

Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 7. С. 299–308
Thermal processes in engineering, 2023, vol. 15, no. 7, pp. 299–308

Научная статья
УДК 536.2
DOI: 10.34759/tpt-2023-15-7-299-308

Прогнозирование эффективной теплопроводности композитов с графеновыми включениями

И.В. Лавров¹✉, В.В. Бардушкин¹, В.Б. Яковлев¹

¹ *Институт нанотехнологий микроэлектроники РАН, Москва, Россия*
✉ iglavr@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача вычисления тензора эффективной теплопроводности образца матричного композита с полимерной матрицей и включениями из многослойного графена, форма которых моделируется сильно сжатыми сфероидами (эллипсоидами вращения). Ориентации включений считаются имеющими вероятностное распределение с осью симметрии бесконечного порядка. Решение задачи производится на основе обобщенного сингулярного приближения, в качестве среды сравнения принимается матрица. Такой вариант приближения соответствует приближению Максвелла – Гарнетта для вычисления эффективных диэлектрических характеристик матричного композита. Для учета вероятностного распределения ориентаций включений используется теория представлений группы $SO(3)$. Проведены модельные расчеты главных компонент тензора эффективной теплопроводности образца композита с эпоксидной системой типа ЭД-20 в качестве матрицы и графеновыми включениями в зависимости от объемной доли включений. Расчеты производятся при различных аспектных отношениях включений и при различных разбросах в ориентациях осей включений, а также при равномерном распределении ориентаций включений. Показано, что добавлением небольшой объемной доли графеновых включений можно добиться значительного увеличения теплопроводности композита, а также сильной анизотропии теплопроводящих свойств материала.

Ключевые слова: тензор эффективной теплопроводности, композит, обобщенное сингулярное приближение, распределение ориентаций включений, представления группы $SO(3)$

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 122040800154-7.

Для цитирования. Лавров И.В., Бардушкин В.В., Яковлев В.Б. Прогнозирование эффективной теплопроводности композитов с графеновыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 7. С. 299–308. DOI: 10.34759/tpt-2023-15-7-299-308

Original article

Prediction of the effective thermal conductivity of composites with graphene inclusions

I.V. Lavrov¹✉, V.V. Bardushkin¹, V.B. Yakovlev¹

¹ *Institute of Nanotechnology of Microelectronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
✉ iglavr@mail.ru

Abstract. The article considers the problem of computing the effective thermal conductivity tensor of a sample of matrix composite with polymer matrix and multi-layer graphene inclusions, which shape is being

© Лавров И.В., Бардушкин В.В., Яковлев В.Б., 2023

modeled by the strongly squeezed spheroids (ellipsoid of rotation). These inclusions orientations are assumed to be of the probability distribution with the infinite order symmetry axis. The problem solution is being performed based on the generalized singular approximation, and matrix is assumed as a comparison medium. This approximation option corresponds to the Maxwell-Garnett approximation for computing effective dielectric characteristics of matrix composite. The representation theory of the $SO(3)$ group is being applied to account for the probability distribution of the inclusions. Model computations of basic components of the effective thermal conductivity tensor of the composite sample with the ED-20 epoxy system as a matrix with graphene inclusions in dependence on the volume fraction of the inclusions were conducted. Computations are being performed at various aspect ratios of the inclusions and various scatters in the inclusions axes orientations, as well as uniform distribution of the inclusions orientations. The article demonstrates that adding a slight share of inclusions may lead to significant increase in the composite thermal conductivity, as well as strong anisotropy of the heat-conducting properties of the material.

Keywords: tensor of effective thermal conductivity, composite, generalized singular approximation, distribution of inclusion orientations, $SO(3)$ group representations

Funding. This work was carried out within the framework of a state assignment, topic no. 122040800154-7.

For citation. Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Yakovlev V.B. Prediction of the effective thermal conductivity of composites with graphene inclusions. *Thermal processes in engineering*, 2023, vol. 15, no. 7, pp. 299–308. (In Russ.). DOI: 10.34759/tpt-2023-15-7-299-308

Введение

Графен – перспективный материал, обладающий уникальными физико-механическими свойствами, в частности величина коэффициента теплопроводности однослойного графена может достигать $5000 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ [1–5]. Основной вклад в перенос тепла в графене в отличие от металлов, где преобладает электронная составляющая теплопроводности, вносит фононный механизм [6]. При появлении дополнительных слоев в образце графена наблюдается уменьшение коэффициента теплопроводности, что объясняется увеличением рассеяния фононов вследствие взаимодействия слоев между собой [7]. Тем не менее теплопроводность в плоскости слоя в многослойном графене остается достаточно высокой. Это может быть использовано при конструировании композиционных материалов для улучшения их теплопроводящих характеристик, которые при интенсивных внешних воздействиях различного физического характера имеют большое значение наряду с механическими характеристиками материалов. В частности, в трибокомпозитах в процессе трения происходит неравномерный нагрев поверхностных и объемных слоев, влияющий на диффузионные и сегрегационные процессы, следствием которых могут быть существенные изменения их физико-механических свойств [8]. Одним из способов уменьшения величины градиента температур-

ного поля в процессе эксплуатации является использование материалов с повышенными теплопроводящими характеристиками. Также в некоторых деталях и узлах механизмов может потребоваться направленный отвод тепла, поэтому в данных случаях может быть особенно полезен материал с анизотропными теплопроводящими характеристиками. Поэтому графен с его очень высокой теплопроводностью вдоль слоев и относительно низкой теплопроводностью поперек последних является перспективным материалом при использовании его в качестве малых добавок в композиты для значительного улучшения их теплопроводящих свойств без потери высоких механико-прочностных качеств.

