона во вращающейся системе координат;

$p_{s,j}^n=\delta_s^n\cdot\int\limits_{l0}^{R}\psi_j(\rho)\cdot\phi_s^n(\rho)\,d\rho$ - обобщенная амплитуда $\sin-ой$ составляющей $n-ой$ гармоники для $j-го$ тона во вращающейся системе координат.

Для обобщенных сил 0-го порядка в невращающейся системе, имеем

$$Qu_{0,j}=p_{c,j}^n\cdot\sum_{k=1}^{z_л}\cos[n(\omega t+\overline{\psi}_k)]+p_{s,j}^n\cdot\sum_{k=1}^{z_л}\sin[n(\omega t+\overline{\psi}_k)].$$

Анализ сумм тригонометрических функций, показывает, что не нулевые значения возможны только для гармоник с номерами $n=p\cdot z_л$, $где$ p - целое число, для которых выражения обобщенных сил имеет следующий вид:

$$Qu_{0,j}=z_л\cdot p_{c,j}^{pz}\cdot\cos[pz(\omega t+\overline{\psi}_k)]+z_л\cdot p_{s,j}^{pz}\cdot\sin[pz(\omega t+\overline{\psi}_k)] \qquad (8)$$

Соответственно, для обобщенных сил s1- порядка в невращающейся системе, имеем:

$$Qu_{s1,j} = p^n_{c,j}\sum_{k=1}^{z_л}\{\cos[s1(\omega t+\bar{\psi}_k)]\cdot\cos[n(\omega t+\bar{\psi}_k)]\} + p^n_{c,j}\sum_{k=1}^{z_л}\{\cos[s1(\omega t+\bar{\psi}_k)]\cdot$$
$$\sin[n(\omega t+\bar{\psi}_k)]\},$$
$$Qv_{s1,j} = p^n_{s,j}\sum_{k=1}^{z_л}\{\sin[s1(\omega t+\bar{\psi}_k)]\cdot\cos[n(\omega t+\bar{\psi}_k)]\} + p^n_{s,j}\sum_{k=1}^{z_л}\{\sin[s1(\omega t+\bar{\psi}_k)]\cdot$$
$$\sin[n(\omega t+\bar{\psi}_k)]\}.$$

Анализ сумм произведений тригонометрических функций, обладающих свойствами ортогональности, показывает, что не нулевые значения указанных сумм возможны только для значений S1=1 и для проходных гармоник $n=(p\cdot z_л \pm 1),\ где\ p$ - целое число, поэтому все обобщенные силы, соответствующие другим возможным сочетаниям чисел $s1\ и\ n$ равны нулю. Равенство нулю обобщенных сил $Qu_{s1,j}, Qv_{s1,j}$ в невращающейся системе, при действии нагрузок $Q^n{}_{k,j}(t)$ на каждой k-ой лопасти во вращающейся системе, физически означает, что в целом на НВ, как системы обладающей круговой симметрией, действует самоуравновешенная система нагрузок, и как следствие, колебаний втулки НВ с частотами указанных непроходных гармоник не возникает. Поэтому, расчет на вынужденные колебания лопастей для всех непроходных гармоник, можно проводить во вращающейся системе координат для изолированной лопасти.

Выражения для обобщенных сил в невращающейся системе, соответствующих циклическим формам 1-го порядка (S1=1) и нагрузкам, действующим с проходными гармониками $n=(z_л \pm 1)$, имеют следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} Qu_{1,j} \\ Qv_{1,j} \end{Bmatrix} = \frac{z_л}{2}\cdot\begin{Bmatrix} p^{z-1}_{c,j}\cdot\cos(z_л\omega t) + p^{z-1}_{s,j}\cdot\sin(z_л\omega t) \\ p^{z-1}_{c,j}\cdot\sin(z_л\omega t) - p^{z-1}_{s,j}\cdot\cos(z_л\omega t \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

для (z-1)-ой гармоники;

$$\begin{Bmatrix} Qu_{1,j} \\ Qv_{1,j} \end{Bmatrix} = \frac{z_л}{2} \cdot \begin{Bmatrix} p_{c,j}^{z+1} \cdot \cos(z_л \omega t) + p_{s,j}^{z+1} \cdot \sin(z_л \omega t) \\ -p_{c,j}^{z+1} \cdot \sin(z_л \omega t) + p_{s,j}^{z+1} \cdot \cos(z_л \omega t) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

для (z+1)-ой гармоники.

В невращающейся системе координат $OXYZ$, обобщенным силам $\begin{Bmatrix} Q^1 u_j \\ Q^1 v_j \end{Bmatrix}$ соответствуют силы $\begin{Bmatrix} P_y \\ -P_x \end{Bmatrix}$, при этом для каждой проходной гармоники указанные силы можно представить в виде пары векторов вращающихся по круговой траектории с лопастной частотой $f_z = z_л \, \omega$ с длинами $\rho_{c,j}^{z-1} = \frac{z_л}{2} \cdot p_{c,j}^{z-1}, \ldots, \rho_{s,j}^{z+1} = \frac{z_л}{2} \cdot p_{s,j}^{z+1}$, сдвинутых по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Причем, векторы для *(z-1)* - ой гармоники вращаются по вращению НВ, а векторы для *(z+1)* - ой гармоники против вращения НВ. Очевидно, что во вращающейся системе $O\zeta\eta Z$, векторы суммарных сил имеют такие же длины, как и в невращающейся системе, но вращение векторов будет происходить, соответственно, с частотами $f_{z-1} = (z_л - 1)\omega$ и $f_{z+1} = (z_л + 1)\omega$.

