

О СВОЙСТВАХ ВНУТРЕННИХ ЗАХВАЧЕННЫХ ВОЛН В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ОКЕАНА

Владимир Алексеевич ЛЕВИН. Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН; зам. директора; д-р физ.-мат. наук; профессор; академик РАН; 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д.5; levin@iacp.dvo.ru

LEVIN Vladimir Alekseevich; Institute of automation and control processes, FEB RAS; deputy director for scientific work; Doctor of physical and mathematical sciences; professor; academician of RAS; 5 Radio St., Vladivostok 690041, Russia; levin@iacp.dvo.ru

Сергей Викторович СМІРНОВ. Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН; с.н.с.; канд. физ.-мат. наук; 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д.5; smirnoff@iacp.dvo.ru

SMIRNOV Sergey Viktorovich; Institute of automation and control processes, FEB RAS; senior researcher; Ph.D. in physics and mathematics; 5 Radio St., Vladivostok 690041, Russia; smirnoff@iacp.dvo.ru

Рассматриваются решения задач динамики Мирового океана для внутренних захваченных волн в бассейне с плоским дном и одной прямой вертикальной стенкой. Анализ проведен в рамках разностной аппроксимации на сетке типа Arakawa B линейной системы уравнений мелкой воды в приближении f -плоскости с учетом вихревой вязкости. На стенке заданы условия прилипания. Представлены решения и исследовано влияние сеточного разрешения на захваченные волны при некоторых характерных значениях модельных параметров. Показано, что в некотором диапазоне относительно коротких волн существуют два решения типа захваченных волн, движущихся в противоположных направлениях.

The effects of viscosity and spatial finite-differencing on internal coastal trapped waves in numerical models are investigated using the f -plane shallow-water equations approximated on Arakawa B grid. Semi-infinite model basin of constant depth is bordering a straight, vertical coast. No-slip boundary conditions are considered. The solutions are presented for some «typical» values of model parameters. We found, that together with the Kelvin wave, an additional short wave solution propagating in the opposite direction appears.

Ключевые слова: гидродинамическое моделирование, конечные разности, береговая волна Кельвина.

Key words: hydrodynamic modeling, finite difference, coastal Kelvin wave.

Введение

Для решения задач динамики Мирового океана применяются нелинейные математические модели [1], описывающие широкий спектр движений: баротропные и бароклинные волны Россби, инер-

ционно-гравитационные волны, экваториальные и береговые волны Кельвина и др. Чаще всего модельное решение может быть найдено только приближенно, с помощью замены исходной дифференциальной системы уравнений некоторым конечно-

мерным аналогом, и важную роль играет, в частности, анализ разностной схемы с точки зрения воспроизведения конкретных физических процессов. Во многих работах анализ разностных схем проведен в рамках уравнений мелкой воды [2–4]. Результаты, полученные для системы уравнений мелкой воды, применимы к баротропной (внешней) моде и к бароклинным (внутренним) модам волн в стратифицированном океане, когда горизонтальный масштаб велик по сравнению с вертикальным [5].

Важную роль в динамике примыкающих к материковому склону областей океана играют волны Кельвина [5], которые принадлежат к типу волн, захваченных вращением Земли у вертикальной стенки. Отметим, что при построении моделей динамики океана узкий шельф и резкий материковый склон часто заменяют вертикальной стенкой. В работе [6] в рамках теории мелкой воды проведено исследование влияния вертикальной и горизонтальной вязкости на волны Кельвина. Результаты анализа для случая одномерной пространственной дискретизации изложены в работе [4], где решения получены в предположении геострофического равновесия для продольной компоненты скорости и показано, что качество описания волн Кельвина в значительной мере зависит от типа и шага сетки, краевых условий.

В данной работе анализируется воспроизведение захваченных волн на прямоугольной сетке типа B [2] с условиями прилипания на стенке. Отметим, что сетка B применяется во многих численных моделях [7–9]. Представлены решения и исследовано влияние сеточного разрешения на захваченные волны при некоторых характерных значениях модельных параметров.

