

Математическая модель пространственного движения маневренного самолета, учитывающая нестационарные эффекты отрывного обтекания на больших углах атаки.

М. А. Захаров.

На основе уточненной модели аэродинамических коэффициентов продольного движения, учитывающей нестационарные эффекты отрывного обтекания при больших углах атаки, построена математическая модель пространственного движения маневренного самолета с приведением ее системы нелинейных дифференциальных уравнений к каноническому виду. Подготовлены исходные данные для введения в программу решения указанной системы на цифровой вычислительной машине. Исходные данные по аэродинамическим коэффициентам взяты из известных (охватывающих диапазоны $0...90^0$ для углов α и $-40^0...40^0$ для углов β) и приблизительно спрогнозированы для углов $-720^0...720^0$ по периодическому закону. Построенная модель проиллюстрирована решениями при различных положениях органов управления самолетом.

1 Постановка задачи.

В связи с прогрессом в области вычислительной техники появилась возможность быстрее и точнее находить решение системы нелинейных дифференциальных уравнений пространственного движения самолетов. При этом математический аппарат, полно описывающий это движение, пока еще недостаточно развит. Известны работы, посвященные рассмотрению математических моделей пространственного движения маневренных самолетов (например [1-3]). При этом по отдельности предлагаются математическая модель аэродинамических коэффициентов и модель движения (в виде системы дифференциальных уравнений). Однако построение общей (совместной) модели для практического использования вызывает затруднение из-за наличия в составе модели аэродинамических коэффициентов нестационарных составляющих (в частности составляющих, соответствующих структуре отрывного обтекания на крыле). При подстановке аэродинамических коэффициентов в общую систему уравнений последняя на цифровой вычислительной машине не может быть решена. В правой части получающейся системы есть члены, содержащие производные углов атаки и скольжения ($\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$). Другая сложность заключается в том, что в печати практически отсутствует информация об аэродинамических коэффициентах для диапазона изменения углов α и β $0 \div 360^\circ$. В данной работе делается попытка преодоления этих трудностей.

Ранее, на основе уточненной модели аэродинамических коэффициентов [4], учитывающей нестационарные эффекты отрывного обтекания при больших углах атаки, была построена [5] математическая модель продольного движения маневренного самолета. Логическим завершением

усилий по внедрению уточненной модели аэродинамических коэффициентов должно стать построение модели пространственного движения маневренного самолета, включающей указанную модель коэффициентов.

Необходимо также проиллюстрировать построенную модель решениями при изменении положения органов управления.

2 Допущения, исходные уравнения и построение математической модели.

Считаем, что жесткий маневренный самолет движется относительно плоской невращающейся Земли при отсутствии ветра. Оси тяги правого и левого двигателей параллельны оси X связанной системы координат. При этом пространственное движение такого самолета можно выразить следующей системой уравнений [1] динамики и кинематики:

$$\dot{\alpha} = \omega_z - \left[(a_x - \omega_y \cdot \sin(\beta)) \cdot \sin(\alpha) + (a_y + \omega_x \cdot \sin(\beta)) \cdot \cos(\alpha) \right] \cdot \cos^{-1}(\beta); \quad (1)$$

$$\dot{\beta} = a_z \cdot \cos(\beta) - (a_x \cdot \sin(\beta) - \omega_y) \cdot \cos(\alpha) + (a_y \cdot \sin(\beta) + \omega_x) \cdot \sin(\alpha); \quad (2)$$

$$\dot{V} = V \cdot (a_x \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - a_y \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + a_z \cdot \sin(\beta)); \quad (3)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{I_x - I_y}{I_z} \cdot \omega_x \cdot \omega_y + \frac{\rho(H) \cdot V^2 \cdot S \cdot b_A}{2I_z} \cdot m_z - \frac{K_{дв}}{I_z} \cdot \omega_y - \frac{(P_{пр} + P_{лев}) \cdot y_{дв}}{I_z}; \quad (4)$$

$$\dot{\omega}_y = \frac{I_z - I_x}{I_y} \cdot \omega_x \cdot \omega_y + \frac{\rho(H) \cdot V^2 \cdot S \cdot l}{2I_y} \cdot m_y + \frac{K_{дв}}{I_y} \cdot \omega_z + \frac{(P_{пр} - P_{лев}) \cdot z_{дв}}{I_y}; \quad (5)$$

$$\dot{\omega}_x = \frac{I_y - I_z}{I_x} \cdot \omega_z \cdot \omega_y + \frac{\rho(H) \cdot V^2 \cdot S \cdot l}{2I_x} \cdot m_x; \quad (6)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_y \cdot \sin(\gamma) + \omega_z \cdot \cos(\gamma); \quad (7)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x - \operatorname{tg}(\vartheta) \cdot (\omega_y \cdot \cos(\gamma) - \omega_z \cdot \sin(\gamma)); \quad (8)$$

$$\dot{H} = V \cdot (\cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\vartheta) - \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\gamma) - \sin(\beta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\gamma)); \quad (9)$$

где:

$$a_x = \frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2 \cdot m} \cdot (-C_x + c_p) - \frac{g}{V} \cdot \sin(\vartheta); \quad (10)$$

$$a_y = \frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2 \cdot m} \cdot C_y - \frac{g}{V} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\gamma); \quad (11)$$

$$a_z = \frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2 \cdot m} \cdot C_z + \frac{g}{V} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\gamma); \quad (12)$$

V – линейная скорость центра масс (ЦМ) самолета $[м \cdot с^{-1}]$; ω_x , ω_y , ω_z – его угловые скорости поворота относительно осей X , Y , Z , связанных с самолетом $[рад \cdot с^{-1}]$, S – площадь крыла $[м^2]$; l – размах крыла $[м]$; b_A – средняя аэродинамическая хорда крыла; I_x , I_y , I_z – осевые момен-

ты инерции, относительно осей OX, OY, OZ [$\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$]; α – угол атаки [рад]; β – угол скольжения [рад]; γ – угол крена [рад]; ϑ – угол тангажа [рад]; ψ – угол рыскания [рад]; $K_{\text{дв}}$ – кинетический момент роторов двигателей [$\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$]; $P_{\text{пр}}, P_{\text{лев}}$ – силы тяги правого и левого двигателей [Н]; g – ускорение силы тяжести [$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$]; P – общая сила тяги [Н]; $u_{\text{дв}}, z_{\text{дв}}$ – составляющие эксцентриситета двигателей [м]; H – высота полета [м]; c_p – коэффициент тяги [безразмерный]; q – скоростной напор [Па]; $\rho(H)$ – плотность воздуха на данной высоте [$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$], например [5]:

$$\rho(H) = 1,2257 \cdot \frac{20000 - H}{20000 + H}; \quad (13)$$

$$q = \frac{\rho(H) \cdot V^2}{2}; \quad c_p = \frac{P_{\text{пр}} + P_{\text{лев}}}{q \cdot S} = \frac{P}{q \cdot S}. \quad (14)$$

C_x, C_y, C_z – коэффициенты аэродинамических продольной, нормальной, поперечной силы (безразмерные); m_x, m_y, m_z – коэффициенты аэродинамических моментов крена, рыскания, тангажа (безразмерные). Допустимая форма представления коэффициентов [1]:

$$\begin{aligned} C_x &= C_{x_{\text{ст}}}(\alpha, \beta, \varphi) + C_x^{\bar{\omega}_x} \cdot \bar{\omega}_x + C_x^{\bar{\omega}_y} \cdot \bar{\omega}_y + C_x^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z + C_x^{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha} + C_x^{\bar{\beta}} \cdot \bar{\beta}; \\ C_y &= C_{y_{\text{ст}}}(\alpha, \beta, \varphi) + C_y^{\bar{\omega}_x} \cdot \bar{\omega}_x + C_y^{\bar{\omega}_y} \cdot \bar{\omega}_y + C_y^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z + C_y^{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha} + C_y^{\bar{\beta}} \cdot \bar{\beta}; \\ C_z &= C_{z_{\text{ст}}}(\alpha, \beta, \varphi) + C_z^{\bar{\omega}_x} \cdot \bar{\omega}_x + C_z^{\bar{\omega}_y} \cdot \bar{\omega}_y + C_z^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z + C_z^{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha} + C_z^{\bar{\beta}} \cdot \bar{\beta}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} m_x &= m_{x_{\text{ст}}}(\alpha, \beta, \delta_n, \delta_\vartheta) + m_x^{\bar{\omega}_x} \cdot \bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y} \cdot \bar{\omega}_y + m_x^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z + m_x^{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha} + m_x^{\bar{\beta}} \cdot \bar{\beta}; \\ m_y &= m_{y_{\text{ст}}}(\alpha, \beta, \delta_n, \delta_\vartheta) + m_y^{\bar{\omega}_x} \cdot \bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y} \cdot \bar{\omega}_y + m_y^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z + m_y^{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha} + m_y^{\bar{\beta}} \cdot \bar{\beta}; \\ m_z &= m_{z_{\text{ст}}}(\alpha, \beta, \varphi) + m_z^{\bar{\omega}_x} \cdot \bar{\omega}_x + m_z^{\bar{\omega}_y} \cdot \bar{\omega}_y + m_z^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z + m_z^{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha} + m_z^{\bar{\beta}} \cdot \bar{\beta}, \end{aligned}$$