Цель настоящей работы – прогнозирование теплопроводящих характеристик матричного композита с включениями графена в несколько слоев, при этом размеры включений в направлении плоских слоев должны быть намного больше их толщины. В качестве модели, описывающей форму включений графена, принимается сильно сжатый сфероид (эллипсоид вращения). Форма всех включений считается одинаковой, ориентации включений принимаются имеющими вероятностное распределение с осью симметрии бесконечного порядка. Учитывая анизотропию теплопроводящих свойств графена и неизометричность формы включений, можно ожидать, что при распределении

ориентаций последних, отличным от равномерного, композит в целом будет иметь анизотропную теплопроводность, описываемую тензором 2-го ранга. Далее в работе вычисляются главные компоненты тензора эффективной теплопроводности матричного композита с полимерной матрицей и графеновыми включениями в зависимости от их объемной доли при различных аспектных отношениях сфероидов, моделирующих форму включений, и при различных разбросах в ориентациях последних. Вычисления производятся с помощью обобщенного сингулярного приближения, основы которого были заложены в работах А.Г. Фокина [9] и Т.Д. Шермергора [10] для вычисления эффективных диэлектрических и упругих характеристик неоднородных сред и развитого затем в работах [11, 12]. Применение данного приближения для решения задачи вычисления теплопроводящих свойств неоднородного материала оправдано математической эквивалентностью краевых задач нахождения скалярного электрического потенциала и потенциала температурного поля в стационарном случае. Для учета вероятностного распределения ориентаций включений используется аппарат теории представлений группы $SO(3)$ [13]. Среди работ, посвященных прогнозированию теплопроводящих свойств неоднородных сред с вероятностным распределением ориентаций включений, можно выделить, например, [14, 15].

1. Постановка задачи и ее решение в обобщенном сингулярном приближении

Рассмотрим образец объемом V статистически однородного матричного композита с однотипными эллипсоидальными включениями. Считается, что матрица – изотропная с теплопроводностью $k^{(m)}$, включения – анизотропные с тензором теплопроводности $\mathbf{k}^{(p)}$. Будем предполагать, что форма всех включений одинаковая, а главные оси тензоров теплопроводности совпадают с осями соответствующих эллипсоидов. Также будем считать, что все включения случайным образом распределены по объему образца, а их ориентации распределены по некоторому вероятностному закону. Предполагается также отсутствие внутренних источников тепла в материале.

Пусть к границе S данного образца приложено постоянное во времени однородное тем-

пературное поле напряженностью \mathbf{H}_0 . Тогда в образце установятся некоторое постоянное температурное поле $T(\mathbf{r})$ с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla T(\mathbf{r})$ и постоянное распределение тепловых потоков, векторы плотности которых $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ связаны с $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ законом Фурье:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ – тензор теплопроводности данного неоднородного материала, являющийся случайной кусочно-постоянной функцией координат \mathbf{r} . Ставится задача вычислить тензор \mathbf{k}^* эффективной теплопроводности данного образца композита, связывающего средние по объему образца значения векторов плотности теплового потока \mathbf{q} и напряженности температурного поля \mathbf{H} :

$$\langle \mathbf{q} \rangle = \mathbf{k}^* \langle \mathbf{H} \rangle.$$

Для нахождения \mathbf{k}^* рассмотрим краевую задачу для скалярного поля $T(\mathbf{r})$ в данном образце:

$$\nabla \cdot \mathbf{k}(\mathbf{r})\nabla T(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V; \quad T|_S = -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}). \quad (1)$$

Заметим, что в настоящей работе температурное поле обозначается $T(\mathbf{r})$, как в классических монографиях по теории теплопроводности, например, в [16]. В то же время для удобства вводится также специальное обозначение $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ для напряженности температурного поля как, например, в [17]. Поскольку дифференциальное уравнение в (1) имеет разрывные коэффициенты, для решения краевой задачи применяется специальная процедура, предусматривающая рассмотрение аналогичной вспомогательной задачи для однородного тела сравнения [9–11]. Представим $T(\mathbf{r})$ и $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ в виде

$$T(\mathbf{r}) = T^{(c)}(\mathbf{r}) + T'(\mathbf{r}), \quad \mathbf{k}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}^{(c)} + \mathbf{k}'(\mathbf{r}),$$

индекс «с» обозначает величины, относящиеся к телу сравнения, имеющему такие же размеры и форму, что и образец композита; штрихом обозначены разности между величинами в исходном образце и теле сравнения. Задача для тела сравнения формулируется в виде:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{k}^{(c)}\nabla T^{(c)}(\mathbf{r}) &= 0, \quad \mathbf{r} \in V; \\ T^{(c)}|_S &= -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2)$$

Вычитая (2) из (1), получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{k}^{(c)}\nabla T'(\mathbf{r}) &= -\nabla \cdot \mathbf{k}'(\mathbf{r})\nabla T(\mathbf{r}), \\ \mathbf{r} \in V; \quad T'|_S &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

После введения функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ задачи (3) посредством условий

$$\nabla \cdot \mathbf{k}^{(c)} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1 \in S} = 0,$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ – дельта-функция, решение можно записать в виде интеграла [11]

$$T'(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \nabla \cdot \mathbf{k}'(\mathbf{r}_1) \nabla T(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (4)$$

Если тело считать неограниченным, то $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$. Преобразовав в этом случае (4) по частям, затем взяв градиент от левой и правой частей, получим:

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}) = \int (\nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})) \mathbf{k}'(\mathbf{r}_1) \mathbf{H}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (5)$$

где $\nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ – тензор вторых производных функции Грина, верхний индекс «1» у дифференциального оператора Гамильтона означает дифференцирование по \mathbf{r}_1 . Интеграл в (5) подразумевается в смысле главного значения с вырезанным бесконечно малым шаром вокруг точки \mathbf{r} [18]. Опуская промежуточные выкладки, в том числе аппроксимацию тензора вторых производных функции Грина его сингулярной составляющей [10, 11, 19], в итоге в обобщенном сингулярном приближении получим для \mathbf{k}^* следующее выражение [12]:

$$\mathbf{k}^* = \left\langle \mathbf{k}(\mathbf{r}) (\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r}))^{-1} \right\rangle \left\langle (\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r}))^{-1} \right\rangle^{-1}, \quad (6)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор 2-го ранга, \mathbf{g} – тензор, связанный с конкретным j -м включением, а его компоненты вычисляются по формуле

$$g_{il} = \oint_{S^{(j)}} \frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial x_i} n_l dS, \quad i, l = 1, 2, 3,$$

интегрирование производится по поверхности $S^{(j)}$ j -го включения, n_l – l -я компонента внешней единичной нормали к $S^{(j)}$. При этом матрицу также следует считать состоящей из отдельных включений. Форма включений, составляющих матрицу, остается как свободный параметр, влияющий на вид приближения. Усреднение в (6) проводится по всем включениям образца, в том числе по включениям, составляющим матрицу.

