

---

УДК 621.01

## **О прочностном расчёте волновых передач с телами качения с вращательным движением выходного звена**

**Крылов Н. В.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),*

*МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*e-mail: artsunday@mail.ru*

### **Аннотация**

Предложена методика нахождения сил и напряжений в зонах контакта тел качения с жёстким колесом, сепаратором и диском волнообразователя волновой передачи с телами качения. Проведён анализ зависимости напряжений в наиболее нагруженных зонах передачи от её геометрических параметров. Даны рекомендации по проектированию передачи на основе проведённого анализа.

### **Ключевые слова**

волновая передача с телами качения, силовой расчёт волновой передачи с телами качения, распределение напряжений в волновой передаче с телами качения, контактная прочность

### **Введение**

Одним из перспективных направлений развития приводной техники в авиации является разработка силовых электромеханических приводов вращательного действия, допускающих встраивание исполнительного механизма в опорное устройство объекта управления. В качестве редукторов для таких исполнительных механизмов целесообразно применять передачи с многопарным зацеплением вследствие их компактности по сравнению с передачами других типов. Наилучшими массогабаритными параметрами обладают волновые передачи[1]. В представленной работе рассматривается методика нахождения сил и напряжений в волновых передачах с телами качения (ВПТК), что необходимо при проектировании исполнительного механизма привода.

Наиболее нагруженными местами в ВПТК являются зоны контакта тел качения с жёстким колесом, сепаратором и диском волнообразователя, поэтому именно эти значения являются определяющими при расчёте передачи на прочность и ресурс. На сегодняшний день ещё не обнаружены методики, позволяющие рассчитать ВПТК на прочность по контактными напряжениям. Предлагаемая методика позволяет приблизительно оценить распределение усилий между телами качения при нагруженном выходном валу передачи и определить силы и напряжения в контактных зонах. Методика сводится к нахождению распределения сил между телами качения в одном ряду и определению реальных сил и напряжений в контактных зонах. В статье также представлен анализ зависимости напряжений в наиболее нагруженных зонах передачи, рассчитанных с помощью предложенной методики, от её геометрических параметров и даны рекомендации по проектированию передачи на основе проведённого анализа.

#### **Нахождение распределения сил между телами качения одного ряда**

Пусть ВПТК неподвижна и находится в зафиксированном положении. Геометрические параметры ВПТК (см. рис. 1):

$z_{ж}$  - число периодов жёсткого колеса;

$r_{u(p)}$  - радиус тел качения;

$r_{д}$  - радиус диска волнообразователя;

$e$  - эксцентриситет;

$\vartheta_k$  - угловые положения тел качения относительно оси симметрии;

$r_k$  - радиус кривизны профиля жёсткого колеса.

