УДК 532.135

Стационарное течение реологически сложной жидкости в бесконечном щелевом канале.

С.А. Лившиц, Р.В. Лебедев.

Аннотация.

В работе проведено исследование ламинарного режима течения нелинейно-вязкой жидкости в бесконечном щелевом канале с учетом действия диссипативного и химического источников тепловыделения при граничных условиях первого и третьего рода. Бифуркационный анализ уравнения энергии произведен при помощи метода основанного на разложении искомых функций в ряды Тейлора.

Ключевые слова.

теплообмен; аналитическое решение; уравнения движения и сохранения энергии; реологические сложные среды; тепловой взрыв; характеристическое уравнение; бифуркация.

Исследования в области прогрессивного нарастания температуры за последнее время получили широкое развитие в связи с решением задач, как фундаментального, так и прикладного характера. Эти исследования имеют большое значение для развития таких фундаментальных областей знания, как химическая кинетика и теория теплопередачи.

Для явления прогрессивного нарастания температуры характерно, выделение тепла, скорость которого экспоненциально возрастает с температурой. В теории обычно рассматривают источники тепловыделения, связанные с химическими превращениями (экзотермическими реакциями), явление прогрессивного нарастания температуры имеет широкое распространение.

В то же время известно, что условия, необходимые для прогрессовного нарастания температуры могут возникать при протекании других, чисто физических процессов как за счет выделения внутренней энергии, запасенной в веществе, так и благодаря диссипации энергии внешних воздействий.

Так в одной из первых работ в этом направлении авторами Бостанджиняном С.А. и Мержановым А.Г. [1-2], исследовались критические режимы течения вязкой ньютоновской жидкости в круглой трубе. В дальнейшем, коллективом авторов [3] была предложена методика, при помощи которой стало возможно аналитическое исследование уравнения теплопроводности, однако, в большинстве работ, приведены лишь результаты численных исследований.

При проведении анализа материала, посвященного описанию процесса теплообмена в движущихся средах, с учетом действия диссипативного и химического источников тепловыделения выявлено недостаточное количество работ аналитического характера, рассматривающих критические режимы течения реологически сложных сред в плоскопараллельном щелевом канале.

В работе рассмотрено ламинарное течение вязкой Ньютоновской жидкости с граничными условиями первого и третьего рода в бесконечном щелевом канале. Для рассматриваемой модели были приняты следующие допущения:

- теплофизические характеристики жидкости меняются незначительно;
- массовые силы пренебрежимо малы;
- перенос тепла вдоль направления движения за счет теплопроводности много меньше вынужденного;
- присутствует химический источник теплоты в виде реакции нулевого порядка;
- в качестве гидродинамических граничных условий приняты условия прилипания жидкости на границах щелевого канала.

С учетом принятых допущений в случае плоскопараллельного течения рассматривалась следующая система уравнений движения и сохранения энергии:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\mu\dfrac{dV}{dx}\right)=\dfrac{dP}{dz}=const, \quad x\in(-h,h) \\ \lambda\dfrac{d^2T}{dx^2}+\mu I_2+Q_0\cdot k_0\cdot Exp\left(-E/RT\right)=0, \quad x\in(-h,h) \end{cases} \tag{1}$$

В качестве тепловых граничных условий рассмотрены тепловые граничные условиях первого и третьего рода.

Тепловые граничные условия первого рода:

$$x=-h \;\; V=0, \;\; T=T_1=const, \tag{2}$$

$$x=h \;\; V=0, \;\; T=T_1=const \tag{3}$$

Тепловые граничные условия третьего рода:

$$x=-h \;\; V=0, \;\; \lambda\cdot\left(\frac{dT}{dx}\right)=-\alpha_1(T-T_1), \tag{4}$$

$$x=h \;\; V=0, \;\; \lambda\cdot\left(\frac{dT}{dx}\right)=-\alpha_1(T-T_1), \tag{5}$$

здесь x, z –текущие координаты; $2h$ –ширина щели; V –скорость; T –температура жидкости; λ,μ –коэффициенты теплопроводности и динамической вязкости; I_2 –второй инвариант тензора скоростей деформации; Q_0 –тепловой эффект; k_0 –константа скорости; E –энергия активации химической реакции; R – газовая постоянная.