Тензор \mathbf{g} зависит от формы включения, а также от тензорного материального параметра среды сравнения $\mathbf{k}^{(c)}$. Если оси эллипсоида совпадают с главными осями тензора $\mathbf{k}^{(c)}$,

для компонент тензора \mathbf{g} справедливы выражения [12]:

$$g_{ii} = -\frac{\tilde{L}_i}{k_i^{(c)}}, \quad i = 1, 2, 3; \quad g_{il} = 0, \quad i \neq l, \quad (7)$$

где

$$\tilde{L}_i = \frac{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3}{2} \times \int_0^\infty \frac{dq}{(\tilde{a}_i^2 + q) \left((\tilde{a}_1^2 + q)(\tilde{a}_2^2 + q)(\tilde{a}_3^2 + q) \right)^{1/2}} \quad (8)$$

– главные компоненты тензора $\tilde{\mathbf{L}}$ обобщенных геометрических факторов эллипсоида в анизотропной среде [20];

$$\tilde{a}_i = a_i / \sqrt{k_i^{(c)}} \quad (9)$$

– обобщенные полуоси эллипсоида с учетом анизотропии среды; a_1, a_2, a_3 – полуоси эллипсоида; $k_i^{(c)}$ – главные компоненты тензора $\mathbf{k}^{(c)}$.

Придавая параметрам тензора среды сравнения $\mathbf{k}^{(c)}$ различные значения, будем из (6) получать различные типы приближений [11]. Взяв $\mathbf{k}^{(c)}$ равным теплопроводности матрицы $k^{(m)}\mathbf{I}$, получим приближение, аналогичное приближению Максвелла – Гарнетта [11, 21] для вычисления эффективной диэлектрической проницаемости. В этом случае выражение (6) может быть записано в виде:

$$\mathbf{k}^* = \left((1-f)k^{(m)}\mathbf{I} + f \langle \mathbf{k} \rangle \right) \times \left((1-f)\mathbf{I} + f \langle \lambda \rangle \right)^{-1}, \quad (10)$$

где f – полная объемная доля включений в композите; λ и \mathbf{k} – тензоры, связанные с конкретными включениями; для j -го включения они определяются выражениями:

$$\lambda^{(j)} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{g}^{(j)} (\mathbf{k}^{(j)} - k^{(m)}\mathbf{I}) \right)^{-1}, \quad (11)$$

$$\mathbf{k}^{(j)} = \mathbf{k}^{(j)} \lambda^{(j)},$$

$\mathbf{k}^{(j)}$ и $\mathbf{g}^{(j)}$ – тензор теплопроводности и тензор \mathbf{g} j -го включения. С учетом формул (7) – (9) и скалярности параметра среды сравнения первое из выражений (11) может быть записано в виде:

$$\lambda^{(j)} = \left(\mathbf{I} + (k^{(m)})^{-1} \mathbf{L}^{(j)} (\mathbf{k}^{(j)} - k^{(m)}\mathbf{I}) \right)^{-1},$$

где $\mathbf{L}^{(j)}$ – тензор геометрических факторов j -го включения в вакууме, его главные компоненты

$$L'_i = \frac{a_1 a_2 a_3}{2} \times \int_0^\infty \frac{dq}{(a_i^2 + q) \left((a_1^2 + q)(a_2^2 + q)(a_3^2 + q) \right)^{1/2}},$$

$i = 1, 2, 3.$

Имеет место соотношение [22]

$$L'_1 + L'_2 + L'_3 = 1.$$

В общем случае величины L'_1, L'_2, L'_3 выражаются через эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Данные выражения, а также табулированные значения для них в зависимости от отношений полуосей приведены в [23]. При этом следует иметь в виду, что величины, обозначенные в [23] как L, M, N , отличаются от L'_1, L'_2, L'_3 на множитель 4π , то есть $L = 4\pi L'_1$ и т.д. В частных случаях эллипсоидов вращения (сфероидов) L'_1, L'_2, L'_3 выражаются через элементарные функции, например для сплюснутого сфероида ($a_1 = a_2 > a_3$) [22]

$$L'_1 = L'_2 = \frac{g(e)}{2e^2} (\pi/2 - \text{arctg}(g(e))) - \frac{g^2(e)}{2},$$

$$L'_3 = 1 - 2L'_1,$$

где $e = \sqrt{1 - a_3^2/a_1^2}$, $g(e) = \sqrt{1/e^2 - 1}$. В предельном случае тонкого диска, когда $a_3/a_1 \rightarrow 0$, $e \rightarrow 1$, $g(1) = 0$,

$$L'_1 = L'_2 = 0, L'_3 = 1.$$

Усреднение в (10) проводится по всем включениям образца, погруженным в матрицу. Если все включения в образце композита имеют одинаковую форму и материальные характеристики, то усреднение в (10) – это усреднение по всевозможным ориентациям включений в пространстве.

2. Учет вероятностного распределения ориентаций включений

Для вычисления тензора \mathbf{k}^* эффективной теплопроводности образца данного композита по формуле (10) нужно вычислить средние по всем ориентациям включений значения тензоров 2-го ранга λ и \mathbf{k} в некоторой фиксированной системе координат, связанной с текстурой образца; назовем эту систему xyz . Введем системы координат $\xi^{(j)}\eta^{(j)}\zeta^{(j)}$, $j = \overline{1, N}$ (N – количество включений в образце композита), связанные с включениями, оси которых совпадают с осями соответствующих эллипсоидов