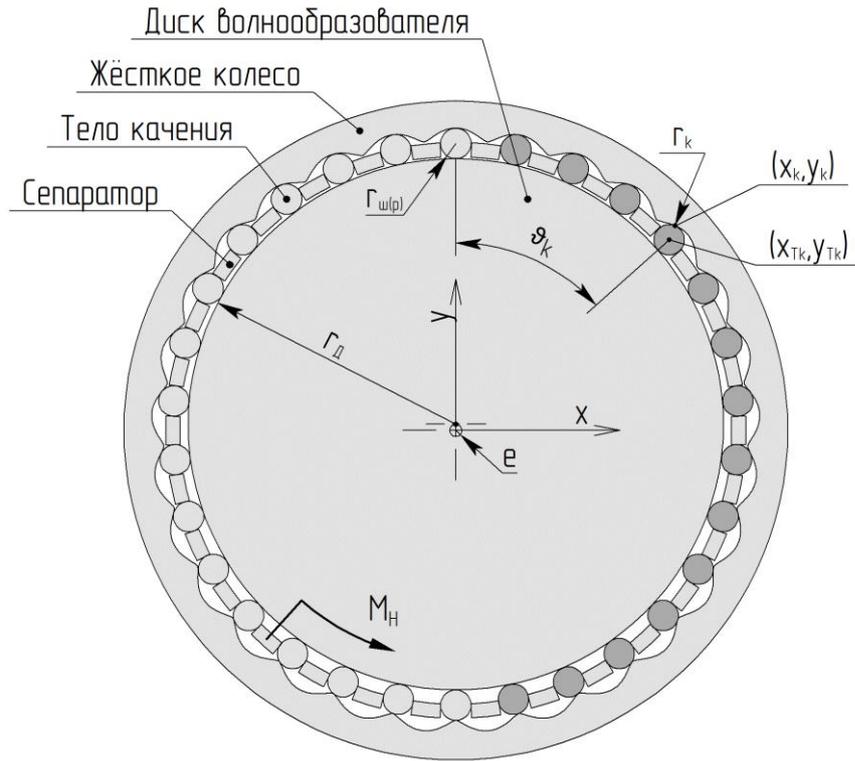


Рис. 1. Основные элементы ВПТК.

Углы положения тел качения относительно оси симметрии ВПТК и радиальными осями, проходящими через центр передачи и центры тел качения, выражаются зависимостью:

$$\vartheta_k = k \cdot \frac{2\pi}{z_{жс} - 1}, \quad (1)$$

$$\text{где } k = 1 \div (z_{жс} - 1). \quad (2)$$

При зафиксированном жёстком колесе и волнообразователе приложим момент нагрузки  $M_H$  к сепаратору. Рассматриваются только нагруженные тела качения. На рис. 1 они выделены тёмным цветом. При таком рассмотрении коэффициент  $k$  принимает значения:

для передач с нечётным числом периодов жёсткого колеса  $k = 1 \div \frac{z_{жс} - 1}{2}$ , для передач с

чётным числом периодов жёсткого колеса  $k = 1 \div \frac{z_{жс} - 2}{2}$ .

Координаты точек контакта тел качения с жёстким колесом можно получить из следующих выражений[2]:

$$x_k = l(\vartheta_k) \cdot \sin \vartheta_k + r_{ш(р)} \cdot \sin(\vartheta_k + \chi), \quad (3)$$

$$y_k = l(\vartheta_k) \cdot \cos \vartheta_k + r_{\text{ш}(p)} \cdot \cos(\vartheta_k + \chi), \quad (4)$$

где

$$l(\vartheta_k) = e \cdot \cos(z_{\text{ж}} \cdot \vartheta_k) + S(\vartheta_k), \quad (5)$$

$$\chi(\vartheta_k) = \arctg\left(\frac{e \cdot z_{\text{ж}} \cdot \sin(z_{\text{ж}} \cdot \vartheta_k)}{S(\vartheta_k)}\right), \quad (6)$$

$$S(\vartheta_k) = \sqrt{(r_{\text{ш}(p)} + r_{\text{д}})^2 - e^2 \cdot \sin^2(z_{\text{ж}} \cdot \vartheta_k)}. \quad (7)$$

Координаты центров тел качения:

$$x_{Tk} = l(\vartheta_k) \cdot \sin \vartheta_k, \quad (8)$$

$$y_{Tk} = l(\vartheta_k) \cdot \cos \vartheta_k. \quad (9)$$

Единичный вектор воздействия жёсткого колеса на тело качения (см. рис. 2):

$$\vec{v}_k(v_{xk}, v_{yk}) = \left( \frac{x_k - x_{Tk}}{r_{\text{ш}(p)}}, \frac{y_k - y_{Tk}}{r_{\text{ш}(p)}} \right) \quad (10)$$

Единичный вектор воздействия сепаратора на тело качения:

$$\vec{u}_k(u_{xk}, u_{yk}) = \left( \frac{-y_{Tk}}{\sqrt{x_{Tk}^2 + y_{Tk}^2}}, \frac{x_{Tk}}{\sqrt{x_{Tk}^2 + y_{Tk}^2}} \right) \quad (11)$$

Единичный вектор воздействия волнообразователя на тело качения:

$$\vec{w}_k(w_{xk}, w_{yk}) = \left( \frac{x_{Tk}}{\sqrt{x_{Tk}^2 + (y_{Tk} - e)^2}}, \frac{y_{Tk} - e}{\sqrt{x_{Tk}^2 + (y_{Tk} - e)^2}} \right) \quad (12)$$