где: $\varphi, \delta_n, \delta_\vartheta$ – углы отклонения поворотного стабилизатора (руля высоты), руля направления, элеронов, соответственно; $C_{x_{\text{ст}}}, C_{y_{\text{ст}}}, C_{z_{\text{ст}}}, m_{x_{\text{ст}}}, m_{y_{\text{ст}}}, m_{z_{\text{ст}}}$ – статические составляющие коэффициентов;

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$ – безразмерные производные и угловые скорости [1]:

$$\bar{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} \cdot b_A}{V}; \quad \bar{\omega}_z = \frac{\omega_z \cdot b_A}{V}; \quad \bar{\beta} = \frac{\dot{\beta} \cdot l}{2V}; \quad \bar{\omega}_x = \frac{\omega_x \cdot l}{2V}; \quad \bar{\omega}_y = \frac{\omega_y \cdot l}{2V}. \quad (16)$$

$C_x^{\bar{\omega}_x}, C_x^{\bar{\omega}_y}, C_x^{\bar{\omega}_z}, C_y^{\bar{\omega}_x}, C_y^{\bar{\omega}_y}, C_y^{\bar{\omega}_z}, C_z^{\bar{\omega}_x}, C_z^{\bar{\omega}_y}, C_z^{\bar{\omega}_z}, m_x^{\bar{\omega}_x}, m_x^{\bar{\omega}_y}, m_x^{\bar{\omega}_z}, m_y^{\bar{\omega}_x}, m_y^{\bar{\omega}_y}, m_y^{\bar{\omega}_z}, m_z^{\bar{\omega}_x}, m_z^{\bar{\omega}_y}, m_z^{\bar{\omega}_z}$ – безразмерные вращательные аэродинамические производные. $C_x^{\bar{\alpha}}, C_y^{\bar{\alpha}}, C_z^{\bar{\alpha}}, C_x^{\bar{\beta}}, C_y^{\bar{\beta}}, C_z^{\bar{\beta}}$ – безразмерные нестационарные аэродинамические производные.

$C_x^{\bar{\beta}}, m_x^{\bar{\alpha}}, m_y^{\bar{\alpha}}, m_z^{\bar{\alpha}}, m_x^{\bar{\beta}}, m_y^{\bar{\beta}}, m_z^{\bar{\beta}}$ – безразмерные нестационарные аэродинамические производные.

Приступаем к формированию уточненной математической модели пространственного движения. Считаем, что перекрестные нестационарные аэродинамические связи некоторых осей несущественные (в частности малы производные $C_{x\beta}^{\bar{\beta}}$, $C_{y\beta}^{\bar{\beta}}$, $C_{z\alpha}^{\bar{\alpha}}$). Поэтому на основании [2], с применением усовершенствованной модели [4, 5] аэродинамических коэффициентов (с включением уравнения релаксации [1] и нестационарных составляющих, соответствующих структуре обтекания крыла в нелинейной форме представления, являющейся более тонкой и универсальной) и с учетом (16) можно записать:

$$C_x = C_{x_{ст}}(\alpha, \varphi) + C_{x_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \dot{\alpha} + C_{x_z}^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z; \quad (17)$$

$$C_y = C_{y_{ст}}(\alpha, \varphi) + C_{y_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \dot{\alpha} + C_{y_z}^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z + C_{y_{c.o.H}}(\alpha, x); \quad (18)$$

$$C_z = C_{z_{ст}}(\alpha, \beta, \delta_H) + C_z^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \dot{\beta} + C_z^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y; \quad (19)$$

$$m_x = m_{x_{ст}}(\alpha, \beta, \delta_H, \delta_3) + m_x^{\bar{\omega}_x} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_x + m_x^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y + m_x^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z + m_x^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \dot{\alpha} + m_x^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \dot{\beta}; \quad (20)$$

$$m_y = m_{y_{ст}}(\alpha, \beta, \delta_H, \delta_3) + m_y^{\bar{\omega}_x} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_x + m_y^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y + m_y^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z + m_y^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \dot{\alpha} + m_y^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \dot{\beta}; \quad (21)$$

$$m_z = m_{z_{ст}}(\alpha, \beta, \varphi) + m_z^{\bar{\omega}_x} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_x + m_z^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y + m_z^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z + m_z^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \dot{\alpha} + m_z^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \dot{\beta} + m_{z_{c.o.H}}(\alpha, x). \quad (22)$$

Уравнение релаксации:

$$\dot{x} = \frac{1}{\tau_1} \cdot [x_0(\alpha - \dot{\alpha} \cdot \tau_2) - x], \quad (23)$$

где:

$$\begin{aligned} C_{x_{ст}}(\alpha, \varphi) &= C_{x_{ст}}(\alpha) + C_x^\varphi \cdot \varphi; \\ C_{y_{ст}}(\alpha, \varphi) &= C_{y_{ст}}(\alpha) + C_y^\varphi \cdot \varphi; \\ C_{z_{ст}}(\alpha, \beta, \delta_H) &= C_{z_{ст}}(\alpha, \beta) + C_z^{\delta_H} \cdot \delta_H; \end{aligned} \quad (24)$$

$$m_{x_{ст}}(\alpha, \beta, \delta_H, \delta_3) = m_{x_{ст}}(\alpha, \beta) + m_x^{\delta_H} \cdot \delta_H + m_x^{\delta_3} \cdot \delta_3;$$

$$m_{y_{ст}}(\alpha, \beta, \delta_H, \delta_3) = m_{y_{ст}}(\alpha, \beta) + m_y^{\delta_H} \cdot \delta_H + m_y^{\delta_3} \cdot \delta_3;$$

$$m_{z_{ст}}(\alpha, \beta, \varphi) = m_{z_{ст}}(\alpha, \beta) + m_z^\varphi \cdot \varphi.$$

$C_x^\varphi, C_y^\varphi, m_z^\varphi, C_{zH}^\delta, m_x^\delta, m_y^\delta, m_x^\delta, m_y^\delta$ – безразмерные стационарные производные, взятые соответственно по углам отклонений поворотного стабилизатора (руля высоты), руля направления, элеронов; X – внутренняя переменная состояния (безразмерная), $x \in [0,1]$, может рассматриваться как относительная координата по хорде крыла точки отрыва потока (или точки взрыва вихрей) с верхней поверхности крыла, зависящая от $\dot{\alpha}$; $x_0(\alpha)$ – функция, соответствующая положению точки отрыва потока (или точки взрыва вихрей) при данном угле α в стационарных условиях ($\dot{\alpha} = 0$), принимаем [4]:

$$x_0(\alpha) = x_{01}(\alpha) = 0.5 \{1 - \tanh[2K_x \cdot (\alpha - \alpha_x)]\}; \quad (25)$$

K_x – модуль углового коэффициента касательной к функции $x_0(\alpha)$ в точке её перегиба; α_x – угол точки перегиба функции $x_0(\alpha)$; τ_1 – постоянная времени [с], обусловленная инерционностью процессов развития отрывного обтекания или восстановления безотрывного обтекания (связанных с наличием $|\dot{x}| > 0$); τ_2 – постоянная времени [с], характеризующая эффекты затягивания развития отрывного обтекания (связанные с наличием $|\dot{\alpha}| > 0$).

$C_{y_{c.o.H}}(\alpha, x), m_{z_{c.o.H}}(\alpha, x)$ – нестационарные составляющие нормальной силы и момента тангажа,

соответствующие структуре обтекания, нелинейное представление:

$$\begin{aligned} C_{y_{c.o.H}}(\alpha, x) &= \Delta C_{yH}(\alpha, x) = C_{yH}(\alpha, x) - C_{yH}(\alpha, x_0(\alpha)) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \left[(1 + \sqrt{x})^2 - (1 + \sqrt{x_0(\alpha)})^2 \right]; \\ m_{z_{c.o.H}}(\alpha, x) &= \Delta m_{zH}(\alpha, x) = m_{zH}(\alpha, x) - m_{zH}(\alpha, x_0(\alpha)) = \frac{5\pi}{32} \cdot \sin(\alpha) \cdot \\ &\cdot \left[(1 + \sqrt{x})^2 \cdot (1 - 1.2\sqrt{x} + x) - (1 + \sqrt{x_0(\alpha)})^2 \cdot (1 - 1.2\sqrt{x_0(\alpha)} + x_0(\alpha)) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

$C_{x_*}^{\ddot{\alpha}}, C_{y_*}^{\ddot{\alpha}}, m_{z_*}^{\ddot{\alpha}}$ – нестационарные аэродинамические производные (безразмерные), учитывающие нестационарные эффекты, не связанные с отрывным обтеканием и взрывом вихрей на крыле и фюзеляже (например, обусловленные запаздыванием скаса потока на горизонтальном оперении).