$V^{(j)}$ включений. Ориентации систем $\xi^{(j)}\eta^{(j)}\zeta^{(j)}$ относительно xyz (повороты от xyz к $\xi^{(j)}\eta^{(j)}\zeta^{(j)}$ в системе xyz) обозначим как $g^{(j)}(\psi^{(j)}, \theta^{(j)}, \varphi^{(j)})$, где $\psi^{(j)}, \theta^{(j)}, \varphi^{(j)}$ – углы Эйлера. Поскольку по условию главные оси тензора $\mathbf{k}^{(j)}$ совпадают с осями системы $\xi^{(j)}\eta^{(j)}\zeta^{(j)}$, то тензоры $\lambda^{(j)}, \mathbf{k}^{(j)}$ j -го включения в собственной системе координат $\xi^{(j)}\eta^{(j)}\zeta^{(j)}$ – диагональные, главные компоненты тензора $\lambda^{(j)}$ определяются выражениями

$$\lambda_i'^{(j)} = \lambda_i' = (1 + (k^{(m)})^{-1} L'_i (k_i' - k^{(m)}))^{-1},$$

где k_i' и L'_i ($i = 1, 2, 3$) – главные компоненты тензоров теплопроводности и геометрических факторов включений, одинаковые для всех включений. Для главных компонент тензора \mathbf{k} имеем:

$$\kappa_i'^{(j)} = \kappa_i' = k_i' \lambda_i'.$$

Таким образом, в системе координат своих собственных осей $\xi^{(j)}\eta^{(j)}\zeta^{(j)}$ тензоры $\lambda^{(j)}, \mathbf{k}^{(j)}$ имеют одинаковый вид для всех включений. Однако в системе xyz их компоненты будут зависеть от ориентации $g^{(j)}$ системы $\xi^{(j)}\eta^{(j)}\zeta^{(j)}$ в системе xyz . Поэтому, чтобы получить выражение для тензора \mathbf{k}^* в системе xyz , нужно получить выражения для компонент тензоров $\lambda^{(j)}, \mathbf{k}^{(j)}$ в системе xyz в зависимости от параметров, описывающих ориентацию системы $\xi^{(j)}\eta^{(j)}\zeta^{(j)}$ в системе xyz , а затем выполнить их усреднение по ориентациям включений.

В связи с огромным количеством включений в образце распределение их ориентаций можно считать непрерывным, его плотность обозначим $p(\psi, \theta, \varphi)$. Тогда объемная доля включений с ориентациями, принадлежащими элементу объема угловых параметров $d^3\omega = [\psi; \psi + d\psi] \times [\theta; \theta + d\theta] \times [\varphi; \varphi + d\varphi]$, равна (V_{inc} – суммарный объем всех включений в образце):

$$dV/V_{\text{inc}} = p(\psi, \theta, \varphi) d\psi d\theta d\varphi,$$

причем в составе плотности распределения ориентаций $p(\psi, \theta, \varphi)$ учтен множитель инвариантной меры $\sin \theta$ [13].

Пусть $\lambda_{il}(\psi, \theta, \varphi)$, $\kappa_{il}(\psi, \theta, \varphi)$, $i, l = 1, 2, 3$, – выражения для компонент тензоров λ, \mathbf{k} конкретного включения в системе координат xyz в зависимости от параметров ψ, θ, φ , описывающих ориентацию системы координат, связанной

с включением (индекс «*j*», показывающий номер включения, будем в дальнейшем опускать). Тогда средние по ориентациям в системе координат *хуz* значения компонент $\lambda_{il}(\psi, \theta, \varphi)$ будут вычисляться путем интегрирования по группе SO(3) по следующей формуле:

$$\langle \lambda_{il} \rangle = \iiint_{SO(3)} \lambda_{il}(\psi, \theta, \varphi) p(\psi, \theta, \varphi) d\psi d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \lambda_{il}(\psi, \theta, \varphi) p(\psi, \theta, \varphi);$$

$\langle \kappa_{il} \rangle$ вычисляются по аналогичной формуле.

Поскольку тензоры λ и κ симметричные, для вычисления $\lambda_{il}(\psi, \theta, \varphi)$, $\kappa_{il}(\psi, \theta, \varphi)$ можно применить метод, разработанный К.А. Валиевым и его учениками при исследовании вращательных стохастических процессов [24, 25], который использует теорию представлений группы SO(3). В данном методе применяется разложение симметричного тензора 2-го ранга на составляющие, преобразующиеся посредством неприводимых представлений группы SO(3) весов 0 и 2. Применяя указанную процедуру, подробно описанную, например, в [26], получим выражения для усредненных по ориентациям включений компонент $\langle \lambda_{il} \rangle$ в системе *хуz* [26]:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{il} \rangle &= \frac{D}{3} - (-1)^l \times \\ &\times \sum_{s=-2}^2 \tilde{\lambda}'_s \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi p(\psi, \theta, \varphi) \times \\ &\times \left(T_{-2,s}^2(\psi, \theta, \varphi) + T_{2,s}^2(\psi, \theta, \varphi) + (-1)^k \sqrt{\frac{2}{3}} T_{0,s}^2(\psi, \theta, \varphi) \right), \\ & \quad l=1,2, \\ \langle \lambda_{33} \rangle &= \frac{D}{3} + \sqrt{\frac{8}{3}} \times \\ &\times \sum_{s=-2}^2 \tilde{\lambda}'_s \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi p(\psi, \theta, \varphi) T_{0,s}^2(\psi, \theta, \varphi), \\ \langle \lambda_{12} \rangle &= \langle \lambda_{21} \rangle = \\ &= i \sum_{s=-2}^2 \tilde{\lambda}'_s \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi p(\psi, \theta, \varphi) \times \\ &\times \left(T_{2,s}^2(\psi, \theta, \varphi) - T_{-2,s}^2(\psi, \theta, \varphi) \right), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{l3} \rangle &= \langle \lambda_{3l} \rangle = \\ &= (-i)^{l-1} \sum_{s=-2}^2 \tilde{\lambda}'_s \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi p(\psi, \theta, \varphi) \times \\ &\times \left(T_{-1,s}^2(\psi, \theta, \varphi) + (-1)^l T_{1,s}^2(\psi, \theta, \varphi) \right), \quad l=1,2, \end{aligned}$$

где $\tilde{\lambda}'_s, s = -2, \dots, 2$, вычисляются по формулам

$$\tilde{\lambda}'_{\pm 2} = (\lambda'_1 - \lambda'_2)/2, \quad \tilde{\lambda}'_{\pm 1} = 0, \tag{13}$$

$$\tilde{\lambda}'_0 = (2\lambda'_3 - \lambda'_1 - \lambda'_2)/\sqrt{6};$$

$$D = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3. \tag{14}$$

В формулах (12) $T_{ms}^2(\psi, \theta, \varphi)$ ($m, s = -2, \dots, 2$) – обобщенные сферические функции веса 2 [13]. Усредненные по ориентациям включений компоненты $\langle \kappa_{il} \rangle$ вычисляются по формулам, аналогичным (12) – (14).