1. Основные уравнения

Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость, находящуюся в бассейне с плоским дном и одной прямой вертикальной стенкой. Будем пользоваться декартовой системой координат (x, y, z) с направленной вверх осью z . Пусть состояние покоя характеризуется плотностью $\rho_0(z)$ и давлением $p_0(z)$. Обозначим: g — ускорение свободного падения; ρ_* — характерное значение плотности; K — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости [10]; N — частота Брента–Вяйсяля:

$$N^2 = -g\rho_*^{-1}\partial_z\rho_0.$$

Полагаем, что глубина бассейна H значительно превышает толщину придонного экмановского пограничного слоя и произведение KN^2 не зависит

от z . В этих предположениях решения системы основных уравнений теории океанских течений, записанной в приближениях Буссинеска и гидростатики и линеаризованной относительно основного состояния покоя, можно искать методом разделения переменных []. Общее решение является суммой мод. В каждой моде зависящие от горизонтальных координат и времени переменные удовлетворяют линейной системе уравнений мелкой воды:

$$\partial_t u^* - fv^* = -\epsilon_s^2 \partial_x \eta^* + \mu (\partial_{xx} u^* + \partial_{yy} u^*) - du^*; \quad (1)$$

$$\partial_t v^* + fu^* = -\epsilon_s^2 \partial_y \eta^* + \mu (\partial_{xx} v^* + \partial_{yy} v^*) - dv^*; \quad (2)$$

$$\partial_t \eta^* + \partial_x u^* + \partial_y v^* = 0, \quad (3)$$

где

$$d = \frac{KN^2}{\epsilon_s^2}.$$

Здесь t — время; u^* и v^* — компоненты вектора скорости по направлениям x и y ; η^* — превышение уровня жидкости над его невозмущенным положением; μ — коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости [10], полагаем $\mu > 0$; $\partial_r F$ — частная производная функции F по переменной r ; L , ϵ_s — радиус деформации Россби и постоянная разделения переменных для данной моды,

$$L = \frac{\epsilon_s}{f};$$

λ_* — длина волны; λ , l — безразмерные длина волны и компонента волнового числа по направлению y , $\lambda = \lambda_*/L$, $l = 2\pi/\lambda$. Значение параметра Кориолиса f полагаем постоянным (приближение f -плоскости) и положительным. Обозначим

$$E = \frac{\mu}{fL^2}; \quad D = \frac{d}{f}; \quad \alpha = \frac{D}{l} + El; \quad \epsilon = \frac{E}{l}.$$

Отметим, что большинство обозначений совпадают с принятыми в работах [6, 11]. Пусть жидкость расположена при $x \leq 0$. Запишем условия непротекания и прилипания на стенке:

$$u^*|_{x=0} = v^*|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

2. Захваченные волны

Следуя работе [6], решения типа захваченных волн для системы уравнений (1)–(3) с граничными условиями (4) ищем в виде

$$u^* = u_1^* + u_2^*; \quad v^* = v_1^* + v_2^*; \quad \eta^* = \eta_1^* + \eta_2^*, \quad (5)$$

$$\lambda_B \approx \pi E^{1/3} 2^{2/3}. \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} & (u_j^*, v_j^*, \eta_j^*) = \\ & = (\varepsilon_s U_j^*, \varepsilon_s V_j^*, h_j^*) \exp\left(ik_j^* \frac{x}{L} + il \frac{y}{L} - ic^* lft\right); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{Im}(c^*) < 0; \quad \text{Im}(k_j^*) < 0. \quad (7)$$

$\text{Re}(c^*)$ — безразмерная фазовая скорость волны;

$l|\text{Im}(c^*)|$ — коэффициент затухания. В [11] получено уравнение четвертой степени для переменной c^* :

$$\begin{aligned} & (1 - 4\varepsilon^2 l^2) c^{*4} + 2i(l^2 \varepsilon - 2\varepsilon + \alpha) c^{*3} - \\ & - (2 + \alpha^2 + 2\alpha l^2 \varepsilon + l^4 \varepsilon^2) c^{*2} - 2i(\alpha + l^2 \varepsilon) c^* + 1 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