Считаем также, что ускорение силы тяжести Земли (g), определяется [5] по высоте полета (H_0) при начале маневра; R_3 – средний радиус Земли, $R_3 = 6356.767 \cdot 10^3$ [м]; g_c – ускорение силы тяжести на поверхности Земли;

$$g_c = 9.80665 \text{ [м} \cdot \text{с}^{-2}\text{]}, \quad g = g_c \cdot \left(\frac{R_3}{R_3 + H_0} \right)^2; \quad (27)$$

Для решения дифференциальных уравнений уточненной модели подставляем (14), (17), (18) в (10), (11) и далее в (1):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = \omega_z - \left\{ \left[-\frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2m} \cdot \left(C_{x_{\text{cr}}}(\alpha, \varphi) + C_{x_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \dot{\alpha} + C_{x'}^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z \right) + \frac{P}{V \cdot m} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{g}{V} \cdot \sin(\vartheta) - \omega_y \cdot \sin(\beta) \right] \cdot \sin(\alpha) + \left[\frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2m} \cdot \left(C_{y_{\text{cr}}}(\alpha, \varphi) + C_{y_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \dot{\alpha} + C_{y'}^{\bar{\omega}_z} \cdot \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z + C_{y_{\text{c.o.H}}}(\alpha, x) \right) - \frac{g}{V} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\gamma) + \omega_x \cdot \sin(\beta) \right] \cdot \cos(\alpha) \right\} \cdot \frac{1}{\cos(\beta)}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем $\dot{\alpha}$ и обозначим получающееся выражение в правой части (не содержащее производных из левой части системы (1)-(9), (23)) через “ N_1 ”:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = \frac{1}{\cos(\beta) - \frac{\rho(H) \cdot S \cdot b_A}{2m} \cdot \left(C_{x_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \sin(\alpha) - C_{y_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \cos(\alpha) \right)} \cdot \left\{ \omega_z \cdot \cos(\beta) - \left[\left(-\frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2m} \cdot \left(C_{x_{\text{cr}}} + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + C_{x'}^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z \right) + \frac{P}{V \cdot m} - \frac{g}{V} \cdot \sin(\vartheta) - \omega_y \cdot \sin(\beta) \right) \cdot \sin(\alpha) + \left(\frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2m} \cdot \left(C_{y_{\text{cr}}} + C_{y'}^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \cdot \omega_z + C_{y_{\text{c.o.H}}}(\alpha, x) \right) - \frac{g}{V} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\gamma) + \omega_x \cdot \sin(\beta) \right) \cdot \cos(\alpha) \right] \right\} = N_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Так что в дальнейшем вместо $\dot{\alpha}$ в правых частях дифференциальных уравнений и уравнений связи будем писать N_1 , например выражение коэффициентов C_x , C_y :

$$\begin{aligned} C_x = C_{x_{\text{cr}}}(\alpha, \varphi) + C_{x_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot N_1 + C_{x'}^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z; \\ C_y = C_{y_{\text{cr}}}(\alpha, \varphi) + C_{y_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot N_1 + C_{y'}^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z + C_{y_{\text{c.o.H}}}(\alpha, x). \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляем (19) в (12) и далее в (2), подставляем также (29) в (10), (11) и в (2), записывая a_{x1} , a_{y1} вместо a_x , a_y :

$$\begin{aligned} a_{x1} = -\frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2 \cdot m} \cdot \left(C_{x_{\text{cr}}}(\alpha, \varphi) + C_{x_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot N_1 + C_{x'}^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z \right) + \frac{P}{V \cdot m} - \frac{g}{V} \cdot \sin(\vartheta); \\ a_{y1} = \frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2 \cdot m} \cdot \left(C_{y_{\text{cr}}}(\alpha, \varphi) + C_{y_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot N_1 + C_{y'}^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z + C_{y_{\text{c.o.H}}}(\alpha, x) \right) - \frac{g}{V} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\gamma). \end{aligned} \quad (30)$$

После подстановки в (2):

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = \left[\frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2m} \left(C_{z_{\text{cr}}}(\alpha, \beta, \delta_H) + C_z^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \dot{\beta} + C_z^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y \right) + \frac{g}{V} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\gamma) \right] \cdot \cos(\beta) - \\ - (a_{x1} \cdot \sin(\beta) - \omega_y) \cdot \cos(\alpha) + (a_{y1} \cdot \sin(\beta) + \omega_x) \cdot \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Откуда найдем $\dot{\beta}$ и обозначим получающееся выражение в правой части (также не содержащее производных из левой части системы (1)-(9), (23)) через “ N_2 ”:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = \frac{1}{1 - \frac{\rho(H) \cdot S \cdot l}{4m} \cdot C_z^{\bar{\beta}} \cdot \cos(\beta)} \cdot \left\{ \left[\frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2m} \left(C_{z_{\text{cr}}}(\alpha, \beta, \delta_H) + C_z^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{g}{V} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\gamma) \right] \cdot \cos(\beta) - (a_{x1} \cdot \sin(\beta) - \omega_y) \cdot \cos(\alpha) + (a_{y1} \cdot \sin(\beta) + \omega_x) \cdot \sin(\alpha) \right\} = N_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Соответственно C_z из (19) с заменой $\dot{\beta}$ на N_2 :

$$C_z = C_{z_{\text{CT}}}(\alpha, \beta, \delta_H) + C_z^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot N_2 + C_z^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y. \quad (32)$$

Результат подстановки (32) в (12), в дальнейшем будем обозначать a_{z1} (вместо a_z):

$$a_{z1} = \frac{\rho(H) \cdot V \cdot S}{2m} \cdot \left(C_{z_{\text{CT}}}(\alpha, \beta, \delta_H) + C_z^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot N_2 + C_z^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y \right) + \frac{g}{V} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma). \quad (33)$$

Соответственно коэффициенты аэродинамических моментов (20)-(22) примут вид:

$$\begin{aligned} m_x &= m_{x_{\text{CT}}}(\alpha, \beta, \delta_H, \delta_3) + m_x^{\bar{\omega}_x} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_x + m_x^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y + m_x^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z + \\ &+ m_x^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot N_1 + m_x^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot N_2; \\ m_y &= m_{y_{\text{CT}}}(\alpha, \beta, \delta_H, \delta_3) + m_y^{\bar{\omega}_x} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_x + m_y^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y + m_y^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z + \\ &+ m_y^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot N_1 + m_y^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot N_2; \\ m_z &= m_{z_{\text{CT}}}(\alpha, \beta, \varphi) + m_z^{\bar{\omega}_x} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_x + m_z^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \omega_y + m_z^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z + \\ &+ m_{z_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot N_1 + m_z^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot N_2 + m_{z_{\text{c.o.H}}}(\alpha, x). \end{aligned} \quad (34)$$

Примечание. При наличии у самолета значительных перекрестных производных коэффициентов аэродинамических сил (например $C_x^{\bar{\beta}}$, $C_y^{\bar{\beta}}$, $C_z^{\bar{\alpha}}$) в составе (15), необходимо провести подстановку коэффициентов аэродинамических сил из (15) в (10)-(12) и далее в (1), (2). Тогда выражения (1) и (2) можно представить в виде:

$$\dot{\alpha} = A_1 \cdot \dot{\alpha} + A_2 \cdot \dot{\beta} + A_3; \quad \dot{\beta} = B_1 \cdot \dot{\beta} + B_2 \cdot \dot{\alpha} + B_3, \quad (35)$$

где: $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ – выражения, не содержащие производных из левой части системы (1) - (9),

(23).

В результате решения системы (35) находим выражения для N_1 и N_2 :

$$\dot{\alpha} = \frac{A_3 \cdot (1 - B_1) + A_2 \cdot B_3}{(1 - A_1) \cdot (1 - B_1) - A_2 \cdot B_2} = N_1; \quad \dot{\beta} = \frac{B_3 \cdot (1 - A_1) + A_3 \cdot B_2}{(1 - A_1) \cdot (1 - B_1) - A_2 \cdot B_2} = N_2.$$

Одновременно уточним моменты от действия сил тяги в (4), (5) в связи с неопределенностью понятия эксцентриситета двигателей в [1] (см. рис. 1, на котором показано расположение осей сил тяги ($P_{\text{пр}}$ и $P_{\text{лев}}$) правого и левого двигателей; силы направлены от нас). Моменты от этих сил относительно осей Z и Y :

$$\begin{aligned} M_{P_z} &= -P_{\text{пр}} \cdot y_{\text{пр}} - P_{\text{лев}} \cdot y_{\text{лев}}; \\ M_{P_y} &= P_{\text{пр}} \cdot z_{\text{пр}} + P_{\text{лев}} \cdot z_{\text{лев}}. \end{aligned} \quad (36)$$

где: $y_{\text{пр}}, z_{\text{пр}}, y_{\text{лев}}, z_{\text{лев}}$ – координаты осей тяги правого и левого двигателей.