Косинус угла между векторами  $\vec{v}_k$  и  $\vec{u}_k$ :

$$\cos(\vec{v}_k, \vec{u}_k) = \frac{v_{xk} \cdot u_{xk} + v_{yk} \cdot u_{yk}}{\sqrt{v_{xk}^2 + v_{yk}^2} \cdot \sqrt{u_{xk}^2 + u_{yk}^2}} \quad (13)$$

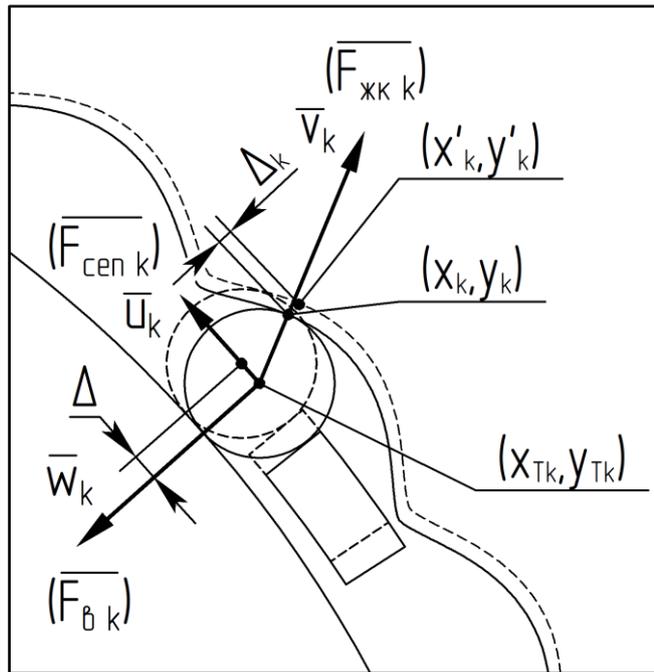


Рис. 2. Вектора реакций тела качения, действующих на жёсткое колесо, сепаратор и диск волнообразователя.

Введём следующие допущения, необходимые для проведения расчёта:

- 1) тела качения, сепаратор и диск волнообразователя считаются абсолютно жёсткими;
- 2) зазоры в конструкции отсутствуют;
- 3) сила трения пренебрежимо мала.

Повернём условно сепаратор на малый угол – такой, что центры тел качения переместятся на расстояние  $\Delta$ . Тогда точки контакта тел качения с жёстким колесом переместятся на расстояния:

$$\Delta_k = \Delta \cdot \operatorname{ctg}(\vec{v}_k, \vec{u}_k) = \Delta \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\vec{v}_k, \vec{u}_k)} - 1}} \quad (14)$$

Наличие расстояний  $\Delta_k$  обусловлено деформацией жёсткого колеса в точках контакта под действием сил со стороны тел качения.

Найдём координаты точек контакта деформированного жёсткого колеса:

$$x'_k = x_k - \Delta_k \cdot w_{xk}, \quad (15)$$

$$y'_k = y_k - \Delta_k \cdot w_{yk}. \quad (16)$$

Установим эквивалентные коэффициенты упругости жёсткого колеса для двух случаев:

- 1) жёсткое колесо полностью зафиксировано в местах его крепления к неподвижному основанию или к объекту управления, при этом на него действует сила со стороны одного тела качения в направлении, лежащем на прямой, соединяющей центр тела качения с точкой (для шариков) или линией (для роликов) контакта.
- 2) жёсткое колесо полностью зафиксировано в точке или линии контакта одного из тел качения, при этом на него действует сила со стороны соседнего тела качения, приложенная к точке или линии контакта в направлении, лежащем на прямой, соединяющей центры данных тел качения.

Коэффициенты упругости  $f_n$  для первого и  $f_c$  для второго случаев можно получить с помощью проведения соответствующих виртуальных экспериментов в среде трёхмерного моделирования с использованием конечно-элементного анализа. К указанным точкам или линиям жёсткого тела прикладываются тестовые усилия и после расчёта находятся модули перемещения этих точек или линий. Линия деформируется неравномерно, поэтому берётся модуль максимального удаления результирующей линии от исходной.

$$f_n = \frac{F_m}{s_n}, (17)$$

$$f_c = \frac{F_m}{s_c}, (18)$$

где  $F_m$  - величина тестовой силы,

$s_n$  - модуль перемещения в случае зафиксированных мест крепления жёсткого колеса,

$s_c$  - модуль перемещения в случае зафиксированного места контакта с телом качения.