Движения втулки и лопастей НВ в невращающейся и вращающейся системах координат

Для анализа получаемых результатов расчетов на вынужденные колебания и сопоставления с экспериментальными данными записей вибраций на вращающихся частях втулки, представляет интерес рассмотреть характер движения и колебательных процессов втулки и лопастей в обеих системах координат. Т.к. для координат синфазных форм $[z,\varphi_z,\ldots u_{0,j}]^T$ характер движения не изменяется при переходе от невращающейся к вращающейся системе, рассмотрим колебания только для координат циклических форм $[x\ldots,\varphi_y,\ldots u_{1,j},v_{1,j}]^T$.

В общем случае выражения для вынужденных колебаний втулки в ПВ, в невращающейся системе координат $OXYZ$ имеет следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} xo(t) \\ yo(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} \cdot \cos z_л \omega t + \begin{Bmatrix} x_s \\ y_s \end{Bmatrix} \cdot \sin z_л \omega t\,, \quad где$$

$$x_c = (xo_c^c + xo_c^s), \quad x_s = (xo_s^c + xo_s^s),$$
$$y_c = (yo_c^c + yo_c^s), \quad y_s = (yo_s^c + yo_s^s),$$

$x0_c^c \ldots y0_s^s$ - координаты опоры, полученные при решении системы (4), где верхний индекс определяет составляющую внешней нагрузки, а нижний определяет составляющую отклика перемещения.

Во вращающейся системе $O\zeta\eta Z$ для втулки НВ имеем суперпозицию двух движений:

$$\begin{Bmatrix} \zeta 1(t) \\ \eta 1(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} (x_c + y_s) \\ -(x_s + y_c) \end{Bmatrix} \cdot \cos(z_л - 1)\,\omega t + \frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} (x_s + y_c) \\ (x_c + y_s) \end{Bmatrix} \cdot \sin(z_л - 1)\,\omega t\,,$$

$$\begin{Bmatrix} \zeta 2(t) \\ \eta 2(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} (x_c - y_s) \\ (x_s + y_c) \end{Bmatrix} \cdot \cos(z_л + 1)\,\omega t + \frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} (x_s + y_c) \\ -(x_c - y_s) \end{Bmatrix} \cdot \sin(z_л + 1)\omega t\,,$$

где

$\zeta 1(t), \eta 1(t), \zeta 2(t), \eta 2(t)$ - координаты втулки соответственно для $(z_л - 1)$ и $(z_л + 1)$ гармоник.

Формы колебаний лопастей НВ в невращающейся системе представляются в виде нормальных форм, для соответствующих обобщенных координат НВ:

$$\{Xu_c(\rho)\} = \{\psi_j(\rho)\}^T \cdot \{u_{c,j}\}, \quad \{Xu_s(\rho)\} = \{\psi_j(\rho)\}^T \cdot \{u_{s,j}\},$$
$$\{Xv_c(\rho)\} = \{\psi_j(\rho)\}^T \cdot \{v_{c,j}\}, \quad \{Xvs(\upsilon)\} = \{\psi_j(\rho)\}^T \cdot \{v_{s,j}\},$$

где $\{\psi_j(\rho)\}^T$ - вектор – строка, размерностью $[1\times N_T]$, состоящая из собственных форм (координатных функций) изолированной лопасти, принятых в разложении (2), $\{u_{c,j}\},\ldots\{v_{s,j}\}$– векторы – столбцы обобщенных координат для невращающейся системы, размерностью $[1\times N_T]$.

Выражение для поперечных колебаний $\rho -$го радиуса отдельной k-ой лопасти во вращающейся системе $\zeta O\eta$ в общем случае имеет следующий вид:

$$\{\eta_k(\rho,t)\} = [\{Xu_c(\rho)\}\cdot\cos z_л\omega t + \{Xu_s(\rho)\}\cdot\sin z_л\omega t]\cdot\cos(\omega t+\psi_k) +$$
$$[\{Xv_c(\rho)\}\cdot\cos z_л\omega t + \{Xv_s(\rho)\}\cdot\sin z_л\omega t]\cdot\sin(\omega t+\psi_k).$$

По аналогии с движением втулки во вращающейся системе, имеем:

$$\{\eta 1(\rho,t)\} = \{\eta 1_c(\rho)\}\cdot\cos(z_л-1)\,\omega t + \{\eta 1_s(\rho)\}\cdot\sin(z_л-1)\,\omega t,$$
$$\{\eta 2(\rho,t)\} = \{\eta 2_c(\rho)\}\cdot\cos(z_л+1)\,\omega t + \{\eta 2_s(\rho)\}\cdot\sin(z_л+1)\,\omega t,$$

$$\{\eta 1_c(\rho)\} = \frac{1}{2}\cdot\{Xu_c(\rho)+Xv_s(\rho)\}, \quad \{\eta 1_s(\rho)\} = \frac{1}{2}\cdot\{Xu_s(\rho)-Xv_s(\rho)\}$$
$$\{\eta 2_c(\rho)\} = \frac{1}{2}\cdot\{Xu_c(\rho)-Xv_s(\rho)\}, \quad \{\eta 2_s(\rho)\} = \frac{1}{2}\cdot\{Xu_c(\rho)+Xv_s(\rho)\},$$

где $\cos -ая$ *и* $\sin -ая$ составляющие, соответственно, для $(z_л-1)$ *и* $(z_л+1)$ гармоник.