Пусть распределение ориентаций включений обладает вращательной симметрией бесконечно-го порядка относительно оси *z*, а также не зависит от угла φ , то есть его плотность имеет вид:

$$p(g(\psi, \theta, \varphi)) = \tilde{p}(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2. \tag{15}$$

Введем одномерную плотность $f(\theta)$ соотношением

$$\tilde{p}(\theta) = (8\pi^2)^{-1} f(\theta) \tag{16}$$

с условием нормировки

$$\int_0^{\pi/2} f(\theta) d\theta = 1.$$

В этом случае непосредственным вычислением по формулам (12) – (14) получаем:

$$\begin{cases} \langle \lambda_{11} \rangle = \langle \lambda_{22} \rangle = \\ = \frac{1}{4}(\lambda'_1 + \lambda'_2)(1 + I_1) + \frac{1}{2}\lambda'_3(1 - I_1), \\ \langle \lambda_{33} \rangle = \frac{1}{2}(\lambda'_1 + \lambda'_2)(1 - I_1) + \lambda'_3 I_1, \\ \langle \lambda_{il} \rangle = 0, \quad l \neq i, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta f(\theta) d\theta. \tag{18}$$

Аналогичные формулы получаются и для компонент тензора $\langle \kappa \rangle$. Поскольку тензоры $\langle \lambda \rangle, \langle \kappa \rangle$ имеют диагональный вид, \mathbf{k}^* также будет диагональным в системе *хуz*. Для его главных компонент имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} k_{11}^* &= k_{22}^* = \\ &= \frac{4(1-f)k^{(m)} + f((\kappa'_1 + \kappa'_2)(1+I_1) + 2\kappa'_3(1-I_1))}{4(1-f) + f((\lambda'_1 + \lambda'_2)(1+I_1) + 2\lambda'_3(1-I_1))}, \\ k_{33}^* &= \frac{2(1-f)k^{(m)} + f((\kappa'_1 + \kappa'_2)(1-I_1) + 2\kappa'_3 I_1)}{2(1-f) + f((\lambda'_1 + \lambda'_2)(1-I_1) + 2\lambda'_3 I_1)}. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

При равномерном распределении ориентаций включений плотность распределения ориентаций имеет вид

$$p(\psi, \theta, \varphi) = (8\pi^2)^{-1} \sin \theta. \quad (20)$$

Непосредственным вычислением по формулам (12) – (14) получаем:

$$\langle \lambda_{11} \rangle = \langle \lambda_{22} \rangle = \langle \lambda_{33} \rangle = D/3, \quad (21)$$

$$\langle \lambda_{il} \rangle = 0, \quad i \neq l,$$

$$\langle \kappa_{11} \rangle = \langle \kappa_{22} \rangle = \langle \kappa_{33} \rangle = K/3, \quad (22)$$

$$\langle \kappa_{il} \rangle = 0, \quad i \neq l,$$

где

$$K = \kappa'_1 + \kappa'_2 + \kappa'_3. \quad (23)$$

Подставив (21), (22) в (10), получим, что диэлектрическая проницаемость данного композита является скалярной:

$$k_{il}^* = k^* = \frac{(1-f)k^{(m)} + f \cdot K/3}{(1-f) + f \cdot D/3}, \quad (24)$$

$$l = 1, 2, 3, \quad k_{il}^* = 0, \quad i \neq l.$$

3. Численное моделирование теплопроводящих характеристик матричного композита с графеновыми включениями

На основе формул (17) – (24) было проведено численное моделирование с целью прогнозирования эффективных теплопроводящих характеристик матричного композита с многослойными графеновыми включениями. В качестве матрицы принималась эпоксидная система типа ЭД-20. Считалось, что графеновые включения имеют форму сильно сжатых сфероидов (эллипсоидов вращения) с одинаковым отношением полуосей a_1/a_3 (a_3 – полуось в направлении оси вращения сфероида, $a_1 = a_2$). Распределение ориентаций включений принималось осевым вида (15), (16) с одномерной плотностью $f(\theta)$ рэлеевского типа [14]

$$f(\theta) = \frac{1}{s^2} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\cos^2 \theta} \exp\left(-\frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2s^2}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2,$$

где параметр s^2 определяет величину разброса ориентаций осей сфероидальных включений и имеет смысл половины начального момента второго порядка случайной величины $\operatorname{tg} \theta$.

При увеличении числа слоев в графеновых частицах свойства последних приближаются к свойствам графита [7], поэтому главные компоненты k'_1 и k'_2 тензора теплопроводности графеновой частицы в направлениях параллельно слою принимались равными соответствующему коэффициенту теплопроводности графита высокого качества $k_a = 2000$ Вт/(м·К) [7, 27], главная компонента в направлении перпендикулярно слоям $k'_3 = 5,7$ Вт/(м·К) [27]. Коэффициент теплопроводности матрицы $k^{(m)} \approx 0,2$ Вт/(м·К) [27].

Проводились вычисления главных компонент тензора эффективной теплопроводности данного композита в зависимости от объемной доли графеновых включений при различных аспектных отношениях последних, а также при различных разбросах в ориентациях их осей. Некоторые результаты приведены на рис. 1, 2.