Следует заметить, что для расчёта распределения сил, действующих на жёсткое колесо со стороны тел качения, важнее соотношение между двумя коэффициентами упругости, а не их численное значение.

Суммарная сила, возникающая в  $k$ -той точке жёсткого колеса, состоит из двух условных составляющих: силы, возникающей при деформировании жёсткого колеса относительно мест крепления -  $F_{nk}$ , и силы, возникающей при деформировании жёсткого

колеса относительно соседних тел качения -  $F_{ck}$ . Эти составляющие могут быть получены следующим образом:

$$F_{nk} = f_n \Delta_k, \quad (19)$$

$$F_{ck} = f_c |P_k \cdot \vec{p}_k + Q_k \cdot \vec{q}_k|, \quad (20)$$

где

$$P_k = \sqrt{(x'_{k+1} - x'_k)^2 + (y'_{k+1} - y'_k)^2} - \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}, \quad (21)$$

$$Q_k = \sqrt{(x'_k - x'_{k-1})^2 + (y'_k - y'_{k-1})^2} - \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}, \quad (22)$$

где  $P_k$  и  $Q_k$  - разницы расстояний между точками  $k-1$ ,  $k$  и  $k+1$  контакта до и после деформации. Учитывая, что расстояния принимают значения:

$$P_k = \begin{cases} P_k, P_k > 0, \\ 0, P_k \leq 0 \end{cases}, \quad (23)$$

$$Q_k = \begin{cases} Q_k, Q_k > 0, \\ 0, Q_k \leq 0 \end{cases}, \quad (24)$$

то можно записать единичные вектора, указывающие направления действующих в  $k$ -й точке сил со стороны соседних точек контакта (см. рис. 3).

$$\vec{p}_k \left( \frac{x'_{k+1} - x'_k}{\sqrt{(x'_{k+1} - x'_k)^2 + (y'_{k+1} - y'_k)^2}}, \frac{y'_{k+1} - y'_k}{\sqrt{(x'_{k+1} - x'_k)^2 + (y'_{k+1} - y'_k)^2}} \right), \quad (25)$$

$$\vec{q}_k \left( \frac{x'_{k-1} - x'_k}{\sqrt{(x'_{k-1} - x'_k)^2 + (y'_{k-1} - y'_k)^2}}, \frac{y'_{k-1} - y'_k}{\sqrt{(x'_{k-1} - x'_k)^2 + (y'_{k-1} - y'_k)^2}} \right). \quad (26)$$