В качестве иллюстраций указанных преобразований, на Рис.3,4 представлены графики, показывающие изменение траектории движения точки на лопасти и характера колебательного процесса при переходе из вращающейся системы в невращающуюся систему.

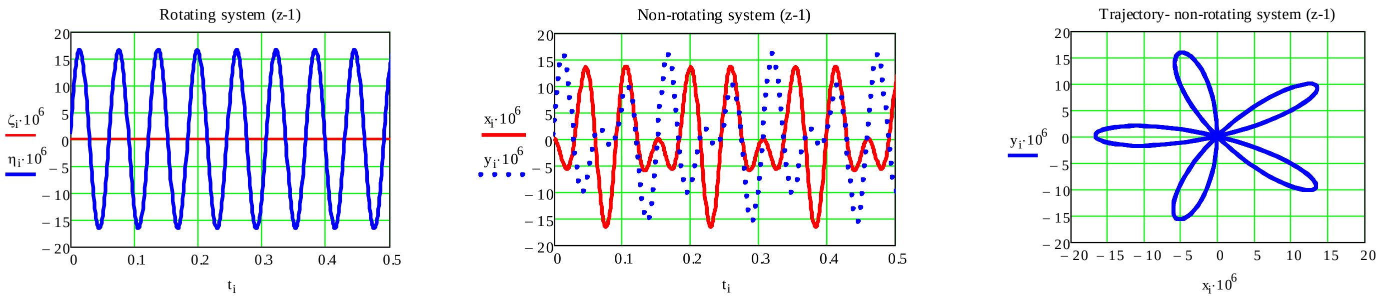

Рис.3 Движение точки лопасти на радиусе $\bar{\rho} = 0{,}5$ в ПВ во вращающейся и невращающейся системах для $(z_л - 1) - гармоники$ и траектория движения в невращающейся системе.

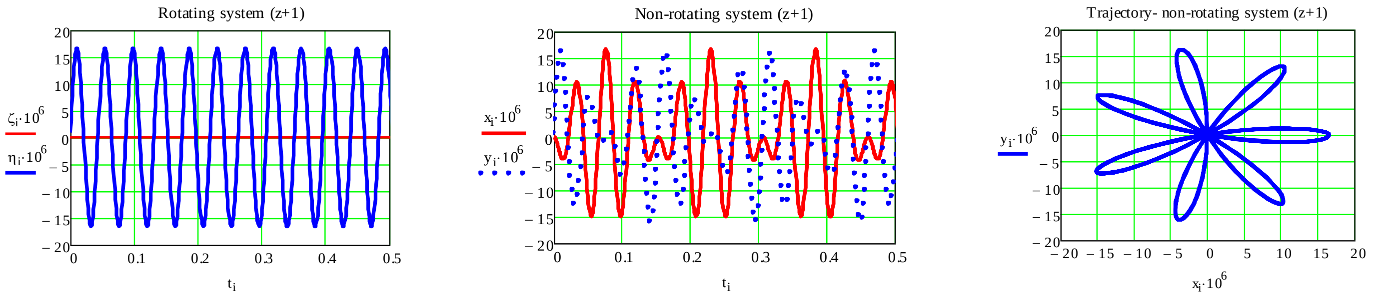

Рис.4. Движение точки лопасти на радиусе $\bar{\rho} = 0{,}5$ в ПВ во вращающейся и невращающейся системах для $(z_л + 1) - гармоники$

Как видно, поперечные гармонические колебания точки $\eta(t)$, действующие с частотой $p - ой\ гармоники$, преобразуются в полигармонические колебания $x(t), y(t)$, действующие с частотами $(p \pm 1)\omega$, и при этом за один оборот НВ формируется сложная траектория движения в виде “ромашки”. Также следует отметить, что для НВ с четным числом лопастей количество лепестков “ромашки” равно p, в то же время для НВ с нечетным числом лопастей количество лепестков равно $2 \cdot p$.

Некоторые практические результаты

Для обеспечения приемлемых уровней (согласно требованиям ГОСТ 23718-2014) нормально-обусловленных вибраций (НОВ) вертолета, необходимо на этапе проектирования проводить расчетные исследования динамической реакции системы «НВ – опора» на воздействие переменных нагрузок, действующих с частотами проходных гармоник с построением РД и графиков АЧХ [18 - 20].

В качестве примера применения специальных обобщенных координат, рассмотрим некоторые результаты расчетов соответствующих РД и АЧХ для вертолета Ми-38 с шестилопастным НВ, имеющего гибкие пластиково-композиционные лопасти, с относительной частотой 1-го изгибного шарнирного тона изолированной лопасти в ПВ $\bar{p}_{1вр} = (p_{1вр} / \omega) \approx 3{,}1$.

1. Циклические формы

Рассматривается группа независимых уравнений из системы (4) размерностью $\{18 \times 18\}$, описывающая совместные поперечные и угловые колебания втулки $\{x, y, \varphi_x, \varphi_y\}^T$ и изгибные колебания лопастей НВ. При этом, для учета демпфера лопасти в ПВ в исходную систему (1) добавляется $z_л$ уравнений колебаний лопастей.

Значения коэффициентов матриц динамической жесткости $C_0(\nu)$ и демпфирования $K_0(\nu)$ для упругодемпфирующей опоры определены расчетно-экспериментальным способом для лопастной частоты НВ $\nu = z_л \cdot \omega$ на номинальных частотах вращения и, для простоты анализа, принимаются постоянными в исследуемом диапазоне частот вращения НВ.