Следует отметить, так как рассматривается течение со сформировавшимся профилем вектора скорости, то в силу симметрии, в центре щели имеется экстремум по температуре:

$$x=0\Rightarrow\frac{dT}{dx}=0, \tag{6}$$

Интегрируя уравнение движения по x, и учитывая допущение о том, что профиль вектора скорости мгновенно подстраивается под изменение температуры, получаем:

$$\mu\frac{dV}{dx}=\frac{dP}{dz}\cdot x \tag{7}$$

Учитывая, что второй инвариант тензора скоростей деформации выражается соотношением $I_2 = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2$ мы можем записать:

$$\mu I_2 = \left(\frac{dP}{dz}\right)^2 \frac{x^2}{\mu} \tag{8}$$

Таким образом, из рассмотрения системы уравнений движения и сохранения энергии (1) получается следующее соотношение:

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{dP}{dz}\right)^2 \frac{x^2}{\mu} + Q_0 \cdot k_0 \cdot Exp\left(-E/_{RT}\right) = 0, \quad x \in (-h, h) \tag{9}$$

Введя безразмерные функции координат и температуры $\dot{x} = \frac{x}{h}$; $\theta = \frac{E}{RT_0{}^2}(T - T_0)$ и учитывая, что в силу симметрии относительно центра щели можно рассмотреть интервал $x \in (0,1)$

Уравнение (9) примет вид:

$$\lambda \cdot \frac{R \cdot T_0{}^2}{E \cdot h^2} \frac{d^2\theta}{d\dot{x}^2} + \left(\frac{dP}{dz}\right)^2 \cdot \dot{x}^2 \cdot h^2 \cdot Exp\left(\theta \cdot B/_{(\theta \cdot R \cdot T_0 + E)}\right) \times$$

$$\times \left[A_\infty - (A_\infty - A_0) \cdot Exp\left(-\tilde{\theta}_0 \cdot \frac{\tau}{A_\infty - A_0}\right)\right] \cdot Exp\left(-B/_{R \cdot T_0}\right) +$$

$$+ Q_0 \cdot k_0 \cdot Exp\left(E \cdot \theta/_{(\theta \cdot R \cdot T_0 + E)}\right) \cdot Exp\left(-E/_{R \cdot T_0}\right) = 0 \tag{10}$$

Для сокращения записи введем безразмерные величины:

$$\beta = \frac{R \cdot T_0}{E}; \quad \alpha = \frac{B}{E}; \quad c_0 = \frac{A_\infty}{A_0}; \quad c_1 = \frac{\tilde{\theta}_0 \cdot \frac{dP}{dz}}{A_\infty - A_0};$$

$$\chi = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 \frac{h^4 \cdot A_0 \cdot E}{\lambda \cdot R \cdot T_0} Exp\left(-B/_{RT_0}\right) \qquad \delta = \frac{h^2 \cdot Q_0 \cdot k_0 \cdot E}{\lambda \cdot R \cdot T_0} Exp\left(-E/_{RT_0}\right)$$

После введения этих обозначений соотношение (10) принимает вид:

$$\frac{d^2\theta}{d\dot{x}^2}+\chi\dot{x}^2\left[c_0-(c_0-1)e^{-c_1\dot{x}}\right]\cdot Exp\left(\alpha\theta\big/(1+\beta\theta)\right)+\delta Exp\left(\theta\big/(1+\beta\theta)\right)=0 \qquad (11)$$

Обозначив $W=Exp\left(\alpha\cdot\theta\big/(1+\beta\cdot\theta)\right)$ и $\widetilde{W}=Exp\left(\theta\big/(1+\beta\cdot\theta)\right)$, получим выражение удобное для исследований.

$$\frac{d^2\theta}{d\dot{x}^2}+\chi\cdot\dot{x}^2\cdot\left[c_0-(c_0-1)e^{-c_1\dot{x}}\right]\cdot W+\delta\cdot\widetilde{W}=0 \qquad (12)$$

Исследовать неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами (12) на предмет существования и единственности решения будем, используя разложение функций θ, W и $\widetilde{W}$ в ряды Тейлора в окрестности точки ноль.