Момент M_{P_y} можно выразить следующим образом:

$$M_{P_y} = \frac{P_{\text{пр}} + P_{\text{лев}}}{2} \cdot (z_{\text{пр}} + z_{\text{лев}}) + \frac{P_{\text{пр}} - P_{\text{лев}}}{2} \cdot (z_{\text{пр}} - z_{\text{лев}}).$$

При $z_{\text{лев}} = -z_{\text{пр}}$ эксцентриситет (ε_z) центра (точки С) симметрии двигателей относительно оси Y равен нулю ($\varepsilon_z = 0$) и

$$M_{P_y} = \frac{P_{\text{пр}} + P_{\text{лев}}}{2} \cdot (z_{\text{пр}} - z_{\text{пр}}) + \frac{P_{\text{пр}} - P_{\text{лев}}}{2} \cdot (z_{\text{пр}} + z_{\text{пр}}) = (P_{\text{пр}} - P_{\text{лев}}) \cdot z_{\text{пр}}.$$

Поскольку M_{P_y} создает составляющую ускорения $\dot{\omega}_y$, то из (5) следует, что при этом эксцентриситет двигателей ($z_{\text{лев}} = z_{\text{пр}}$) равен координате правого двигателя (т.е. большой величине). Обычно под эксцентриситетом понимается малая величина. Поэтому более корректно (и с возможностью моделирования при различных соотношениях $P_{\text{пр}}$ и $P_{\text{лев}}$) пользоваться выражениями моментов (36), вместо указанных в (4), (5).

Теперь окончательно можно записать уточненную математическую модель пространственного движения маневренного самолета, т.е. систему (37) нелинейных дифференциальных уравнений (которая с уравнениями связи (13), (14), (24) – (28), (30), (31), (33), (34) образует замкнутую систему и может быть решена на ПЭВМ численными методами):

$$\dot{\alpha} = N_1;$$

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} &= N_2 ; \\
\dot{V} &= V \cdot (a_{x1} \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - a_{y1} \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + a_{z1} \cdot \sin(\beta)) ; \\
\dot{\omega}_z &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \cdot \omega_x \cdot \omega_y + \frac{\rho(H) \cdot V^2 \cdot S \cdot b_A}{2 \cdot I_z} \cdot m_z - \frac{K_{дв}}{I_z} \cdot \omega_y - \frac{(P_{пр} \cdot y_{пр} + P_{лев} \cdot y_{лев})}{I_z} ; \\
\dot{\omega}_y &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \cdot \omega_x \cdot \omega_y + \frac{\rho(H) \cdot V^2 \cdot S \cdot l}{2 \cdot I_y} \cdot m_y + \frac{K_{дв}}{I_y} \cdot \omega_z + \frac{(P_{пр} \cdot z_{пр} + P_{лев} \cdot z_{лев})}{I_y} ; \\
\dot{\omega}_x &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \cdot \omega_z \cdot \omega_y + \frac{\rho(H) \cdot V^2 \cdot S \cdot l}{2 \cdot I_x} \cdot m_x ; \\
\dot{\vartheta} &= \omega_y \cdot \sin(\gamma) + \omega_z \cdot \cos(\gamma) ; \\
\dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg}(\vartheta) \cdot (\omega_y \cdot \cos(\gamma) - \omega_z \cdot \sin(\gamma)) ; \\
\dot{H} &= V \cdot (\cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\vartheta) - \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\gamma) - \sin(\beta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\gamma)) ; \\
\dot{x} &= \frac{1}{\tau_1} \cdot [x_0(\alpha - N_1 \cdot \tau_2) - x] .
\end{aligned} \tag{37}$$

3 Исходные данные в программе.

Поскольку в данной работе стоит задача представления уточненной математической модели и ознакомления с ней в иллюстративном виде, то исходные данные (как и для модели продольного движения) будут носить показательный ориентировочный характер.

В соответствии с этим коэффициенты $C_{x_{ст}}(\alpha, \varphi)$, $C_{y_{ст}}(\alpha, \varphi)$, $m_{z_{ст}}(\alpha, \varphi)$ подготавливаем по методу, изложенному в [5].

Однако, поскольку в табличных исходных данных аэродинамические характеристики указаны для диапазона углов α от 0 до 90° , то, исходя из соображения симметрии, достраиваем функции этих характеристик для диапазона α : от -180° до 180° и далее по периодическому закону с периодом 360° . При этом функцию $m_{z_{ст}}(\alpha, \varphi = 0)$ считаем образованной от нечетной функции $m_{z_{ст}}(\alpha + \alpha(0), \varphi(0))$, см. рис. 2. Аналогично определяем периодические функции от углов α , β при введении боковых аэродинамических характеристик по опубликованным данным расчетов и трубных испытаний для $\alpha = 0 \dots 90^\circ$, $\beta = -40^\circ \dots 40^\circ$ [1, 3, 6-8].

Вводим в программу решения системы (37) функций и уравнения связи (13), (14), (24) – (28), (30), (31), (33), (34), а также значения параметров, входящих в (37) и в указанные выше функции и уравнения связи. Находим решение указанной системы дифференциальных уравнений в программе “MathCAD”, считая, что система улучшения устойчивости и управляемости самолета отключена, и выбирая начальные значения неизвестных параметров решения системы (при $t=0$) исходя из условий сбалансированности ($\sum F = 0$, $\sum M = 0$) для горизонтального полета: $\alpha(0) = 6.28^\circ$, $\beta(0) = 0^\circ$,

$V(0) = 138 \text{ [м} \cdot \text{с}^{-1}\text{]}, \omega_z(0) = 0, \omega_y(0) = 0, \omega_x(0) = 0, \vartheta(0) = 6.28^\circ, \gamma(0) = 0, H(0) = 5000 \text{ [м]},$
 $X(0) = 0.96$ при $\varphi(0) = 0.69^\circ, \delta_H(0) = 0, \delta_\vartheta(0) = 0.$

($\sum F, \sum M$ – суммы внешних сил и моментов, действующих на самолет)

4 Анализ решений.

Получаем решения системы (37) дифференциальных уравнений в виде зависимостей от времени параметров полета маневренного самолета при последовательном изменении углового положения каждого управляющего органа $\varphi(t), \delta_H(t), \delta_\vartheta(t)$ и изображаем их на графиках рис. 3-9, где по оси абсцисс обозначено время t [с].

Помимо параметров, найденных в результате решения системы, на этих рисунках показаны расчетные параметры (угол рыскания (Ψ), составляющие перегрузки (n_x, n_y, n_z)) также уточняющие математическую модель пространственного движения и вычисляемые по формулам [2, 9]:

$$\Psi = \int_0^t \frac{\omega_y \cdot \cos(\gamma) - \omega_z \cdot \sin(\gamma)}{\cos(\vartheta)} \cdot dt;$$

$$n_x = \frac{\rho(H) \cdot V^2 \cdot S}{2 \cdot m \cdot g_0} \cdot (c_p - C_x); \quad n_y = \frac{\rho(H) \cdot V^2 \cdot S}{2 \cdot m \cdot g_0} \cdot C_y; \quad n_z = \frac{\rho(H) \cdot V^2 \cdot S}{2 \cdot m \cdot g_0} \cdot C_z. \quad (38)$$

На рис. 3 показаны найденные параметры полета при изменении угла $\varphi(t)$ в соответствии с законом [5] маневра “Кобра Пугачева”. Заметим, что подобный процесс был найден при моделировании продольного движения [5]. Совпадение рис.3 с результатами [5] говорит об идентичности исходных данных при изменении α от 0° до 90° .

На рис. 4...9 – приведены параметры полета при импульсном задании (в течение 1 секунды от момента времени $t=0$) изменения углового положения органов управления.

Так на рис. 4, 5 изображены процессы, соответствующие продольному движению, поскольку задавалось импульсное изменение угла установки стабилизатора $\varphi(t)$ (соответственно на рис.4 амплитуда импульса составляла $\varphi(0) - (\Delta\varphi = 5^\circ)$, на рис. 5 $\varphi(0) + (\Delta\varphi = 5^\circ)$). При этом процесс рис. 4 идентичен процессам, рассмотренным в [5], перехода параметров из неустойчивого состояния (при $t=0$, соответствующее точке “В”) в устойчивое состояние с углом атаки $\alpha \approx 40^\circ$, соответствующее точке “С” (см. рис 2).

В процессах [5] выход из неустойчивого состояния движения обеспечивается за счет небольшого изменения начальных условий. На рис. 4 выход из неустойчивого состояния происходит за счет кратковременного импульса изменения угла $\varphi(t)$.