и квадратное уравнение для $k^* \in \{k_1^*, k_2^*\}$:

$$\begin{aligned} & 2(c^* l^2 \varepsilon + i) \varepsilon c^{*2} k^{*2} + [i - ic^{*2} + (l^2 \varepsilon + \alpha) c^*] k^* - \\ & - 2ic^{*4} l^2 \varepsilon + (2\varepsilon l^2 \alpha + 1) c^{*3} + (il^2 \varepsilon + i\alpha) c^{*2} - c^* = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Зададим набор «характерных» значений модельных параметров: $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $K = 0,01 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\mu = 10^3 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $L = 20 \text{ км}$. Имеем $D = 0,0025$, $E = 0,025$. На рис. 1 показаны графики зависимости компонент c^* от длины волны λ . Важной особенностью решений в области относительно коротких волн является наличие волны, движущейся в противоположном по отношению к волне Кельвина направлении. В [11] получена следующая оценка для λ_B — максимальной длины волны с $\text{Re}(c) < 0$:

На всех графиках (рис. 1) по оси абсцисс отложена безразмерная длина волны λ в логарифмическом масштабе; значению λ_B соответствует вертикальная штриховая линия. Решения с $\text{Re}(c^*) > 0$, соответствующие волне Кельвина, помечены символом F^* , решения с $\text{Re}(c^*) < 0$ — символом B^* . Отметим, что в работе [6] не представлены решения для $\lambda < 1$, а противоположная волна не рассматривалась.

3. Сеточные захваченные волны

Пусть система уравнений (1)–(3) решается разностным методом на сетке типа B (рис. 2, а) по классификации Аракавы [2]. Сеточные переменные размещаются на прямоугольных подсетках с координатами узлов

$$x_m = L\Delta_x(m - M); \quad y_n = L\Delta_y n; \quad \Delta_x > 0; \quad \Delta_y > 0; \quad m \leq M,$$

где m и n — индексы узлов. В узлах с целыми индексами расположены компоненты скорости u и v , в узлах с «полуцелыми» индексами — η . Будем использовать обозначение $F_{m,n} \equiv F(x_m, y_n)$. Запишем пространственную разностную аппроксимацию уравнений [2]:

$$\partial_t u - fv = -\varepsilon_s^2 \delta_x \bar{\eta}^y + \mu(\delta_{xx} u + \delta_{yy} u) - du; \quad (11)$$

$$\partial_t v + fu = -\varepsilon_s^2 \delta_y \bar{\eta}^x + \mu(\delta_{xx} v + \delta_{yy} v) - dv; \quad (12)$$

$$\partial_t \eta + \delta_x \bar{u}^y + \delta_y \bar{v}^x = 0, \quad (13)$$

где разностные операторы определены следующим образом:

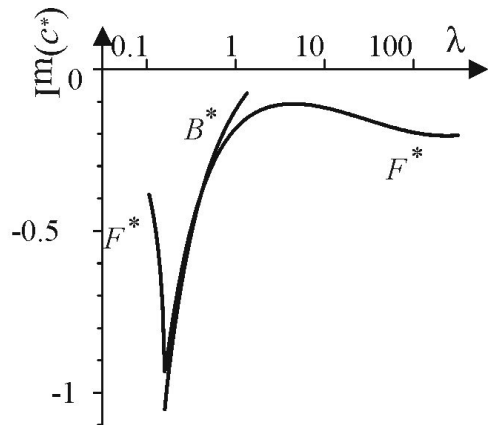
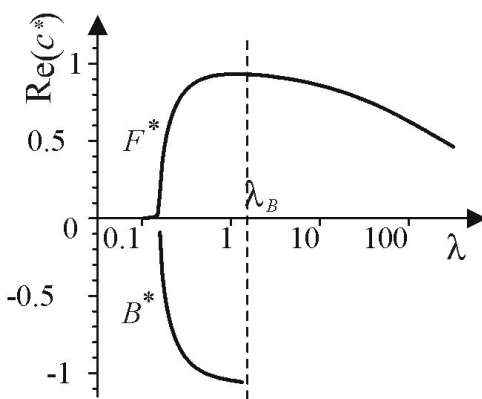