На Рис.5 показана расчетная РД НВ в невращающейся системе координат для циклических форм колебаний лопастей вертолета МИ-38, построенная по результатам расчета на собственные колебания рассматриваемой системы “НВ-опора”.

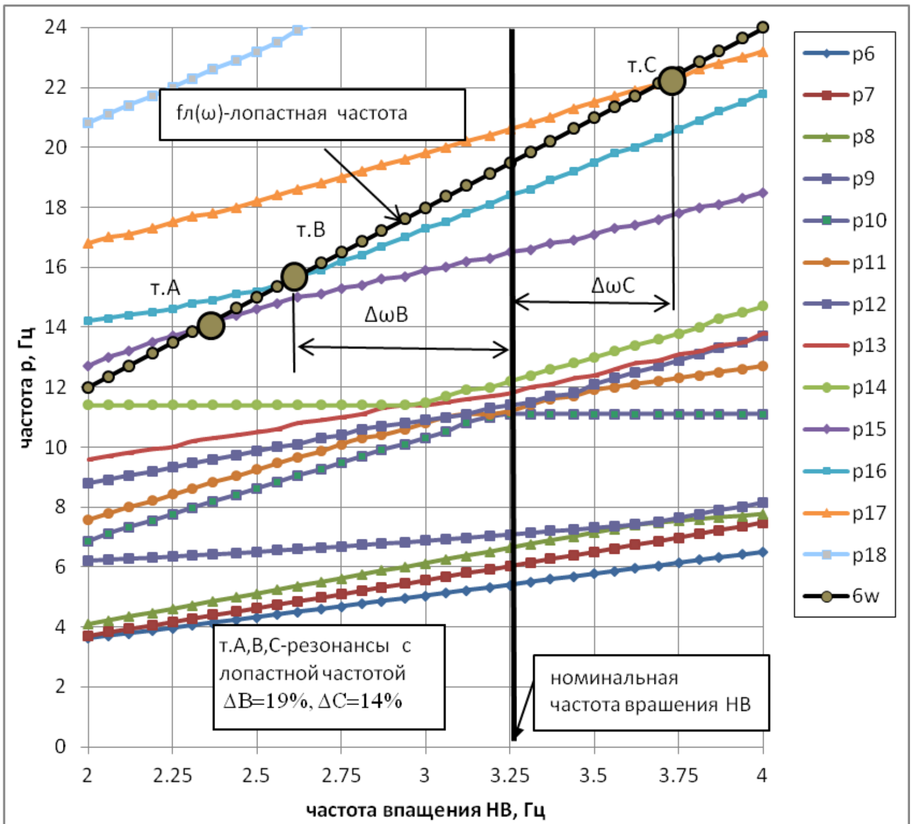

Рис. 5. Резонансная диаграмма НВ для циклических форм колебаний лопастей в невращающейся системе координат (Zл=6)

На рис.6, для сравнения, показана аналогичная РД для первоначального варианта НВ с числом лопастей $z_л = 5$.

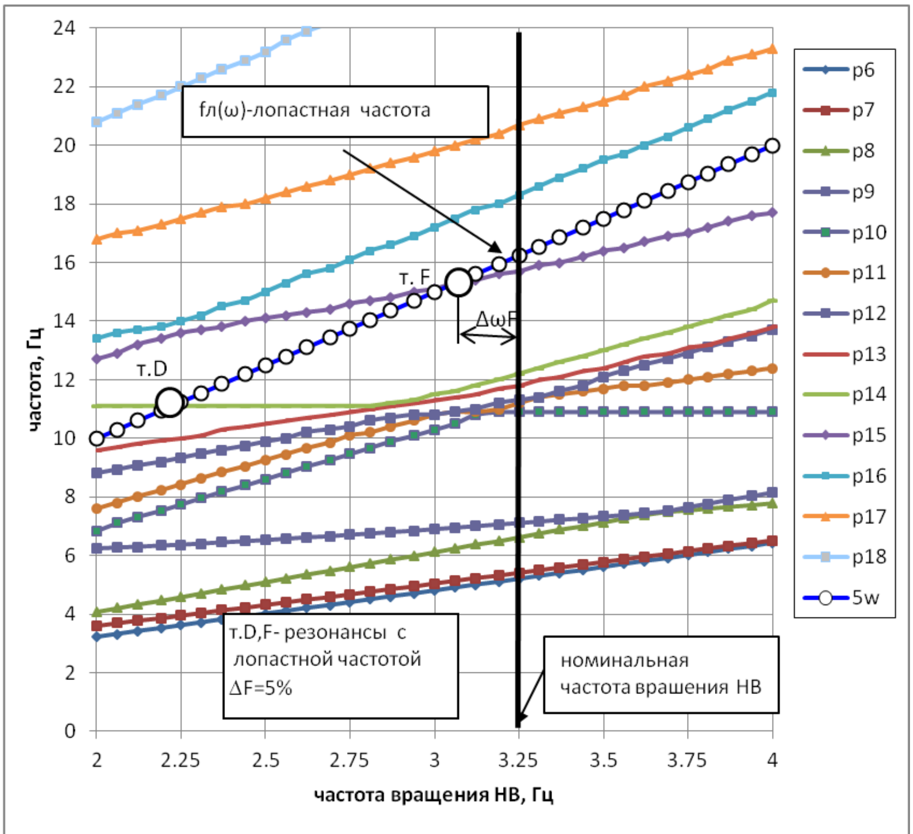

Рис.6. Резонансная диаграмма НВ для циклических форм колебаний лопастей в невращающейся системе координат (Zл=5)

На представленных РД изображены траектории собственных частот $p_n(\omega)$ при изменении частоты вращения ω НВ, а также прямая линия $f л(\omega) = z_л \omega$, соответствующая лопастной частоте НВ, при пересечении которых, определяются резонансные собственные частоты (т.А, т.В,…т.F) и степень отстройки ближайших резонансных частот от номинальной частоты вращения НВ $\omega_{нв} = 3{,}25 Гц$ в виде запасов по частоте $\Delta\omega B, \ldots \Delta\omega F$ и относительных запасов $\Delta B = \Delta\omega B / \omega_{нв}, \ldots \Delta F = \Delta\omega F / \omega_{нв}$ в процентах.