Рис. 5 соответствует выходу из неустойчивого состояния и переходу в точку “D” (где

$$\frac{\partial m_{z_{ст}}}{\partial \alpha} = 0, m_{z_{ст}} = 0) \text{ с отрицательным углом } \alpha.$$

В этом устойчивом движении угол тангажа $\vartheta \approx -180^\circ$, а угол атаки $\alpha \approx -30^\circ$.

Рис. 6, 7 соответствуют импульсному воздействию руля направления: с амплитудами $\Delta\delta_n = +2^\circ$ (рис. 6), $\Delta\delta_n = -2^\circ$ (рис. 7).

На рис 8, 9 показаны решения при импульсном изменении угла отклонения элеронов: $\Delta\delta_\omega = +2^\circ$ (рис. 8), $\Delta\delta_\omega = -2^\circ$ (рис. 9). При этом на рис. 6 - 9 наблюдается переход к устойчивому состоянию, соответствующему точке “С” (с углом атаки $\alpha \approx 40^\circ$). Так что при боковом воздействии и при введенных в программу решения параметрах самолета невозможно получить устойчивое движение, соответствующее точке “D”.

5 Выводы.

Получена математическая модель пространственного движения маневренного самолета, учитывающая эффекты отрывного обтекания. Эта модель позволяет исследовать динамику маневренного самолета при введении в программу любых законов изменения органов управления от времени или от других параметров или воздействий (например, для имитации автомата улучшения устойчивости или автопилота). Для применения разработанной модели необходимо строгое обоснование введенных данных по параметрам самолета, изменяющимся в диапазоне α и β $0 \dots 360^\circ$. При этом желательно использование экспериментальных данных, полученных для указанного диапазона.