Обозначив: $\theta\big|_{x=0}=\theta_0$; $W\big|_{x=0}=W_0$; $\widetilde{W}\big|_{x=0}=\widetilde{W}_0$; $\theta'\big|_{x=0}=\theta_0'$ $W'\big|_{x=0}=W_0'$; $\widetilde{W}'\big|_{x=0}=\widetilde{W}_0'$ … и учитывая тот факт, что в силу симметрии щели функция θ является четной, получим разложение функций θ, W и $\widetilde{W}$ в ряды Тейлора в окрестности точки ноль.

$$\theta=\theta_0+\frac{\theta_0''}{2}\dot{x}^2+\frac{\theta_0^{(4)}}{24}\dot{x}^4+\frac{\theta_0^{(6)}}{720}\dot{x}^6$$

$$W=W_0+\frac{W_0''}{2}\dot{x}^2+\frac{W_0^{(4)}}{24}\dot{x}^4$$

$$\widetilde{W}=\widetilde{W}_0+\frac{\widetilde{W}_0''}{2}\dot{x}^2+\frac{\widetilde{W}_0^{(4)}}{24}\dot{x}^4$$

Подставив полученные разложения в выражение (12) и аппроксимируя функцию $Exp(-c_1\cdot\dot{x})$ полиномом второй степени $Exp(-c_1\cdot\dot{x})=1-(1-Exp(-c_1))\cdot\dot{x}^2$ получим соотношение:

$$\theta_0''+\frac{1}{2}\cdot\theta_0^{(4)}\cdot\dot{x}^2+\frac{1}{24}\cdot\theta_0^{(6)}\cdot\dot{x}^4+\chi\cdot\dot{x}^2\cdot\left[1+(c_0-1)(1-Exp(-c_1))\cdot\dot{x}^2\right]\times$$

$$\times W_0\cdot\left[1+\frac{\alpha\cdot\theta_0''}{2(\theta_0\beta+1)^2}\cdot\dot{x}^2+\left(\frac{\alpha(\theta_0'')^2}{8(\theta_0\beta+1)^4}-\frac{\alpha\beta(\theta_0'')^2}{4(\theta_0\beta+1)^3}+\frac{\alpha\theta_0^{(4)}}{24(\theta_0\beta+1)^2}\right)\cdot\dot{x}^4\right]+$$

$$+\delta\tilde{W}_0\left[1+\frac{\theta_0''}{2(\theta_0\beta+1)^2}\cdot\dot{x}^2+\left(\frac{(\theta_0'')^2}{8(\theta_0\beta+1)^4}-\frac{\beta(\theta_0'')^2}{4(\theta_0\beta+1)^3}+\frac{\theta_0^{(4)}}{24(\theta_0\beta+1)^2}\right)\cdot\dot{x}^4\right]=0 \quad (13)$$

Рассмотрев коэффициенты при $\dot{x}^0$, $\dot{x}^2$, $\dot{x}^4$ получим:

$$\theta_0''=-\delta\cdot\tilde{W}_0$$

$$\theta_0^{(4)}=-2\cdot\chi\cdot W_0+\frac{\delta^2\cdot\tilde{W}_0^{\,2}}{(\theta_0\beta+1)^2}$$

$$\theta_0^{(6)}=-24\cdot\left\{\chi\cdot W_0\cdot\left[(c_0-1)\cdot(1-Exp(-c_1))-\frac{\alpha\cdot\delta\cdot\tilde{W}_0}{2(\theta_0\beta+1)^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\delta\cdot\tilde{W}_0\cdot\left[\frac{\delta^2\cdot\tilde{W}_0^{\,2}}{6(\theta_0\beta+1)^4}-\frac{\beta\cdot\delta^2\cdot\tilde{W}_0^{\,2}}{4(\theta_0\beta+1)^3}-\frac{\chi\cdot W_0}{12(\theta_0\beta+1)^2}\right]\right\}$$