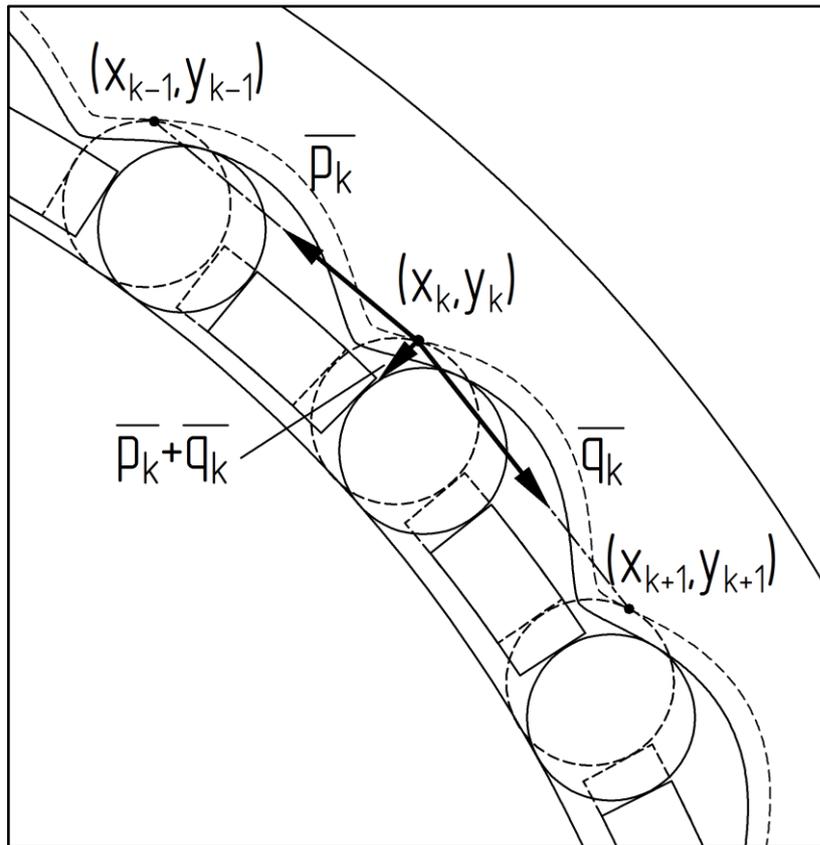


Рис. 3. Силы, действующие в точке контакта со стороны соседних тел качения

Результирующая эквивалентная сила взаимодействия в местах контакта жёсткого колеса с телом качения:

$$\overrightarrow{F_{\text{эkv.жск}k}} = -(F_{nk} + F_{ck}) \cdot \sin(\vec{v}_k, \vec{u}_k) \cdot \vec{v}_k. (27)$$

Найдём соответствующие усилия в местах контакта сепаратора с телами качения:

$$F_{\text{эkv.cenk}} = \left| \overrightarrow{F_{\text{эkv.жск}k}} \right| \cdot \cos(\vec{v}_k, \vec{u}_k). (28)$$

Доля усилия в каждом месте контакта от общего усилия на сепараторе:

$$F_{\%cenk} = \frac{F_{\text{эkv.cenk}}}{\sum_k F_{\text{эkv.cenk}}}. (29)$$

В результате по выражениям (27-29) можно получить процентное распределение общего усилия на сепараторе по телам качения при данном их фиксированном положении.

### Нахождение количественных значений сил и напряжений в зонах контакта

Силы в месте контакта тел качения с сепаратором можно выразить:

$$F_{cenk} = F_{\%cenk} \cdot \frac{M_H}{\sqrt{x_{Tk}^2 + y_{Tk}^2}} \quad (30)$$

При этом значения усилий в местах контакта тел качения с жёстким колесом.

$$F_{жкк} = \frac{F_{cenk}}{\cos(\vec{v}_k, \vec{u}_k)} \quad (31)$$

Максимальные напряжения в местах контакта тел качения с жёстким колесом определим поформулам Герца [3].

Для тел качения – роликов, и профиля в месте контакта - вогнутого:

$$\sigma_{жкк} = 0,798 \sqrt{\frac{F_{жкк}}{l} \cdot \frac{r_k - r_p}{2r_k r_p} \cdot \frac{1}{\theta_1 + \theta_2}} \quad (32)$$

Для тел качения – роликов, и профиля в месте контакта - выпуклого:

$$\sigma_{жкк} = 0,798 \sqrt{\frac{F_{жкк}}{l} \cdot \frac{r_k + r_p}{2r_k r_p} \cdot \frac{1}{\theta_1 + \theta_2}} \quad (33)$$

Для тел качения – шариков, и профиля в месте контакта - вогнутого:

$$\sigma_{жкк} = 0,9183 \sqrt{F_{жкк} \cdot \left(\frac{r_k - r_{ш}}{2r_k r_{ш}}\right)^2 \cdot \frac{1}{(\theta_1 + \theta_2)^2}} \quad (34)$$

Для тел качения – шариков, и профиля в месте контакта - выпуклого:

$$\sigma_{жкк} = 0,3643 \sqrt{F_{жкк} \cdot \left(\frac{2r_k + r_{ш}}{r_k r_{ш}}\right)^2 \cdot \frac{1}{(\theta_1 + \theta_2)^2}} \quad (35)$$

В выражениях (32-35) обозначены:

$r_k$  - радиус кривизны профиля жёсткого колеса в  $k$ -м месте контакта;

$E_1$  и  $E_2$  – модули Юнга жёсткого колеса (сепаратора, диска волнообразователя) и тела качения;