Для сравнительного анализа динамической реакции системы «НВ-опора» для НВ вертолета МИ-38 с различным числом лопастей проводятся также расчеты на вынужденные колебания с построением соответствующих АЧХ. На рис.7,8 показаны графики АЧХ системы «НВ-опора» для $z_л = 6$, в виде зависимостей изменения амплитуд для $\cos-$*ой и* $\sin-$*ой* составляющих сил $p_x^c(\omega),\dots p_y^s(\omega)$ и амплитуд суммарных сил $P_x(\omega), P_y(\omega)$, действующих на опору, при воздействии внешних нагрузок возбуждения $Fx = Fy = 100$*кгс*, приложенных к втулке НВ и действующих в ПВ с частотами проходных гармоник.

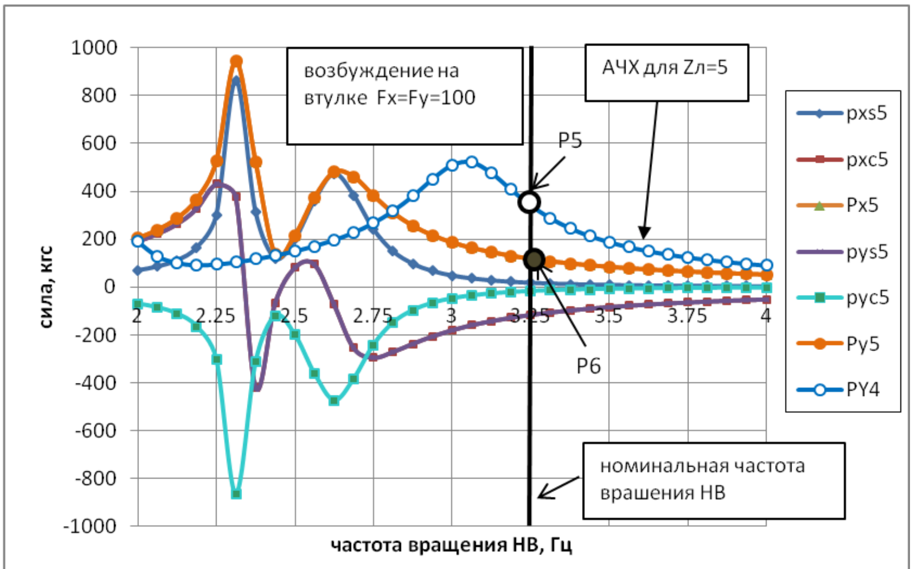

Рис.7. АЧХ НВ для сил на втулке НВ Px, Py для (Zл-1) гармоники (Zл=6)

При этом заданные векторы внешней нагрузки вращаются по круговым траекториям, как по вращению НВ для $(z_л - 1)$ гармоники, так и против вращения для $(z_л + 1)$ гармоники. Кроме того, для сравнения, здесь также показаны графики суммарных амплитуд для НВ с $z_л = 5$. Следует отметить, что указанные АЧХ также можно рассматривать в виде зависимостей изменения по частоте коэффициентов динамичности по силам $Kd_P(\omega) = P(\omega)/100$ для системы «НВ-опора».

На рис.9,10 показаны графики перекрестных АЧХ, зависимостей изменения моментов $M_x(\omega), M_y(\omega)$, действующих на опору, от воздействия указанных сил, а на

Рис.11,12 показаны аналогичные графики для сил на опоре от воздействия переменных моментов на втулке $Mx = My = 100 кгс\cdot м$.

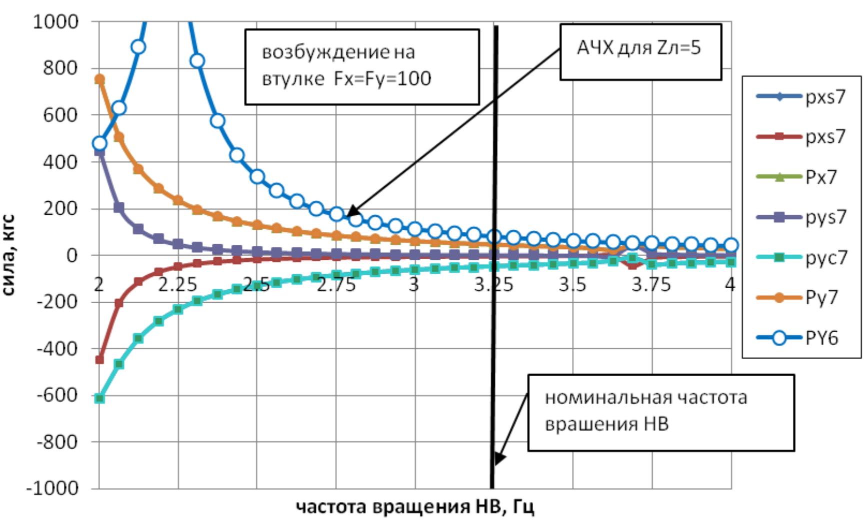

Рис.8. АЧХ НВ для сил на втулке НВ Px,Py для (Zл+1) гармоники (Zл=6)