Подставив полученные выражения в разложение функции θ в ряд Тейлора имеем:

$$\theta=\theta_0-\frac{\delta\cdot\tilde{W}_0}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{12}\left[-\chi\cdot W_0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2\cdot\tilde{W}_0^{\,2}}{(\theta_0\beta+1)^2}\right]\dot{x}^4-$$

$$-\frac{1}{30}\left\{\chi\cdot W_0\cdot\left[(c_0-1)\cdot(1-Exp(-c_1))-\frac{\alpha\cdot\delta\cdot\tilde{W}_0}{2(\theta_0\beta+1)^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\delta\cdot\tilde{W}_0\cdot\left[\frac{\delta^2\cdot\tilde{W}_0^{\,2}}{6(\theta_0\beta+1)^4}-\frac{\beta\cdot\delta^2\cdot\tilde{W}_0^{\,2}}{4(\theta_0\beta+1)^3}-\frac{\chi\cdot W_0}{12(\theta_0\beta+1)^2}\right]\right\}\cdot\dot{x}^6 \quad (14)$$

В случае если на границе заданны тепловые граничные условия первого рода (2)-(3), то после перехода к безразмерным функциям координаты и температуры граничные условия примут вид:

$$\dot{x}=1\ \Rightarrow\ \theta=\frac{E}{RT_0^{\,2}}(T_1-T_0)=\theta_1 \quad (15)$$

В этом случае, подставляя граничные условия (15) в соотношение (14) и переобозначая θ_0 за h, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\theta_1 = h - \frac{\delta Exp\left(h \big/ (1+\beta h) \right)}{2} + \frac{1}{12}\left[-\chi Exp\left(\alpha h \big/ (1+\beta h) \right) + \frac{\delta^2 Exp\left(2h \big/ (1+\beta h) \right)}{2(\beta h + 1)^2} \right] -$$

$$- \frac{1}{30}\left\{ \chi Exp\left(\alpha h \big/ (1+\beta h) \right) \left[(c_0 - 1)(1 - Exp(-c_1)) - \frac{\alpha\delta Exp\left(h \big/ (1+\beta h) \right)}{2(\beta h + 1)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta^3 Exp\left(3h \big/ (1+\beta h) \right)}{6(1+\beta h)^4} - \frac{\beta\delta^3 Exp\left(3h \big/ (1+\beta h) \right)}{4(1+\beta h)^3} - \frac{\chi\delta Exp\left((\alpha+1)h \big/ (1+\beta h) \right)}{12(1+\beta h)^2} \right\} \qquad (16)$$

В случае если $c_0 < 1$, то данное уравнение описывает течение дилатантной жидкости; если $c_0 = 1$, то рассматривается течение ньютоновской жидкости и если $c_0 > 1$, то уравнение описывает течение псевдопластичной жидкости.

Решением данного уравнения являются нули функции $F(h)$:

$$F(h) = \theta_1 - h + \frac{\delta Exp\left(h \big/ (1+\beta h) \right)}{2} - \frac{1}{12}\left[-\chi Exp\left(\alpha h \big/ (1+\beta h) \right) + \frac{\delta^2 Exp\left(2h \big/ (1+\beta h) \right)}{2(\beta h + 1)^2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{30}\left\{ \chi Exp\left(\alpha h \big/ (1+\beta h) \right) \left[(c_0 - 1)(1 - Exp(-c_1)) - \frac{\alpha\delta Exp\left(h \big/ (1+\beta h) \right)}{2(\beta h + 1)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta^3 Exp\left(3h \big/ (1+\beta h) \right)}{6(1+\beta h)^4} - \frac{\beta\delta^3 Exp\left(3h \big/ (1+\beta h) \right)}{4(1+\beta h)^3} - \frac{\chi\delta Exp\left((\alpha+1)h \big/ (1+\beta h) \right)}{12(1+\beta h)^2} \right\} \qquad (17)$$

В зависимости от значений параметров θ_1, α, β, δ, χ функция $F(h)$ может, при построении линии решений, как совсем не обращаться в ноль, так иметь один или более нулей.