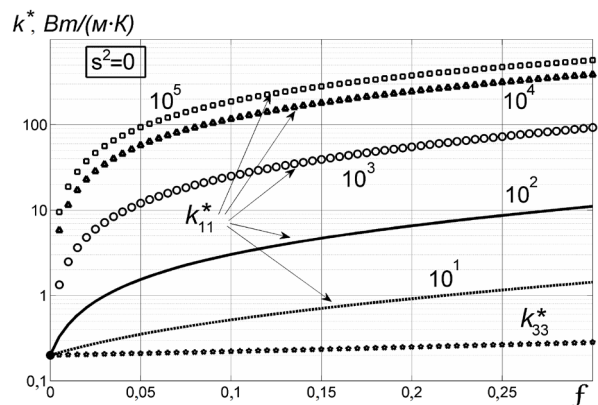


Рис. 1. Зависимости главных компонент тензора эффективной теплопроводности матричного композита от объемной доли f графеновых включений при их различных аспектных отношениях a_1/a_3 (указаны вблизи соответствующих графиков). Разброс в ориентациях осей включений отсутствует

Зависимости, представленные на рис. 1, показывают, что при отсутствии разброса в ориентациях осей включений композит является существенно анизотропным по теплопроводящим свойствам. С увеличением объемной доли включений обе главные компоненты k_{11}^* и k_{33}^* возрастают, однако k_{11}^* возрастает гораздо

быстрее. При этом величина данной компоненты также сильно зависит от аспектного отношения a_1/a_3 включений: с ростом аспектного отношения k_{11}^* также увеличивается. Компонента k_{33}^* при фиксированной объемной доле включений практически не зависит от аспектного отношения включений. В связи с этим при увеличении аспектного отношения включений коэффициент анизотропии k_{11}^*/k_{33}^* также возрастает. При больших величинах аспектного отношения присутствие в композите даже небольшой объемной доли одинаково ориентированных графеновых включений делает материал сильно анизотропным, например при объемной доле включений $f = 0,05$ и $a_1/a_3 = 10^3$ коэффициент анизотропии превышает 50, а при $a_1/a_3 = 10^4$ – более 250.

Следует заметить при этом, что в направлениях в плоскости $xу$, в которой ориентированы включения, композит является хорошо теплопроводящим, в то время как в направлении оси z – слабо проводит тепло, его теплопроводность на малую величину превышает теплопроводность матрицы.

При фиксированных аспектном отношении и объемной доле включений небольшой разброс в ориентациях их осей приводит к довольно значительному увеличению компоненты k_{33}^* , в то время как изменение (уменьшение) компоненты k_{11}^* очень слабо заметно (рис. 2). С увеличением разброса в ориентациях осей включений коэффициент анизотропии композита уменьшается, а при изотропном (равномерном) распреде-

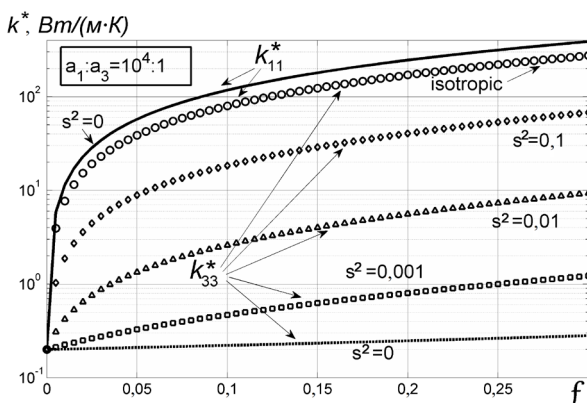


Рис. 2. Зависимости главных компонент тензора эффективной теплопроводности матричного композита от объемной доли f графеновых включений при различных разбросах в их ориентациях (значения параметра s^2 указаны вблизи соответствующих графиков), а также при изотропном распределении ориентаций (isotropic)

лении ориентаций включений материал, естественно, становится изотропным. В последнем случае композит имеет хорошую теплопроводность. В частности, при аспектном отношении включений $a_1/a_3 = 10^4$ и их объемной доле $f = 0,05$ эффективная теплопроводность образца $k^* \approx 40$ Вт/(м·К), что превышает теплопроводность матрицы приблизительно в 200 раз.

Таким образом, добавление графеновых включений в композиты может использоваться как для повышения теплопроводящих свойств материала, так и для создания образцов с сильно анизотропными теплопроводящими характеристиками. Пример изготовления анизотропных образцов с графеновыми включениями имеется в [28].

Заключение

Перечислим основные результаты работы.

1. В обобщенном сингулярном приближении с использованием теории представлений группы $SO(3)$ получены выражения (19) для главных компонент тензора эффективной теплопроводности матричного композита со сферическими включениями одного вида, ориентации которых имеют одноосное распределение с плотностью вида (15).

2. На основе полученных выражений проведены модельные расчеты главных компонент тензора эффективной теплопроводности матричного композита с многослойными графеновыми включениями в форме сильно сжатых сфероидов в зависимости от их объемной доли, при различных аспектных отношениях и разбросах в ориентациях. Результаты приведены на рис. 1, 2.

3. Показано, что добавлением небольшой объемной доли графеновых включений можно добиться значительного увеличения теплопроводности композита, а также сильной анизотропии теплопроводящих свойств материала.

Список источников

1. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A. Electric field effect in atomically thin carbon films // Science. 2004. Vol. 306. Iss. 5696. P. 666–669. DOI: 10.1126/science.1102896
2. Новоселов К.С. Графен: материалы Флатландии // Успехи физических наук. 2011. Т. 181. № 12. С. 1299–1311. DOI: 10.3367/UFN.0181.201112f.1299
3. Bunch J.S., Van der Zande A.M., Verbridge S.S., Frank I.W., Tanenbaum D.M., Parpia J.M., Craighead H.G., McEuen P.L. Electromechanical resonators from graphene sheets //