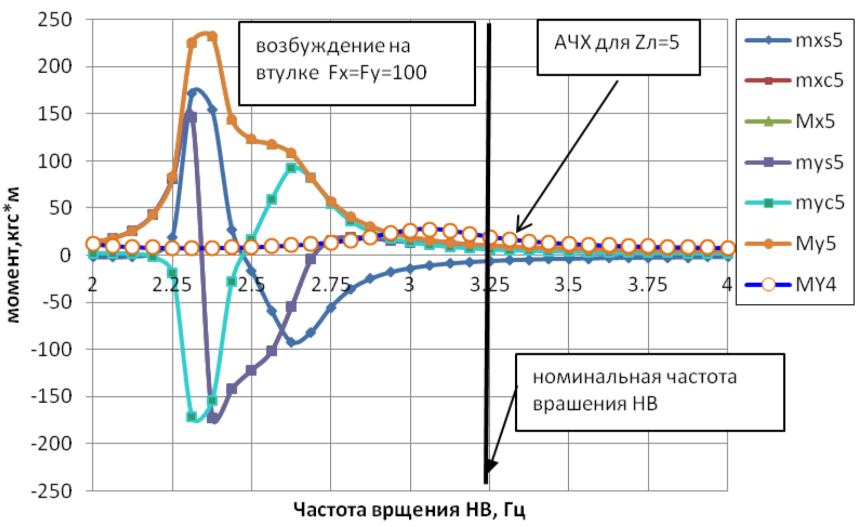

Рис. 9. АЧХ НВ для моментов на втулке Mx, My для (Zл-1) гармоники (Zл=6)

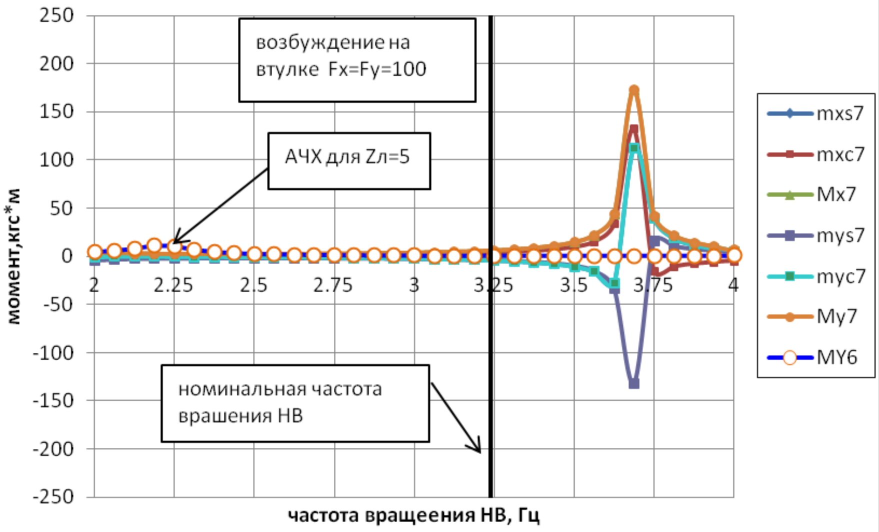

Рис.10. АЧХ НВ для моментов на втулке Mx,My для (Zл+1) гармоники (Zл=6)

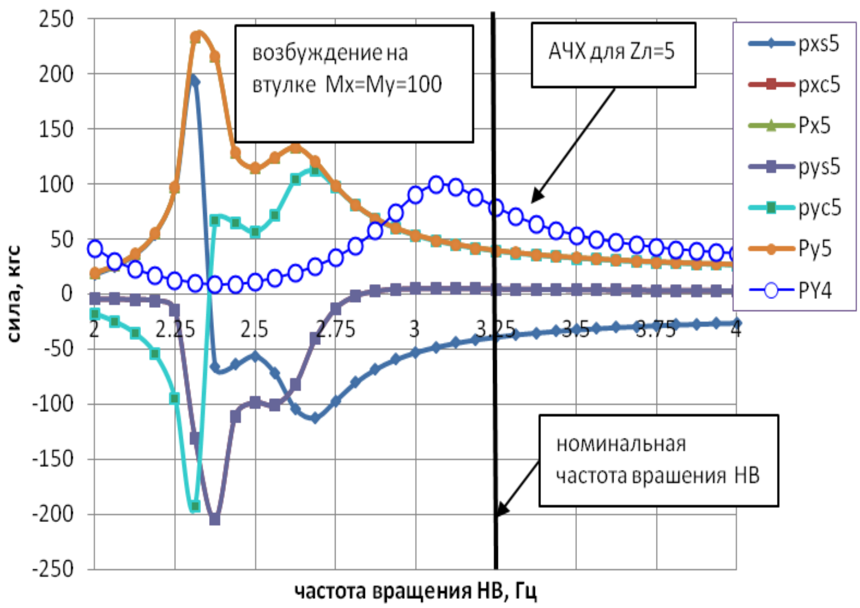

Рис.11. АЧХ НВ для сил на втулке НВ Fx,Fy для (Zл-1)гармоники (Zл=6)