В случае если на границе заданны тепловые граничные условия третьего рода (4)-(5), то после перехода к безразмерным функциям координаты и температуры граничные условия примут вид:

$$\dot{x} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{d\theta}{d\dot{x}} = -Bi \cdot (\theta - \theta_1) \tag{18}$$

где $Bi = \frac{\alpha_1}{\lambda} h$, $\theta_1 = \frac{E}{RT_0{}^2}(T_1 - T_0)$

В этом случае, дифференцируя по $\dot{x}$ (14) получаем:

$$\frac{d\theta}{d\dot{x}} = -\delta \cdot \tilde{W}_0 \cdot \dot{x} + \frac{1}{4}\left[-\chi \cdot W_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2 \cdot \tilde{W}_0{}^2}{(\theta_0 \beta + 1)^2}\right]\dot{x}^3 -$$

$$-\frac{1}{5}\left\{\chi \cdot W_0 \cdot \left[(c_0 - 1) \cdot (1 - Exp(-c_1)) - \frac{\alpha \cdot \delta \cdot \tilde{W}_0}{2(\theta_0 \beta + 1)^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \delta \cdot \tilde{W}_0 \cdot \left[\frac{\delta^2 \cdot \tilde{W}_0{}^2}{6(\theta_0 \beta + 1)^4} - \frac{\beta \cdot \delta^2 \cdot \tilde{W}_0{}^2}{4(\theta_0 \beta + 1)^3} - \frac{\chi \cdot W_0}{12(\theta_0 \beta + 1)^2}\right]\right\} \cdot \dot{x}^5 \tag{19}$$

Используя (14), (18) и (19) после переобозначения $\boldsymbol{\theta_0}$ за $\boldsymbol{h}$, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$60(h - \theta_1) = 30\delta Exp\left(h/(1 + \beta h)\right)\left(\frac{2}{Bi} + 1\right) +$$

$$+ 5\left[\chi Exp\left(\alpha h/(1 + \beta h)\right) - \frac{1}{2}\frac{\delta^2 Exp\left(2h/(1 + \beta h)\right)}{(h\beta + 1)^2}\right]\left(\frac{3}{Bi} + 1\right) +$$

$$+ 2 \cdot \left\{\chi \cdot Exp\left(\alpha h/(1 + \beta h)\right) \cdot \left[(c_0 - 1) \cdot (1 - Exp(-c_1)) - \frac{\alpha \cdot \delta \cdot Exp\left(h/(1 + \beta h)\right)}{2(h\beta + 1)^2}\right] + \right.$$

$$+\frac{\delta^3 Exp\left(3h/(1+\beta h)\right)}{6(h\beta+1)^4}-\frac{\beta\delta^3 Exp\left(3h/(1+\beta h)\right)}{4(h\beta+1)^3}-$$
$$\left.-\frac{\chi\delta Exp\left((\alpha+1)h/(1+\beta h)\right)}{12(h\beta+1)^2}\right\}\left(\frac{6}{Bi}+1\right) \qquad (20)$$

Уравнение (20) описывает течение делатантной, ньютоновской и псевдопластичной жидкости, для тепловых граничных условий третьего рода, в зависимости от знака (c_0-1), [5].