$l$  – длина ролика,

$$\theta_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \quad (36)$$

$$\theta_2 = \frac{1 - v_2^2}{E_2}, \quad (37)$$

$$r_k = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}, \quad (38)$$

где

$$a = \sqrt{(x_k(\vartheta_k) - x_k(\vartheta_k - \varepsilon))^2 + (y_k(\vartheta_k) - y_k(\vartheta_k - \varepsilon))^2}, \quad (39)$$

$$b = \sqrt{(x_k(\vartheta_k) - x_k(\vartheta_k + \varepsilon))^2 + (y_k(\vartheta_k) - y_k(\vartheta_k + \varepsilon))^2}, \quad (40)$$

$$c = \sqrt{(x_k(\vartheta_k - \varepsilon) - x_k(\vartheta_k + \varepsilon))^2 + (y_k(\vartheta_k - \varepsilon) - y_k(\vartheta_k + \varepsilon))^2}, \quad (41)$$

$v_1$  и  $v_2$  – коэффициенты Пуассона жёсткого колеса (сепаратора, диска волнообразователя) и тела качения;

$\varepsilon$  – малое приращение угла  $\vartheta_k$ .

Максимальные напряжения в местах контакта тел качения с сепаратором можно рассчитать по формулам:

для тел качения – роликов:

$$\sigma_{cenk} = 0,798 \sqrt{\frac{F_{cenk}}{l} \cdot \frac{1}{2r_p(\theta_1 + \theta_2)}}, \quad (42)$$

для тел качения – шариков:

$$\sigma_{cenk} = 0,739 \sqrt[3]{F_{cenk} \cdot \frac{1}{r_{ш}^2(\theta_1 + \theta_2)^2}}. \quad (43)$$

Максимальные напряжения в местах контакта тел качения с диском волнообразователя:

для тел качения – роликов:

$$\sigma_{ek} = 0,798 \sqrt{\frac{F_{ek}}{l} \cdot \frac{r_6 + r_p}{2r_6 r_p} \cdot \frac{1}{\theta_1 + \theta_2}}, \quad (44)$$

для тел качения – шариков:

$$\sigma_{\text{вк}} = 0,3643 \sqrt{F_{\text{вк}} \cdot \left( \frac{2r_{\text{в}} + r_{\text{ш}}}{r_{\text{в}} r_{\text{ш}}} \right)^2 \cdot \frac{1}{(\theta_1 + \theta_2)^2}} \quad (45)$$

Сила, возникающая в месте контакта тела качения с диском волнообразователя, определяется зависимостью:

$$F_{\text{вк}} = \sqrt{F_{\text{жкк}}^2 - F_{\text{сенк}}^2} \quad (46)$$

### Анализ напряжений в зонах контакта

Анализ напряжений, возникающих в зонах контакта тел качения с жёстким колесом, сепаратором и диском волнообразователя проведён, используя формулы, указанные выше.

Для примера рассчитаем напряжения в ролико-волновой передаче со следующими исходными параметрами:

Таблица 1

Параметр	Ед. изм.	Значение
$r_p$	мм	2,5
$r_{\text{в}}$	мм	33,5
$z_{\text{ж}}$	-	21
$e$	мм	1
$\Delta$	мм	0,001
$f_n$	МПа	113
$f_c$	МПа	3,3
$M_H$	Нм	300
$L$	мм	80

По указанным исходным данным получены следующие значения контактных напряжений (МПа):

Таблица 2

Номер ролика ( $k$ )	$\sigma_{\text{жкк}}$	$\sigma_{\text{сен}}$	$\sigma_{\text{в}}$
1	534,0	186,8	456,5
2	706,3	341,4	604,4
3	783,7	449,3	677,9
4	800,0	510,8	710,8

5	768,4	530,7	720,1
6	780,4	511,0	711,1
7	830,0	449,7	678,5
8	874,5	341,8	605,1
9	842,2	187,0	456,7

Очевидно, что наибольшие напряжения возникают в зонах контакта роликов с жёстким колесом, поэтому для оценки прочности будем рассматривать напряжения именно в этих зонах.

В соответствии с условием прочности, следует стремиться к равнонагруженности входящих в передачу силовых элементов. В случае контактной прочности жёсткого колеса ВПТК наилучшим вариантом является равное распределение напряжений в зонах контакта с нагруженными телами качения. Чтобы найти случаи, в которых распределение напряжений в указанных выше зонах приближается к равномерному, зафиксируем все входные параметры кроме радиуса диска волнообразователя, который будет переменным. Изменяя радиус диска волнообразователя в пределах 23...100 мм, и рассчитывая напряжения в зонах контакта роликов с жёстким колесом, получим графики (см. рис. 4). Каждый график соответствует напряжению в одной зоне контакта.