Рис. 1. Графики зависящих от λ функций, характеризующих фазовую скорость и затухание волны: а — $\text{Re}(c^*)$; б — $\text{Im}(c^*)$

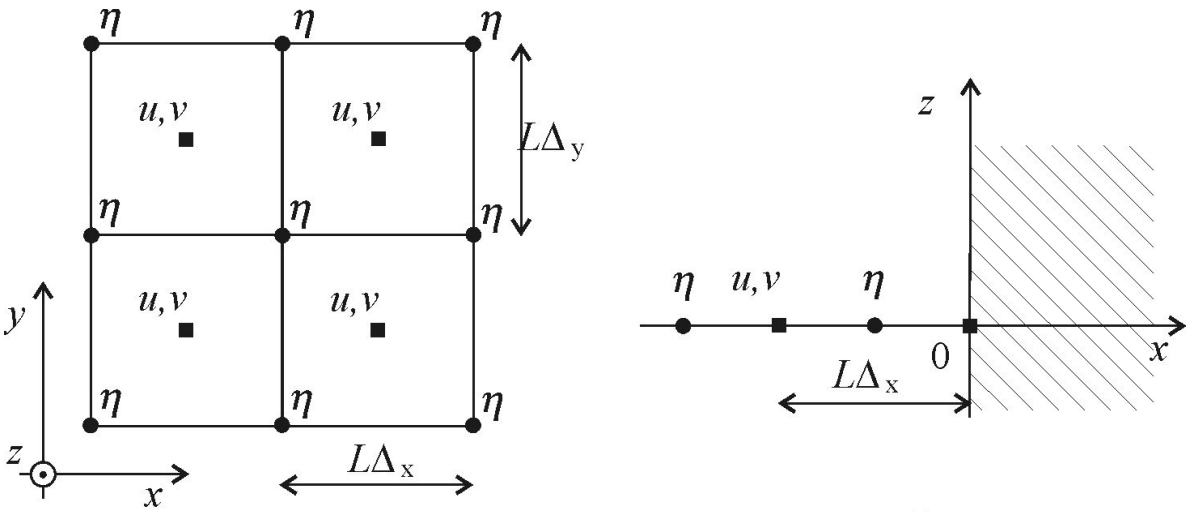


Рис. 2. Расположение границы и узлов на сетке B :
 а — размещение узлов u, v, η ; б — граница в узлах (u, v)

$$(\delta_x F)_{m,n} = \frac{1}{L\Delta_x} \left(F_{m+\frac{1}{2},n} - F_{m-\frac{1}{2},n} \right);$$

$$(\delta_y F)_{m,n} = \frac{1}{L\Delta_y} \left(F_{m,n+\frac{1}{2}} - F_{m,n-\frac{1}{2}} \right);$$

$$(\bar{F}^x)_{m,n} = \frac{1}{2} \left(F_{m+\frac{1}{2},n} + F_{m-\frac{1}{2},n} \right);$$

$$(\bar{F}^y)_{m,n} = \frac{1}{2} \left(F_{m,n+\frac{1}{2}} + F_{m,n-\frac{1}{2}} \right).$$