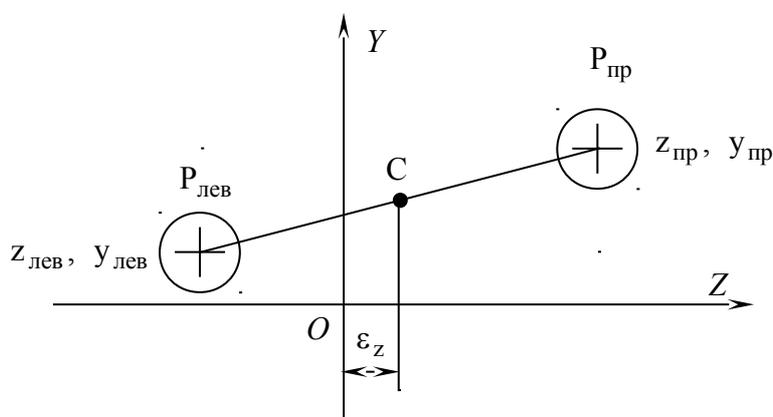
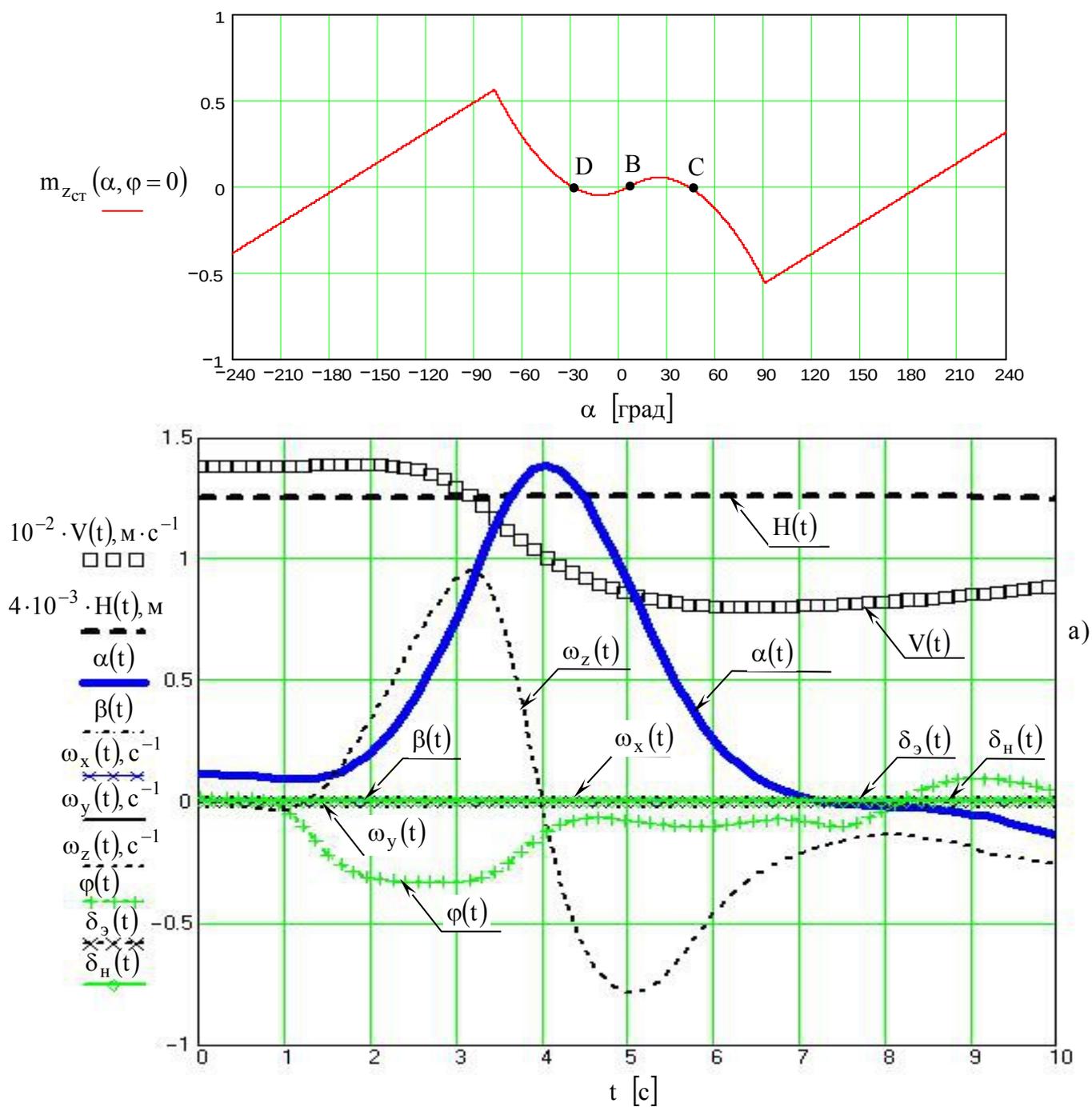
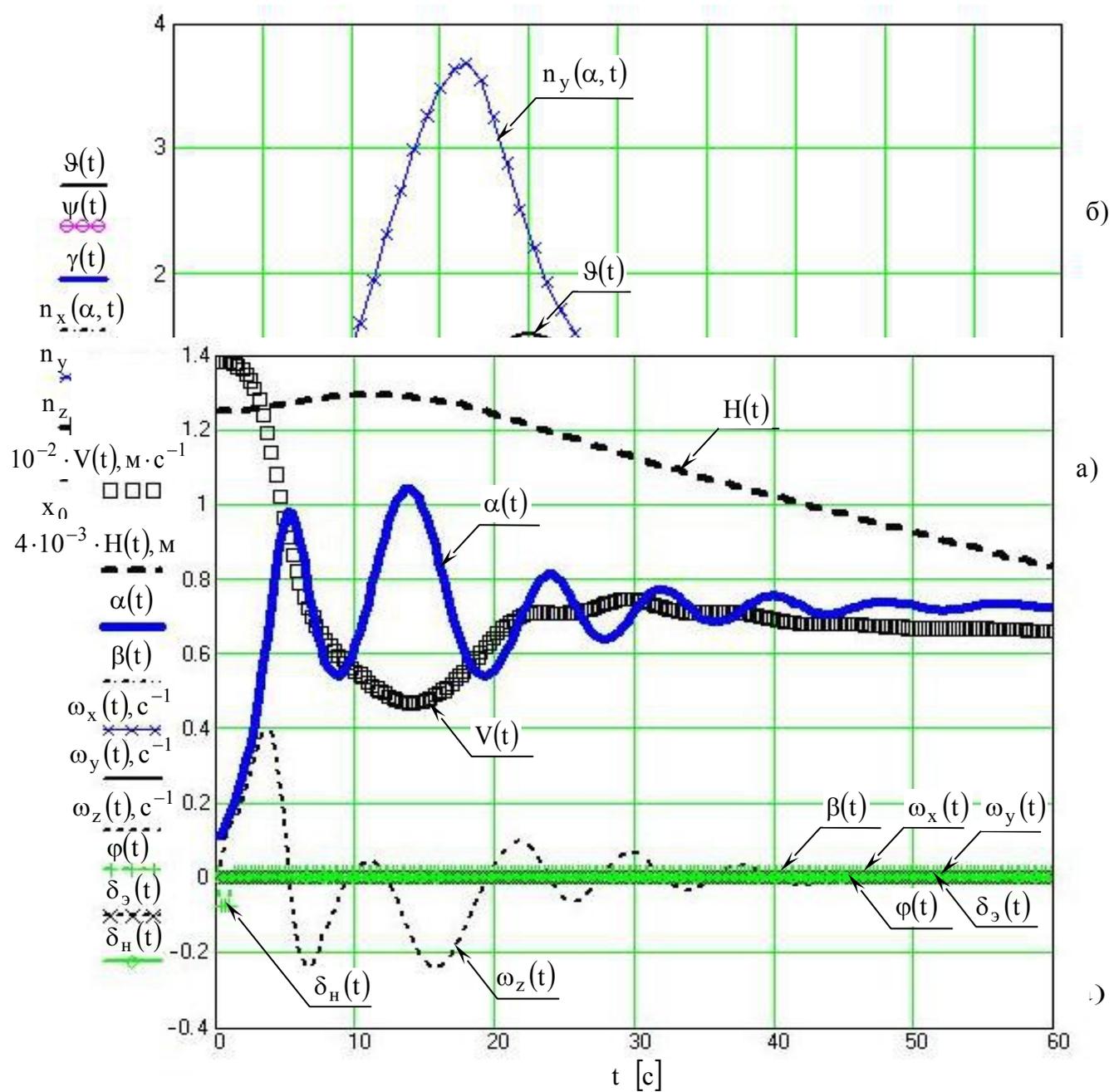
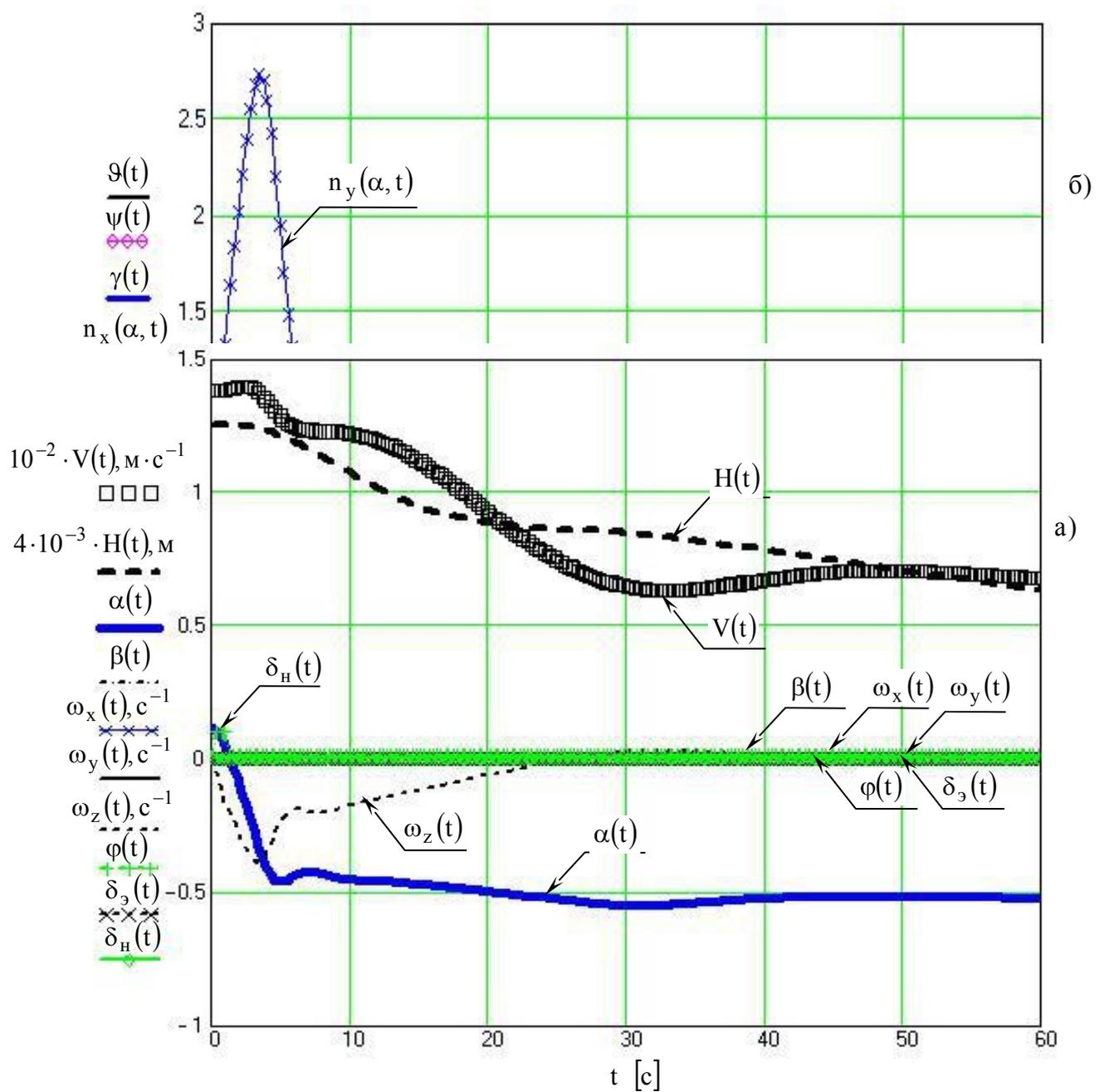
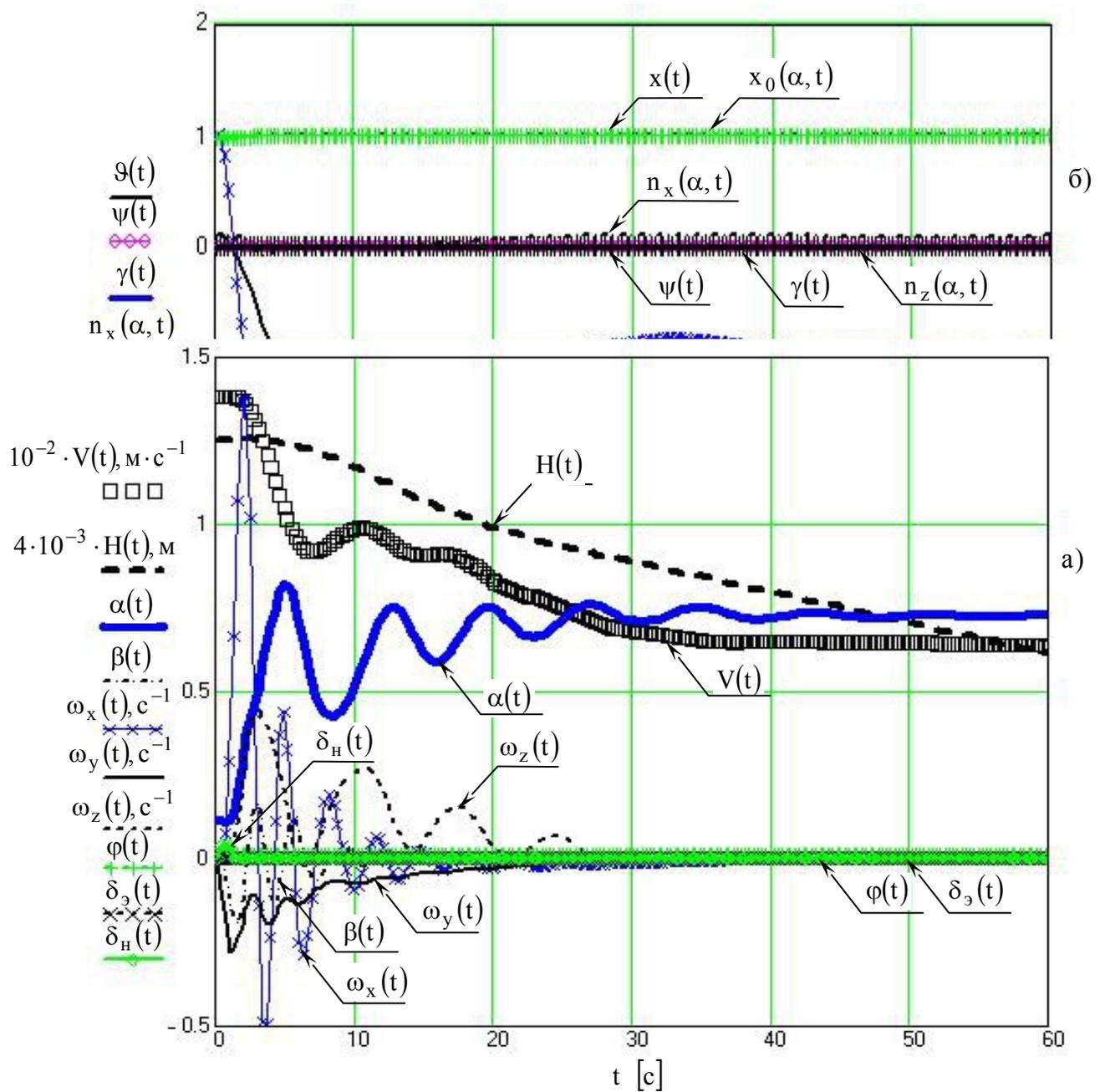