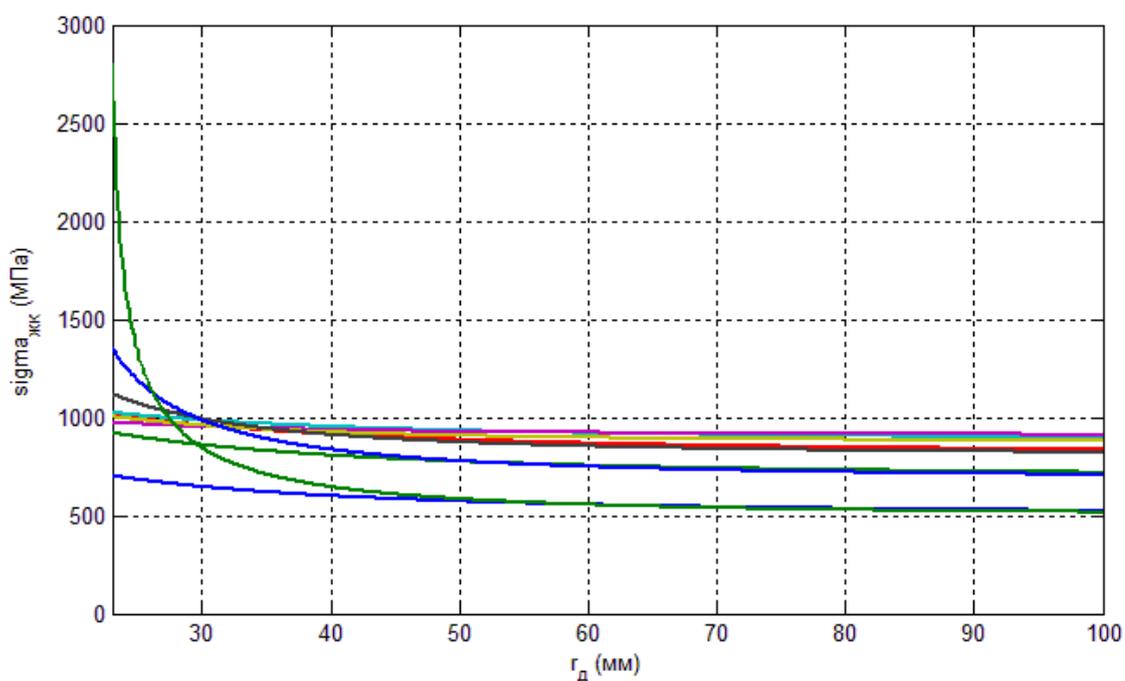


Рис. 4. Распределение напряжений в контактных зонах жёсткого колеса.

Для определения параметров ВПТК с равномерным распределением контактных напряжений введём параметр  $\frac{r_D}{r_p}$ , характеризующий основные геометрические соотношения в передаче. Выделим из графиков на рис. 4 наибольшие напряжения в зоне контакта с жёстким колесом, соответствующие верхней огибающей графиков, и проведём дифференцирование полученной кусочной функции по отношению  $\frac{r_D}{r_p}$ . В результате дифференцирования установлено, что наиболее равномерное распределение контактных напряжений в жёстком колесе имеет место при:

$$\frac{d(\max(\sigma_{жкк}))}{d\left(\frac{r_D}{r_p}\right)} > -3. (47)$$

Для проектирования ВПТК целесообразно определить зависимость значения  $\frac{r_D}{r_p}$  от числа впадин жёсткого колеса  $z_{жк}$ , при которой выполняется условие (47). Используя выражения (1-33, 36-41) построим график зависимости  $\frac{r_D}{r_p}$  от  $z_{жк}$ , приведённый на рис. 5.

Для облегчения расчёта полученная зависимость линеаризована так, что все точки ломаной будут лежать ниже построенной прямой.