Решением данного уравнения являются нули функции $F(h)$:

$$F(h)=60(h-\theta_1)-30\delta Exp\left(h/(1+\beta h)\right)\left(\frac{2}{Bi}+1\right)-$$
$$-5\left[\chi Exp\left(\alpha h/(1+\beta h)\right)-\frac{1}{2}\frac{\delta^2 Exp\left(2h/(1+\beta h)\right)}{(h\beta+1)^2}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{3}{Bi}+1\right)-2\cdot\left\{\chi\cdot Exp\left(\alpha h/(1+\beta h)\right)\cdot\left[(c_0-1)\cdot(1-Exp(-c_1))-\frac{\alpha\cdot\delta\cdot Exp\left(h/(1+\beta h)\right)}{2(h\beta+1)^2}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^3 Exp\left(3h/(1+\beta h)\right)}{6(h\beta+1)^4}-\frac{\beta\delta^3 Exp\left(3h/(1+\beta h)\right)}{4(h\beta+1)^3}-\frac{\chi\delta Exp\left((\alpha+1)h/(1+\beta h)\right)}{12(h\beta+1)^2}\right\}\left(\frac{6}{Bi}+1\right)$$

В зависимости от значений параметров θ_1, α, β, δ, χ функция $F(h)$ может, при построении линии решений, как совсем не обращаться в ноль, так иметь один или более нулей.

Таким образом, при течении в щелевом канале реологически сложных (дилатантной, ньютоновской или псевдопластичной) жидкостей существуют такие наборы параметров, при которых налицо наличие области возможного возникновения теплового взрыва или критических режимов течений.

Взяв в качестве вязкой жидкости метакрилат марки В2 10% при температуре стенки T_1 =428 К с параметрами [4]:

T_0=423 К, ρ=790 кг/м^3, c_p=3,134 кДж/(кг·°К), λ=0,4443 кДж/(м·°К·с), J_0=0,5 мас.%, M_0=100 мас. %, k_0=1,91·10^{-4} 1/(мас.%·с), E=23,95 кДж/(моль), m=2,02, n=1,05, Q_0=13,1 кДж/моль, A_0=96000 1/(Па·с), A_∞=96000 1/(Па·с), K_{A_0}=67800 1/(Па·с), K_{B_0}=14,8 кДж/моль, D_M=9,76·10^{-10} м^2/с, D_J=2,126·10^{-10} м^2/с, k_{i0}=16,8·10^{-3} 1/(мас.%·с), E_i=38,32 кДж/(моль), K_{A_∞}=13600 1/(Па·с), K_θ=3,01 1/(Па^2·с), B_0=10,4 кДж/(моль), B_∞=10,4 кДж/(моль), K_{B_∞}=13,7 кДж/(моль).

Температура стенки принята следующей T_1 =428 К.

Графически решение уравнения (16) при граничных условиях первого рода было получено с использованием программы Mathematic рис 1 анализ которого позволяет однозначно говорить о возможности бифуркационных явлений происходящих для данного вида жидкости при определенной температуре.

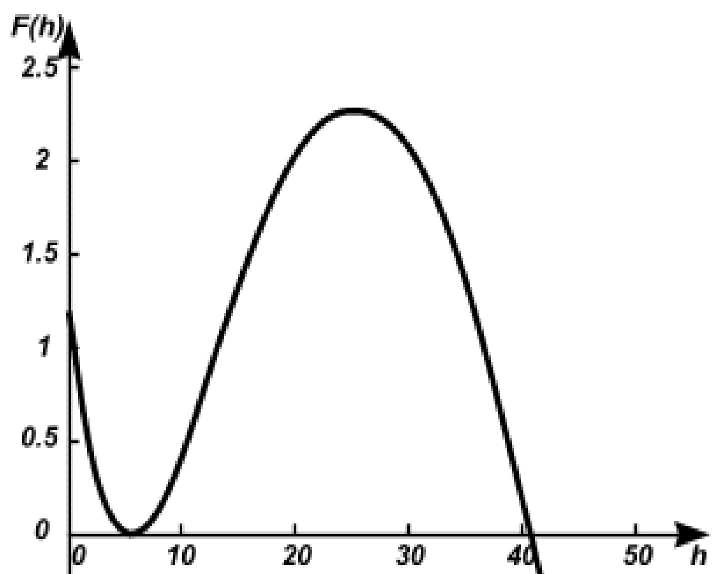

Рисунок 1. Графическое решение уравнения (16) для мономеров метакрилата марки В2 10%, с учетом диссипативного и химического тепловыделения при тепловых граничных условий первого рода.