- Science. 2007. Vol. 315. Iss. 5811. P. 490–493. DOI: 10.1126/science.1136836
4. **Yan Zh., Nika D.L., Balandin A.A.** Thermal properties of graphene and few-layer graphene: applications in electronics // *IET Circuits, Devices & Systems*. 2015. Vol. 9. Iss. 1. P. 4–12. DOI: 10.1049/iet-cds.2014.0093
 5. **Ткачев С.В., Буслаева Е.Ю., Губин С.П.** Графен – новый углеродный наноматериал // *Неорганические материалы*. 2011. Т. 47. № 1. С. 5–14.
 6. **Баймова Ю.А., Мулюков Р.Р.** Графен, нанотрубки и другие углеродные наноструктуры. Москва: Российская академия наук, 2018. 212 с. DOI: 10.31857/S9785907036369000001
 7. **Елецкий А.В., Искандарова И.М., Книжник А.А., Красиков Д.Н.** Графен: методы получения и теплофизические свойства // *Успехи физических наук*. 2011. Т. 181. № 3. С. 233–268. DOI: 10.3367/UFNr.0181.201103a.0233
 8. **Колесников В.И.** Теплофизические процессы в металлополимерных трибоис системах. Москва: Наука, 2003. 279 с.
 9. **Фокин А.Г.** Диэлектрическая проницаемость смесей // *Журнал технической физики*. 1971. Т. 41. Вып. 6. С. 1073–1079.
 10. **Шермергор Т.Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. Москва: Наука, 1977. 399 с.
 11. **Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н.** Об объединении методов оценки эффективных диэлектрических характеристик гетерогенных сред на основе обобщенного сингулярного приближения // *Доклады Академии наук*. 2013. Т. 452. № 1. С. 27–31. DOI: 10.7868/S0869565213260083
 12. **Лавров И.В., Бардушкин В.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б., Кириллов Д.А.** О вычислении эффективной теплопроводности текстурированных трибокомпозигов // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2017. № 2. С. 48–56.
 13. **Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я.** Представления группы вращений и группы Лоренца. Москва: ГИФМЛ, 1958. 294 с.
 14. **Лавров И.В., Бардушкин В.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б., Кочетыгов А.А.** О вычислении эффективной теплопроводности текстурированных матричных композигов с высокой объемной долей включений // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2018. Т. 15. № 3. С. 92–101. DOI: 10.31429/vestnik-15-3-92-101
 15. **Zarubin V.S., Zimin V.N., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Novozhilova O.V.** Two-sided estimate of effective thermal conductivity coefficients of a textured composite with anisotropic ellipsoidal inclusions // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*. 2023. Vol. 74. Iss. 4 (139). DOI: 10.1007/s00033-023-02039-0
 16. **Карташов Э.М., Кудинов В.А.** Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. Москва: ЛЕНАНД, 2018. 1072 с.
 17. **Benveniste Y.** On the effective thermal conductivity of multiphase composites // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*. 1986. Vol. 37. P. 696–713. DOI: 10.1007/BF00947917
 18. **Виноградов А.П.** Электродинамика композитных материалов. Москва: Эдиториал УРСС, 2001. 208 с.
 19. **Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. Москва: ГИФМЛ, 1958. 440 с.
 20. **Лавров И.В.** Произвольно ориентированный диэлектрический эллипсоид в анизотропной среде: метод неортogonalного преобразования пространства // *Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения*. 2013. Т. 13. № 1. С. 44–47.
 21. **Maxwell Garnett J.C.** Colours in metal glasses and in metallic films // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*. 1904. Vol. 203. P. 385–420.
 22. **Борен К., Хафмен Д.** Поглощение и рассеяние света малыми частицами. Москва: Мир, 1986. 660 с.
 23. **Osborn J.A.** Demagnetizing factors of the general ellipsoid // *Physical Review*. 1945. Vol. 67. P. 351–357. DOI: 10.1103/PhysRev.67.351
 24. **Валиев К.А., Эскин Л.Д.** О вращательной диффузии молекул и рассеянии света в жидкостях // *Оптика и спектроскопия*. 1962. Т. XII. Вып. 6. С. 758–764.
 25. **Валиев К.А., Иванов Е.Н.** Вращательное броуновское движение // *Успехи физических наук*. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 31–64.
 26. **Лавров И.В.** Диэлектрическая проницаемость композиционных материалов с текстурой: эллипсоидальные анизотропные кристаллиты // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2009. № 1. С. 52–58.
 27. **Григорьев И.С., Мейлихов Е.З.** Физические величины: справочник. Москва: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
 28. **Ломовский О.И., Дудина Д.В., Суслев В.И., Корвин Е.Ю., Бухтояров В.Л., Дорожкин К.В.** Электромагнитный отклик композиционных систем «углеродные нанотрубки – полимерная матрица» и «графен – полимерная матрица», полученных твердофазными методами // *Известия вузов. Физика*. 2014. Т. 57. № 9/2. С. 86–91.

References

1. **Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A.** Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science*, 2004, vol. 306, iss. 5696, pp. 666–669. DOI: 10.1126/science.1102896
2. **Novoselov K.S.** Grafen: materialy Flatlandii [Graphene: Materials in the Flatland]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2011, vol. 181, no. 12, pp. 1299–1311. (In Russ.). DOI: 10.3367/UFNr.0181.201112f.1299
3. **Bunch J.S., Van der Zande A.M., Verbridge S.S., Frank I.W., Tanenbaum D.M., Parpia J.M., Craighead H.G., McEuen P.L.** Electromechanical resonators from graphene sheets. *Science*, 2007, vol. 315, iss. 5811, pp. 490–493. DOI: 10.1126/science.1136836
4. **Yan Zh., Nika D.L., Balandin A.A.** Thermal properties of graphene and few-layer graphene: applications in electronics. *IET Circuits, Devices & Systems*, 2015, vol. 9, iss. 1, pp. 4–12. DOI: 10.1049/iet-cds.2014.0093
5. **Tkachev S.V., Buslaeva E.Y., Gubin S.P.** Grafen – novyy ugleodnyy nanomaterial [Graphene: a novel carbon nanomaterial]. *Neorganicheskiye materialy*, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 5–14. (In Russ.)
6. **Baimova Yu.A., Mulyukov R.R.** Grafen, nanotrubki i drugie ugleodnye nanostrukturny [Graphene, nanotubes and other carbon nanostructures]. Moscow, Russian Academy of Sciences, 2018, 212 p. (In Russ.). DOI: 10.31857/S9785907036369000001
7. **Eletskii A.V., Iskandarova I.M., Knizhnik A.A., Krasikov D.N.** Grafen: metody polucheniya i teplofizicheskiye svoystva [Graphene: fabrication methods and thermophysical