Запишем краевые условия (4) в узлах $u_{M,n}, v_{M,n}$, расположенных на твердой границе (рис. 2, б):

$$u_{M,n} = v_{M,n} = 0. \quad (14)$$

Решения системы (11)–(13) с краевыми условиями (14) ищем в виде распространяющихся вдоль берега сеточных захваченных волн:

$$u_{m,n} = u_{1m,n} + u_{2m,n}; v_{m,n} = v_{1m,n} + v_{2m,n}; \quad (15)$$

$$\eta_{m,n} = \eta_{1m,n} + \eta_{2m,n},$$

где

$$(u_j, v_j, \eta_j)_{m,n} = (U_j, V_j, h_j) \exp(ik_j \Delta_x (m - M) + il \Delta_y n - iclft); \quad (16)$$

$$\text{Im}(k_j) < 0; \quad 0 < l \leq \frac{\pi}{\Delta_y}. \quad (17)$$

Подставив в граничные условия (14) выражения из (15) и (16), получим

$$U_1 + U_2 = 0; \quad V_1 + V_2 = 0. \quad (18)$$

Систему уравнений для сеточных захваченных волн можно привести к такому виду [12], когда она состоит из уравнения четвертой степени для переменной c :

$$B_4 c^4 + B_3 c^3 + B_2 c^2 + B_1 c + 1 = 0, \quad (19)$$

где

$$B_4 = A_1^2 \Delta_y^4 - 4l^2 \Delta_y^8 \epsilon^2; \quad B_0 = \frac{\Delta_y^4}{l^4} \sin^4(l \Delta_y);$$

$$B_3 = 2i \Delta_y^4 A_1^2 \alpha - 2i \Delta_y^2 (2 \cos(l \Delta_y) + l^2 \Delta_y^2) A_1^2 \epsilon +$$

$$+ 4i \Delta_y^2 (2 \Delta_y^2 - A_2) A_1 \epsilon - 4i \Delta_y^6 A_2 \epsilon;$$

$$B_2 = -\frac{\Delta_y^4}{l^2} (2A_1 + \Delta_y^2 \Delta_x^2) \sin^2(l \Delta_y) -$$

$$- \left((2A_1 \cos(l \Delta_y) - 4\Delta_y^2 + l^2 \Delta_y^2 A_1 + 2A_2) \epsilon - A_1 \Delta_y^2 \alpha \right)^2;$$

$$B_1 = -\frac{2i}{l^2} \sin^2(l \Delta_y) \Delta_y^4 A_1 \alpha + \frac{2i}{l^2} \sin^2(l \Delta_y) \Delta_y^2 \times$$

$$\times (2A_1 \cos(l \Delta_y) - 4\Delta_y^2 + l^2 \Delta_y^2 A_1 + 2A_2) \epsilon;$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[(\Delta_y^2 - \Delta_x^2) \cos(l \Delta_y) + \Delta_x^2 + \Delta_y^2 \right];$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left[(\Delta_y^2 + \Delta_x^2) \cos(l \Delta_y) - \Delta_x^2 + \Delta_y^2 \right],$$

и уравнение для k_j :

$$C_2 e^{i2\Delta_x k_j} + C_1 e^{i\Delta_x k_j} + C_0 = 0, \quad j=1,2, \quad (20)$$

в котором коэффициенты C_0 , C_1 и C_2 зависят от переменной c :

$$C_0 = 2icl^2 \Delta_x \sin(l\Delta_y) \Delta_y^2 A_1 \alpha - 8\Delta_y^5 c^3 l^5 \varepsilon^2 - 2i(l\Delta_x \sin(l\Delta_y) A_1 + 4A_2 c \Delta_y) c \varepsilon \Delta_y^2 l^3 - 4icl^2 \sin(l\Delta_y) \Delta_x (-1 + \cos(l\Delta_y)) (\Delta_y^2 + A_1) \varepsilon + 2\Delta_y^2 \Delta_x \sin(l\Delta_y) (c^2 A_1 l^2 - \sin^2(l\Delta_y) - \sin(l\Delta_y) \Delta_y \Delta_x cl);$$