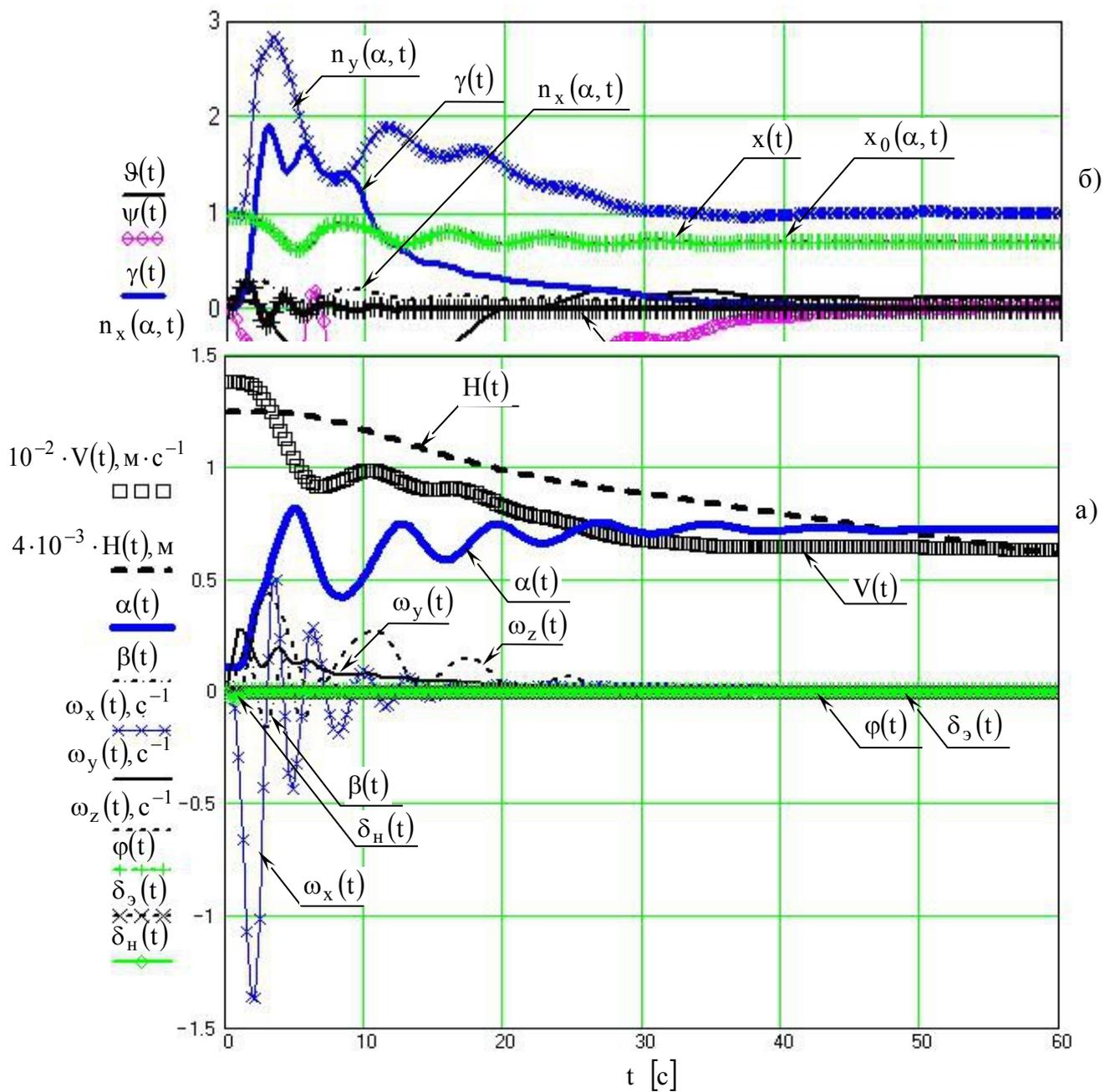
Рис. 1

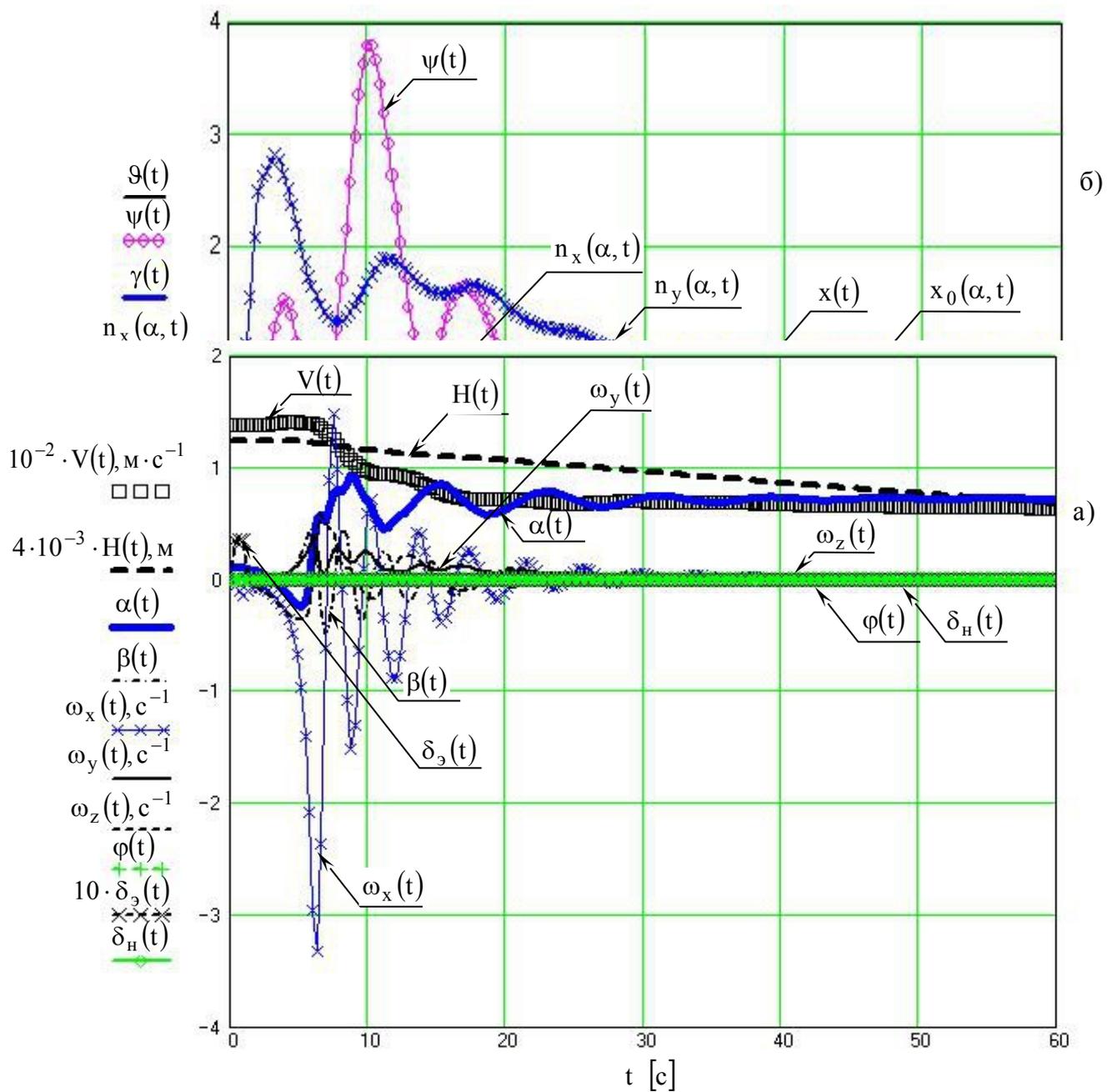


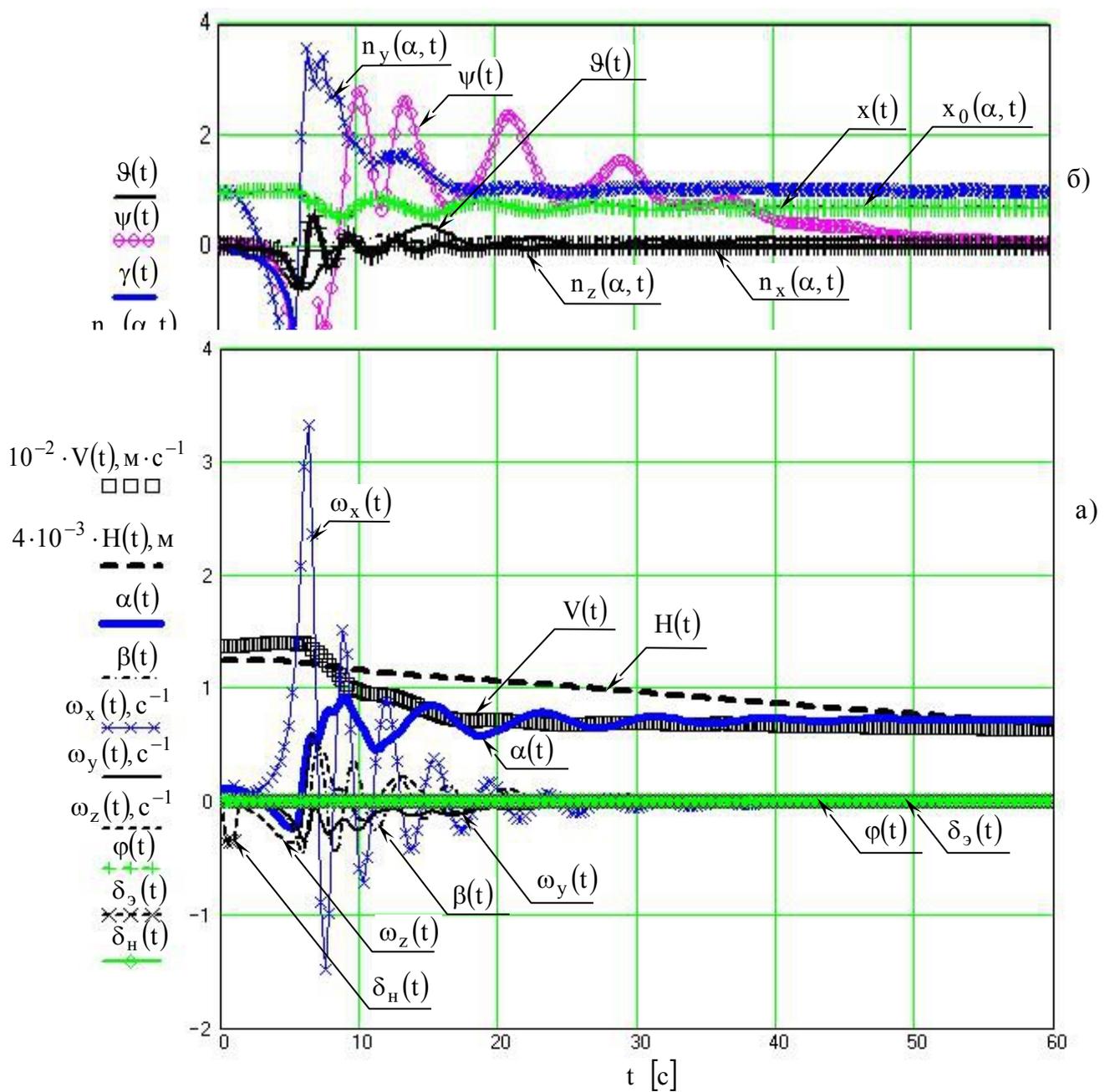












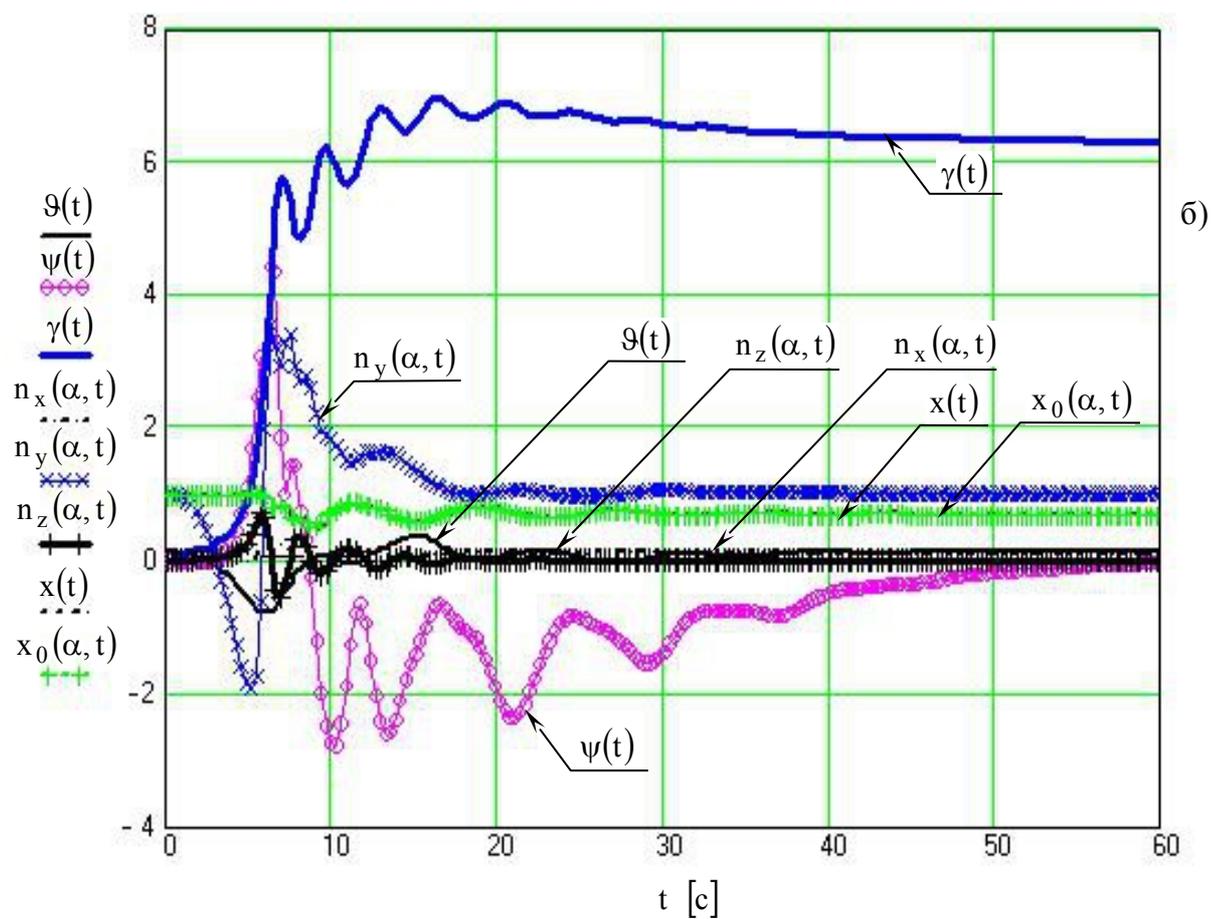


Рис. 9

Список литературы.

1. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. /Под редакцией Бюшгенс Г. С. – М.: Наука, 1998. – 816 с.

2. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Аэродинамика самолета: Динамика продольного и бокового движения. – М.: Машиностроение, 1979. –352 с.
3. Сурин В. П. Устойчивость и управляемость самолета в пространственном движении. – М.: МАИ, 1994. –68 с.
4. Захаров М. А. Математическая модель коэффициентов аэродинамических характеристик в продольном движении летательного аппарата на больших углах атаки с учетом эффектов отрывного обтекания. //Электронный журнал "Труды МАИ", вып. 9. – <http://www.mai.ru> (04.07.02).
5. М. А. Захаров, В. А. Леонов. Вычисление параметров продольного движения самолета на больших углах атаки с определением показателей устойчивости короткопериодического движения. //Электронный журнал "Труды МАИ", вып.13 – <http://www.mai.ru> (21.10.03).
6. Курьянов А. И., Столяров Г. И., Тотиашвили Л. Г., Тюнин Н. Н. Экспериментальное исследование вращательных и нестационарных производных самолета в аэродинамических трубах на дозвуковых скоростях. – Труды ЦАГИ, 1985, вып. 2290.
7. Жук А. Н., Иоселевич А. С., Столяров Г. И., Табачников В. Г. Экспериментальное исследование демпфирования крена и тангажа треугольного крыла $\lambda = 1.5$ на больших углах атаки. – Труды ЦАГИ, 1985, вып. 2290.
8. Столяров Г. И., Табачников В. Г., Тюнин Н. Н. Экспериментальные исследования распределения стационарных и нестационарных аэродинамических характеристик прямоугольных крыльев ($\lambda = 1$) на больших углах атаки. – Труды ЦАГИ, 1989, вып. 2420.
9. Кузьмин В.П., Ярошевский В. А. Оценка предельных отклонений фазовых координат динамической системы при случайных возмущениях. – М.: Наука, Физматлит. 1995. –304 с.

Захаров Михаил Александрович, аспирант кафедры динамики и управления летательных аппаратов Московского авиационного института (государственного технического университета).