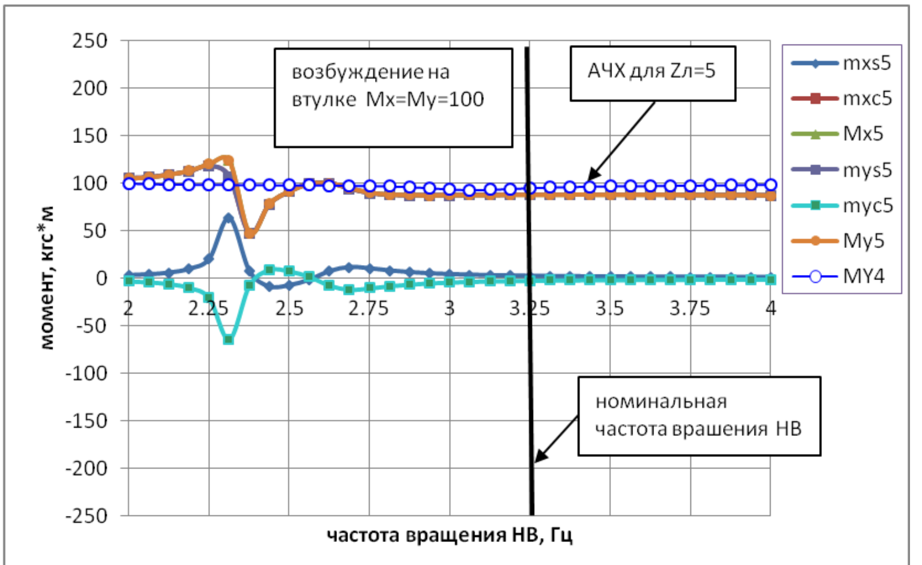

Рис.12. АЧХ НВ для моментов на втулке НВ Мх, Му для (Zл-1) гармоники (Zл=6)

Из сравнительного анализа представленных данных для двух рассматриваемых вариантов количества лопастей НВ следует:

а) собственные частоты исследуемой системы “НВ-опора” для НВ в шестилопастном варианте значительно дальше отстроены от лопастной частоты возбуждения, и резонансные частоты имеют запасы не менее $\Delta = (14...19)\%$, что практически в ~3…5 раз больше, чем для пятилопастного НВ;

б) коэффициент динамичности по силам, на номинальной частоте вращения для НВ с $z_л = 6$ составляет $Kd_{P6} = P6/100 = 1{,}15$, что практически в ~3 раза меньше, чем для варианта НВ с $z_л = 5$, $Kd_{P5} = 3{,}4$;

в) значения коэффициентов динамичности по моментам и “перекрестные” коэффициенты для обоих вариантов не превышают ~0,5.

2. Синфазные формы

Для анализа колебаний системы “НВ-опора” по синфазным формам, в качестве примера, рассматривается группа независимых уравнений из системы (4) размерностью $\{5 \times 5\}$, описывающая совместные вертикальные колебания втулки $\{z\}$ и изгибные колебания лопастей НВ в ПТ.

На рис.13,14 показаны расчетные РД и АЧХ НВ для вертикальных сил в невращающейся системе координат для синфазных форм колебаний лопастей вертолета МИ-38 с шестилопастным НВ.

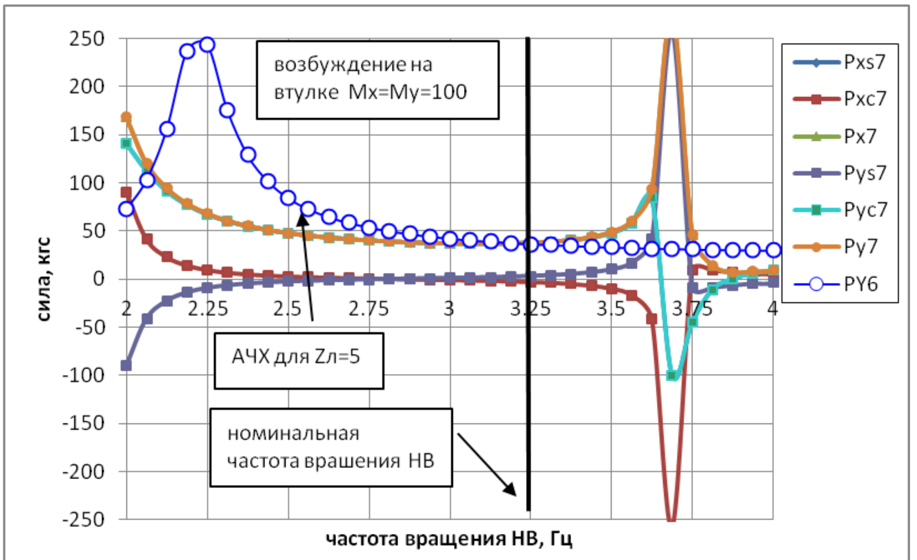

Рис.13. АЧХ НВ для сил на втулке НВ Px,Py для (Zл+1) гармоники (Zл=6)