$$C_1 = 4(iA_2 \alpha + A_2 c + 2\Delta_y^2 \varepsilon c \alpha l^2) c^2 \Delta_x^2 l^3 \Delta_y^3 + 8\Delta_y^3 c^3 l^5 \times \times (4A_1 - \Delta_y^2 \Delta_x^2 l^2 - 2\cos(l\Delta_y) \Delta_y^2) \varepsilon^2 - 8i\Delta_y c^2 l^3 \times \times (\Delta_x^2 \cos(l\Delta_y) A_2 - \Delta_x^2 A_2 - \Delta_y^4 - \Delta_y^4 \cos(l\Delta_y)) \varepsilon - 4i\Delta_y^3 c^2 l^5 \Delta_x^2 (2\Delta_y^2 c^2 + A_2) \varepsilon;$$

$$C_2 = -2icl^2 \Delta_y^2 \Delta_x \sin(l\Delta_y) A_1 \alpha - 8\Delta_y^5 c^3 l^5 \varepsilon^2 + 2icl^3 \Delta_y^2 (l\Delta_x \sin(l\Delta_y) A_1 - 4A_2 c \Delta_y) \varepsilon + 4icl^2 \times \times \sin(l\Delta_y) \Delta_x (\cos(l\Delta_y) - 1) (\Delta_y^2 + A_1) \varepsilon + 2\Delta_y^2 \times \times \sin(l\Delta_y) \Delta_x (\sin^2(l\Delta_y) - c^2 A_1 l^2 - \sin(l\Delta_y) \Delta_y \Delta_x cl).$$

Для нахождения остальных компонент решения используют (11)–(13). При $\Delta_x \rightarrow 0$ и $\Delta_y \rightarrow 0$ сеточное решение стремится к решению в непрерывном случае.

В систему исходных дифференциальных уравнений работы [4] входит уравнение (2.2a), записанное в приближении геострофики. Запишем в этом приближении уравнение (1) для нормальной к стенке компоненты скорости и его разностную аппроксимацию:

$$-fv_g^* = -\varepsilon_s^2 \partial_x \eta_g^*; \quad (21)$$

$$-fv_g = -\varepsilon_s^2 \delta_x \overline{\eta_g^y}. \quad (22)$$

Пометим нижним индексом g переменные в уравнениях (12), (13), (15) и граничных условиях (14) и подставим в (6)

$$\begin{aligned} & (u_{g_j}, v_{g_j}, \eta_{g_j}) = \\ & = (\varepsilon_s U_{g_j}, \varepsilon_s V_{g_j}, h_{g_j}) \exp\left(ik_{g_j} \frac{x}{L} + il \frac{y}{L} - ic_g lft\right). \quad (23) \end{aligned}$$

Систему уравнений для сеточных захваченных волн в приближении геострофики можно привести к следующему виду [12]:

$$c_g^4 + 2i(\alpha - 2\varepsilon)c_g^3 - (2 + \alpha^2 + \Delta_x^2)c_g^2 - 2i\alpha c_g + 1 = 0; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & [\Delta_x - (\Delta_x + 4i\varepsilon)c_g^2 - (\Delta_x + i\alpha)\Delta_x c_g] e^{2ik_g \Delta_x} + \\ & + (i\Delta_x^2 \alpha + 4i\varepsilon + \Delta_x^2 c_g) 2c_g^2 e^{ik_g \Delta_x} + \\ & + (\Delta_x - 4i\varepsilon)c_g^2 + (i\alpha - \Delta_x)\Delta_x c_g - \Delta_x = 0. \quad (25) \end{aligned}$$

Известно [6], что ширина вязкого пограничного слоя в режиме $\varepsilon \ll 1$ характеризуется масштабом $\varepsilon^{1/2}$. С уменьшением длины волны требуется улучшать сеточное разрешение, поскольку уменьшается этот масштаб. На рис. 3 представлены графики зависимости компонент сеточных решений c и c_g от длины волны λ при $\Delta_x = \Delta_y = 0,1$ и $\Delta_x = \Delta_y = 0,5$. Решения получены при тех же значениях модельных параметров, что и решения, представленные на рис. 1. Графики помечены символами: F — сеточные волны совпадают по направлению с волной Кельвина; B — сеточные волны движутся в противоположном направлении; F_g — сеточные волны в приближении геострофики. Для сравнения показаны штриховыми линиями и помечены F^* и B^* графики, соответствующие решению c^* в непрерывном случае. Фазовые скорости сеточных волн по модулю не превышают фазовых скоростей, соответствующих непрерывному случаю: $|\text{Re}(c)| \leq |\text{Re}(c^*)|$ на рис. 3, а, б. Наблюдаются значительные различия на графиках решений для сеточных волн в приближении геострофики: $\text{Re}(c_g) \leq \text{Re}(c^*)$ на рис. 3, а и $\text{Re}(c_g) \leq \text{Re}(c^*)$ на рис. 3, б. В обоих вариантах сеточные решения затухают медленнее решений в непрерывном случае (рис. 3, в, г).