- properties]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2011, vol. 181, no. 3, pp. 233–268. (In Russ.). DOI: 10.3367/UFNr.0181.201103a.0233
8. **Kolesnikov V.I.** Teplofizicheskie protsessy v metallopolimernykh tribosistemakh [Thermophysical processes in metal-polymeric tribosystems]. Moscow, Nauka, 2003, 279 p. (In Russ.)
 9. **Fokin A.G.** Dielektricheskaya pronitsaemost' smesei [Dielectric Permittivity of Mixtures]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 1971, vol. 41, no. 6, pp. 1073–1079. (In Russ.)
 10. **Shermergor T.D.** Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Micromechanics of inhomogeneous medium]. Moscow, Nauka, 1977, 399 p. (In Russ.)
 11. **Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Lavrov I.V., Sychev A.P., Yakovleva E.N.** Ob ob'yedinenii metodov otsenki effektivnykh dielektricheskikh kharakteristik geterogennykh sred na osnove obobshchennogo singular'nogo priblizheniya [Association of evaluation methods of the effective permittivity of heterogeneous media on the basis of a generalized singular approximation]. *Doklady Akademii nauk*, 2013, vol. 452, no. 1, pp. 27–31. (In Russ.). DOI: 10.7868/S0869565213260083
 12. **Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Sychev A.P., Yakovlev V.B., Kirillov D.A.** O vychislenii effektivnoi teploprovodnosti teksturirovannykh tribokompozitov [On calculation of the effective thermal conductivity of textured tribocomposites]. *Ehkologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva*, 2017, no. 2, pp. 48–56. (In Russ.)
 13. **Gel'fand I.M., Minlos R.A., Shapiro Z.Ya.** Predstavleniya gruppy vrashchenii i gruppy Lorentsa [Representations of the rotation group and the Lorentz group]. Moscow, Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1958, 294 p. (In Russ.)
 14. **Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Sychev A.P., Yakovlev V.B., Kochetygov A.A.** O vychislenii effektivnoi teploprovodnosti teksturirovannykh matrichnykh kompozitov s vysokoi ob'emnoi dolei vkluychenii [On calculation of the effective thermal conductivity of textured matrix composites with high volume fraction of inclusions]. *Ehkologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva*, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 92–101. (In Russ.). DOI: 10.31429/vestnik-15-3-92-101
 15. **Zarubin V.S., Zimin V.N., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Novozhilova O.V.** Two-sided estimate of effective thermal conductivity coefficients of a textured composite with anisotropic ellipsoidal inclusions. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 2023, vol. 74, iss. 4 (139). DOI: 10.1007/s00033-023-02039-0
 16. **Kartashov E.M., Kudinov V.A.** Analiticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozhenii [Analytical methods of the theory of thermal conductance and its applications]. Moscow, Lenand, 2018, 1072 p. (In Russ.)
 17. **Benveniste Y.** On the effective thermal conductivity of multiphase composites. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1986, vol. 37, pp. 696–713. DOI: 10.1007/BF00947917
 18. **Vinogradov A.P.** *Elektrodinamika kompozitnykh materialov* [Electrodynamics of composite materials]. Moscow, Editorial URSS, 2001, 208 p. (In Russ.)
 19. **Gel'fand I.M., Shilov G.E.** Obobshchennye funktsii i deistviya nad nimi [Generalized functions. Properties and Operations]. Moscow, Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1958, 440 p. (In Russ.)
 20. **Lavrov I.V.** Proizvol'no orientirovanny dielektricheskii ehllipsoid v anizotropnoi srede: metod neortogonal'nogo preobrazovaniya prostranstva [An arbitrarily oriented dielectric ellipsoid in an anisotropic medium: the non-orthogonal space transformation method]. *Fundamental'nye problemy radioehlektroonnogo priborostroeniya*, 2013, vol. 13, no. 1, pp. 44–47. (In Russ.)
 21. **Maxwell Garnett J.C.** Colours in metal glasses and in metallic films. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1904, vol. 203, pp. 385–420.
 22. **Bohren C.F., Huffman D.R.** Pogloshchenie i rasseyanie sveta malymi chastitsami [Absorption and Scattering of Light by Small Particles]. Moscow, Mir, 1986, 660 p. (In Russ.)
 23. **Osborn J.A.** Demagnetizing factors of the general ellipsoid. *Physical Review*, 1945, vol. 67, pp. 351–357. DOI: 10.1103/PhysRev.67.351
 24. **Valiev K.A., Eskin L.D.** O vrashchatel'noi diffuzii molekul i rasseyanii sveta v zhidkostyakh [On rotational diffusion of molecules and scattering of light in liquids]. *Optika i spektroskopiya*, 1962, vol. XII, iss. 6, pp. 758–764. (In Russ.)
 25. **Valiev K.A., Ivanov E.N.** Vrashchatel'noe brounovskoe dvizhenie [Rotational Brownian motion]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1973, vol. 109, iss. 1, pp. 31–64. (In Russ.)
 26. **Lavrov I.V.** Dielektricheskaya pronitsaemost' kompozitsionnykh materialov s teksturoi: ehllipsoidal'nye anizotropnye kristallity [Permittivity of composite material with texture: ellipsoidal anisotropic inclusions]. *Ehkologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva*, 2009, no. 1, pp. 52–58. (In Russ.)
 27. **Grigor'ev I.S., Meilikhov E.Z.** Fizicheskie velichiny: spravochnik [Physical Quantities: A Handbook]. Moscow, Energoatomizdat, 1991, 1232 p. (In Russ.)
 28. **Lomovsky O.I., Dudina D.V., Suslyayev V.I., Korovin E.Yu., Bukhtoyarov V.A., Dorozkin K.V.** Ehlektromagnitnyi otklik kompozitsionnykh sistem "uglerodnye nanotrubki – polimernaya matritsa" i "grafen – polimernaya matritsa", poluchennykh tverdogfaznymi metodami [Electromagnetic response of composite systems: "carbon nanotubes – polymer matrix" and "graphene – polymer matrix" received solid phase method]. *Izvestiya vuzov. Fizika*, 2014, vol. 57, no. 9/2, pp. 86–91. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 30.06.2023; одобрена после рецензирования 05.07.2023; принята к публикации 10.07.2023

The article was submitted on 30.06.2023; approved after reviewing on 05.07.2023; accepted for publication on 10.07.2023