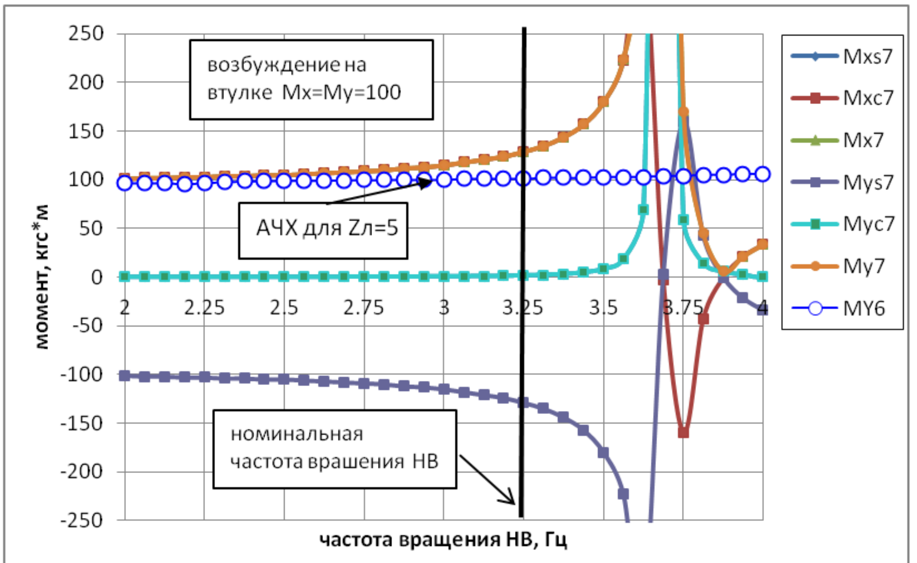

Рис.14. АЧХ НВ для моментов на втулке НВ Mx,My для (Zл+1) гармоники (Zл=6)

Кроме того, на Рис.14 для сравнения, показана также АЧХ для $z_л = 5$. Из представленных графиков следует, что в области номинальных частот вращения НВ, для обоих вариантов НВ резонансы отсутствуют, а коэффициенты динамичности незначительно отличаются друг от друга и не превышают $Kd_P = 1{,}2$.

Заключение

На основании представленного сравнительного анализа динамической реакции (РД и АЧХ) системы «НВ-опора» для двух вариантов числа лопастей НВ для вертолета МИ-38, можно сделать вывод, что вариант шестилопастного НВ по условиям вибраций является более предпочтительным, чем пятилопастный.

Необходимо отметить, что по результатам летных измерений вибраций на вертолете Ми-38, с штатным шестилопастным НВ, амплитуды вертикальных вибраций в кабине пилотов, действующие с лопастной частотой $f_л = 19{,}5 Гц$ в полете на крейсерской скорости Vкр=270 км/ч, составляют не более $Ay = 0{,}1g$, что ниже требований ГОСТ 23718-2014 по допускаемым уровням вибраций для вертолетов гражданской авиации и, соответственно, подтверждает обоснованность принятого выбора числа лопастей НВ.

Библиографический список

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. - М.: Высшая школа, 1980. - 408 с.

2. Баскин В.Э., Вильдгрубе Л.С., Вождаев В.С., Майкапар Г.Н. Теория несущего винта. - М.: Машиностроение, 1973. – 364 с.

3. Миль М.Л. и др. Вертолеты: расчет и проектирование. - М.: Машиностроение, 1967. Т. 2. - 424 с.

4. Джонсон У. Теория вертолета. - М.: Мир, 1983. Т. 1. - 502 с, Т. 2. – 529 с.

5. Wnuk M.P. Nonlinear Fracture Mechanics, Vienna, Springer Vienna, 1990, 451 p.

6. Вибрации в технике: справочник. - М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. - 358 с.

7. Coleman R.P., Feingold A.M. Theory of self-excited mechanical oscillations of helicopter rotors with hinged blades. NACA Technical Report 1351, 1958, available at: https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc60767

8. Игнаткин Ю.М., Макеев П.В, Шомов А.И. Программный комплекс для расчета аэродинамических характеристик несущих и рулевых винтов вертолетов на базе нелинейной лопастной вихревой теории // Труды МАИ. 2010. № 38. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=14148

9. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

10. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. - Рига: Зинатне, 1988. - 284 с.

11. Загордан А.А. О расчете колебаний несущего винта вертолета в плоскости вращения с виброгасителем маятникового типа // Техника воздушного флота. 2007. № 3 - 4. С. 686 - 687.

12. Михеев С.В. Прикладная механика в вертолетостроении. – М.: Альтекс, 2003. - 264 с.

13. Брамвелл А.Р.С. Динамика вертолетов. - М.: Машиностроение, 1982. - 368 с.

14. Бахов О.П. Аэроупругость и динамика конструкции вертолета. - М.: Машиностроение, 1985. – 172 с.

15. Chen P.C., Chopra I. Wind tunnel test of a smart rotor with individual blade twist control // Proceedings of the SPIE, 1997, vol. 3041, pp. 217 – 230.

16. Sethi V., Song G. Pole. Placement Vibration Control of a Flexible Composite beam using Piezoceramic Sensors and Actuators // Journal of Thermoplastic Composite Materials, 2006, no. 19, pp. 293 - 308.

17. Momterrubio L. and Sharfe I. Influence of landing gear on helicopter ground resonance // Canadian Aeronautics and Space Journal, vol. 48, issue 2, June 2002.

18. Elizabeth M. Lee-Rausch, Robert T. Biedron, FUN3D Airloads Predictions for the Full-Scale UH-60A Airloads Rotor in a Wind Tunnel // Journal of the American Helicopter Society, 2014, vol. 59, no. 3, pp. 133 - 144

19. Игнаткин Ю.М., Макеев П.В., Шомов А.И. Численное моделирование прикладных задач аэродинамики вертолета на базе нелинейной лопастной вихревой модели винта // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=65636

20. Головкин М.А., Кочиш С.И., Крицкий Б.С. Методика расчета аэродинамических характеристик комбинированной несущей системы летательного аппарата // Труды МАИ. 2012. № 55: URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=30023