Отметим, что во втором варианте в диапазоне длин сеточных обратных волн B отсутствуют обратные волны B^* решения в непрерывном случае (рис. 3, а, б). По-видимому, такие сеточные решения необходимо отфильтровывать или подавлять.

Выводы

В работе исследованы свойства сеточных решений для внутренних волн, захваченных вращением Земли у вертикальной стенки в бассейне с плоским дном. Анализ проведен в рамках линейной системы уравнений мелкой воды в приближении f -плоскости с учетом вихревой вязкости. На стенке заданы условия прилипания. Рассмотрен случай пространственной разностной аппроксимации исходных дифференциальных уравнений на прямоугольной сетке типа B .

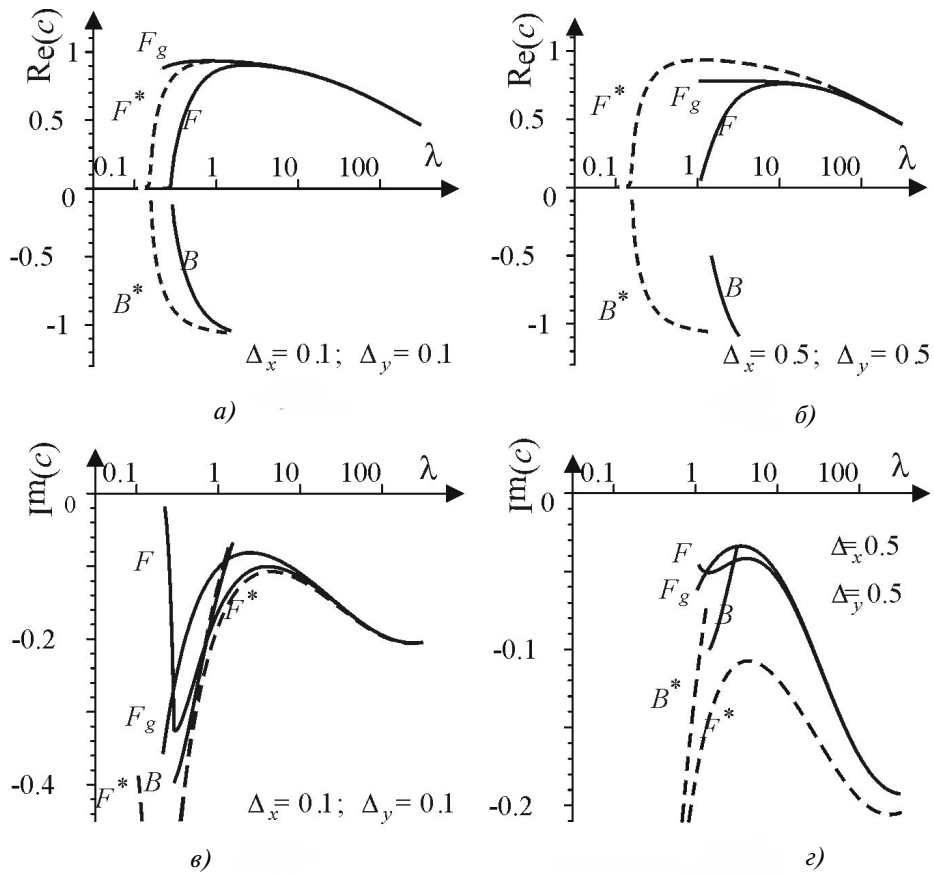


Рис. 3. Графики зависимости компонент сеточных решений c и c_g от длины волны λ

Решение для сеточных захваченных волн ищется в виде (15), (16). Система уравнений приводится к удобному для решения виду: уравнению четвертой степени (19) для переменной c и уравнению (20) для k_1 и k_2 . При неограниченном измельчении шага сетки обратные значения мнимых частей k_1 и k_2 характеризуют масштабы экспоненциального убывания для захваченной волны и вязкого пограничного слоя. Применение уравнений (19) и (20) позволяет исследовать влияние сеточного разрешения на решения при всех возможных значениях длин захваченных волн, начиная с удвоенного сеточного шага $2\Delta_y$. Изложенный в работе подход не содержит обусловленных приближением геострофики ограничений методики работы [4], исключающих из рассмотрения область относительно коротких волн с $\lambda < 1$, в которой вместе с разностным аналогом волны Кельвина может существовать решение в виде волны противоположного направления. Найдены решения при некоторых характерных значениях модельных параметров. Показано, что при «плохом» сеточном разрешении может существовать решение в виде волны противоположного направления.

Учитывать решения типа захваченных волн необходимо при разработке и анализе вычислительных условий на жидких границах, при интерпретации результатов вычислительных экспериментов, например, по расчету бароклинного отклика океана на крупномасштабное воздействие при наличии берега. Результаты работы полезны для анализа решений в численных моделях динамики океана, уравнения которых были получены из более полных уравнений классической гидродинамики на вращающейся Земле с применением приближения гидростатики и «очень грубого описания влияния турбулентного каскада на крупномасштабное течение» [13]. По-видимому, представляет интерес исследование решений для захваченных волн в рамках более полных моделей.