Графически решение уравнения (20) при граничных условиях третьего рода для мономера метакрилата марки В2 10%, с учетом определенных параметров (см. выше) было получено с использованием программы Mathematic рис 2 анализ которого позволяет однозначно говорить о возможности бифуркационных явлений происходящих для данного вида жидкости при определенной температуре.

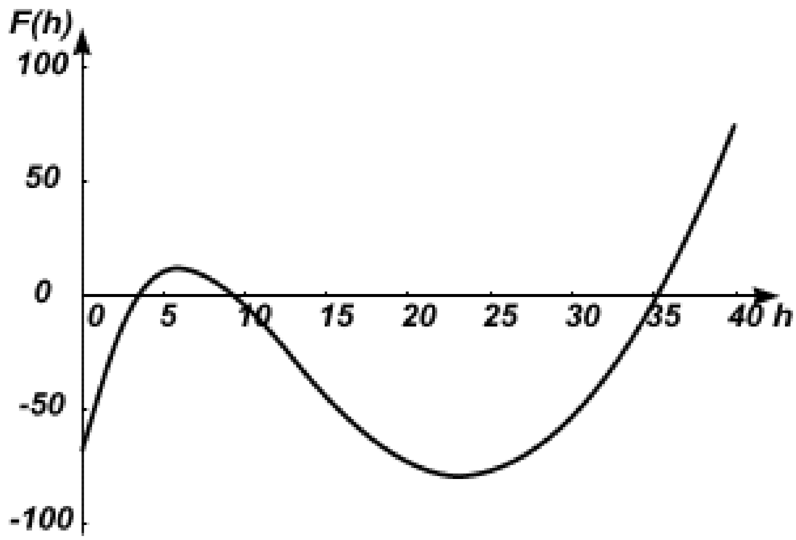

Рисунок 2. Графическое решение уравнения (20) для мономеров метакрилата марки В2 10%, с учетом диссипативного и химического тепловыделения при тепловых граничных условий третьего рода.

Данное исследование позволяет выявлять области возможного возникновения бифуркационных явлений с целью предотвращения возникновения нерасчетных режимов течения характеризуемых выделением большого количества теплоты которая не успевает отводиться через стенку канала, т.е. тепловым взрывом. В работе приведены результаты численного исследования для мономера метакрилата марки В2 10%, получены режимы в которых наличествуют более одного решения, что полностью согласуется с аналитическими выкладками.

Библиографический список.

1. Кутателадзе С.С., Попов В.И., Хабахпашева Е.М. «К гидродинамике жидкостей с переменной вязкостью» //ПМТФ, 1966. №1 с. 45-49
2. Бостанджинян С.А., Мержанов А.Г., Худяев С.И.«О Гидродинамическом тепловом взрыве» // Доклады Академии наук СССР 1965, т. 163 №1 с. 133-136
3. Назмеев Ю.Г., Малов К.М., Шарапов А.Р. «Бифуркационный анализ уравнения энергии движущихся вязких сред в бесконечной круглой трубе» //Вести академии наук БССР Минск, 1991. № 3 С. 115-122.
4. Назмеев Ю.Г. Тепломассоперенос в трубчатых реакторах гомофазной полимеризации. Дис. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. МЭИ, Казанский филиал, Казань, 1986, 349 с.
5. Назмеев Ю.Г., Лившиц С.А. «Бифуркационный анализ уравнения энергии при ламинарном течении вязкой жидкости в коаксиальном канале» //Труды Академэнерго Казань, 2005. № 1 С. 3-7.

Сведения об авторах

Лебедев Руслан Владимирович, аспирант кафедры ПТЭ, Казанского государственного энергетического университета.

тел: (843) 517-62-37

Лившиц Семен Александрович – к.т.н., доцент кафедры ПТЭ КГЭУ

тел: 513-36-95