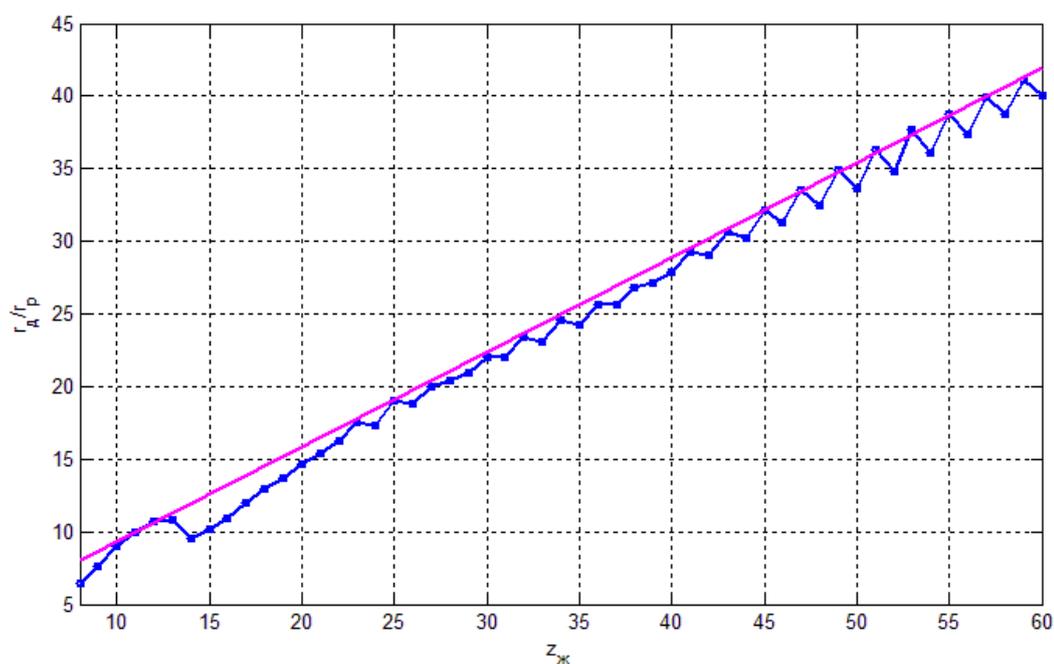


Рис. 5. Зависимость отношения радиуса диска волнообразователя к радиусу ролика для различных значений периодов жёсткого колеса и её линеаризованная характеристика.

Из полученного графика следует, что при проектировании ВПТК с равномерным распределением напряжений в зонах контакта роликов с жёстким колесом необходимо следующее соблюдение геометрических параметров:

$$\frac{r_D}{r_p} \geq 0,65z_{жс} + 2,8. \quad (48)$$

### Выводы

1. Разработаны фрагменты методики прочностного расчёта ВПТК, который позволяют рассчитать напряжения в зонах контакта тел качения с силовыми элементами передачи.
2. Проведён анализ результатов вычислений по составленной методике и выявлено соотношение параметров передачи, при котором напряжения в зонах контакта распределяются наиболее равномерно, что позволяет уменьшить массу и габариты редуктора, увеличить его ресурс.

### Библиографический список

1. Геращенко А.Н., Постников В.А., Самсонович С.Л. Пневматические, гидравлические и электрические приводы летательных аппаратов на основе волновых исполнительных механизмов: Учебник. – 2 е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010, 126 с.
2. Степанов В.С., Методика проектирования привода на основе волновой передачи с телами качения: дис. канд. техн. наук. - Защищена 31.03.2009; - М., 2009. - 49 с.
3. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчёт на прочность деталей машин. Справочник – М.: Машиностроение, 1993. – 530 с.
4. Геращенко А.Н., Постников В.А., Самсонович С.Л. Пневматические, гидравлические и электрические приводы летательных аппаратов на основе волновых

исполнительных механизмов: Учебник. – 2 е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010 – 126 с.

5. Степанов В.С., Методика проектирования привода на основе волновой передачи с телами качения. Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук, защищена 31.03.2009. - Москва, 2009 г.
6. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчёт на прочность деталей машин. Справочник – М.: Машиностроение, 1993. – 530 с.

*Научный руководитель Л.С. Самсонович, профессор, д.т.н.*