Работа выполнена при финансовой поддержке
РФФИ и ДВО РАН

(проекты 09-01-98519_р_восток_a,
09-II-CY-03-003 и 09-III-A-03-070).

Библиографический список

1. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. Математические модели в геофизической гидроди-

динамике и численные методы их реализации. — Л.: Гидрометеиздат, 1987.

2. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях; Пер. с англ. — Л.: Гидрометеиздат, 1979.

3. Вольцингер Н.Е., Пяковский Р.В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. — Л.: Гидрометеиздат, 1977.

4. Hsieh W.W., Davey M.K., Wajswics R.S. The free Kelvin wave in finite-difference numerical models // Journal of Phys. Oceanogr. 1983. V. 13, 8. P. 1383-1397.

5. Гилл А. Динамика атмосферы и океана: В 2-х т.; Пер. с англ. — М.: Мир, 1986.

6. Davey M.K., Hsieh W.W., Wajswics R.S. The free Kelvin wave with lateral and vertical viscosity // Journal of Phys. Oceanogr. 1983. V. 13, 12. P. 2182-2191.

7. Bryan K. A Numerical Method for the Study of the Circulation of the World Ocean // J. Comput. Phys. 1969. Vol. 4. P. 347-376.

8. Дианский Н.А., Багно А.В., Залесный В.Б. Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38, 4. С. 537-556.

9. Левин В.А., Смирнов С.В. Об одной численной реализации модели динамики океана со свободной поверхностью // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, 4. С. 19-34.

10. Каменкович В.М. Основы динамики океана. — Л.: Гидрометеиздат, 1973.

11. Смирнов С.В. О решениях для внутренних захваченных волн // Вычисл. мех. сплош. сред. 2008. Т. 1, 3. С. 96-105.

12. Смирнов С.В. О сеточных внутренних захваченных волнах при условиях прилипания на стенке // Успехи механики сплошных сред: к 70-летию акад. В.А. Левина: Сб. научн. тр. — Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 680-685.

13. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика: В 2-х т.; Пер. с англ. — М.: Мир, 1984.

Московский авиационный институт

Статья поступила в редакцию 20.04.2009