

УДК 519.246.2

Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой (Часть 2)

Косачев И.М.^{1*}, Чугай К.Н.^{2}, Рыбаков К.А.^{3***}**

¹*Военная академия Республики Беларусь,
проспект Независимости, 220, Минск, 220057, Беларусь*

²*Научно-исследовательский институт Вооруженных Сил,
ул. Славинского, 4/3, Минск, 220103, Беларусь*

³*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*e-mail: kosachev1301@mail.ru

**e-mail: konstantin.ch40@gmail.com

***e-mail: rkoffice@mail.ru

Статья поступила 25.04.2019

Аннотация

Данная статья является продолжением изложения методологии высокоточной нелинейной фильтрации многомерных негауссовых случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой.

Ключевые слова: высокоточная фильтрация, случайный процесс, динамическая система, стохастическая система, фиксированная структура.

Введение

В первой части статьи [1] были изложены введение в рассматриваемую

проблематику, постановка задачи оптимальной нелинейной фильтрации, краткая характеристика всех восьми этапов методики высокоточной фильтрации случайных процессов (СП) в динамических системах с фиксированной структурой (ДСФС) и подробно рассмотрены ее первые три этапа.

Во второй части статьи раскрыто содержание оставшихся пяти этапов предлагаемой методики, а также приведено общее заключение по статье. В дополнение рассмотрено использование последовательных методов Монте-Карло. Фильтры такого типа в настоящее время достаточно популярны, они называются фильтрами частиц [2, 3] и основаны на моделировании СП с последующей статистической обработкой результатов моделирования. Фильтры частиц в данном контексте могут служить для контроля погрешности при использовании методологии высокоточной фильтрации СП в ДСФС.

Методика высокоточной оптимальной нелинейной фильтрации (продолжение)

На четвертом этапе методики требуется получить формулы связи апостериорных центральных моментов (АЦМ) произвольного R -го порядка с апостериорными кумулянтами для многомерного негауссового фильтруемого процесса (ФП).

Как уже отмечалось [1], АЦМ ФП не обладают монотонностью затухания с ростом их порядка. Свойством монотонности затухания обладают кумулянты (семиинварианты) ФП $Y(t)$. Связь кумулянтов и ЦМ описывается следующим выражением [4–8]:

$$\hat{\chi}_{\bar{r}} + \sum_{k=1}^{n_2(R)} \sum_{\bar{q}_k \sim \bar{r}} \prod \bar{q}_k = \hat{\mu}_{\bar{r}},$$

где $n_2(R)$ – число простых аддитивных разложений второго и более высокого порядков числа R [9]; $\prod \bar{q}_k$ – произведение кумулянтов, соответствующее мультииндексу \bar{q}_k и k -му аддитивному разложению числа R .

На пятом этапе методики осуществляется усечение и замыкание системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) для АЦМ ФП $Y(t)$ путем приравнивания к нулю апостериорных кумулянтов высших порядков. Порядок отбрасываемого апостериорного кумулянта, а значит, и порядок отбрасываемого АЦМ зависит от требуемой точности решения задачи фильтрации. Проведенные исследования показали, что при учете АЦМ (кумулянтов) до четвертого порядка включительно ошибка фильтрации не превышает 10–12 % при любом виде одномодальной апостериорной плотности распределения вероятностей (АПРВ) ФП. При учете АЦМ (кумулянтов) до шестого порядка включительно ошибка фильтрации не превышает 2–5 % при любом виде одномодальной АПРВ ФП. Поэтому при построении оптимальных высокоточных фильтров нет необходимости учитывать АЦМ (кумулянты) выше шестого порядка.

На шестом этапе методики проводится синтез высокоточных оптимальных нелинейных фильтров. Данная методика включает два подэтапа:

- 1) выбор критерия оптимальности фильтрации СП;
- 2) расчет оптимальных оценок ФП через полученные АЦМ выбранного порядка.

При использовании в качестве критерия оптимальности минимума среднего квадрата ошибки фильтрации в качестве оптимальной оценки ФП $Y(t)$ принимается

его апостериорное математическое ожидание (МО). Такой критерий оптимальности используется практически всеми авторами по теории оптимальной фильтрации. Однако, когда АПРВ имеет «тяжелые хвосты» или является бимодальной, использование формулы для апостериорного МО является неприемлемым. В этом случае в качестве оптимальной оценки ФП $Y(t)$ принимается мода апостериорного распределения, т.е. вектор, на котором достигается максимум АПРВ. Эти критерии рассмотрены в первой части статьи [1].

Получим выражения для определения моды через АЦМ. Для этого аппроксимируем АПРВ $\hat{\omega}(y)$ частичной суммой ряда Эджворта [7, 8, 10]:

$$\hat{\omega}(y) = \frac{1}{\sqrt{\hat{\chi}_2}} \hat{\omega}_G(x) \left[1 + \sum_{k=3}^n B_k H_k(x) \right], \quad (1)$$

где $\hat{\omega}_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ – гауссовая ПРВ; B_k – коэффициенты при полиномах

Чебышева–Эрмита [10–12]:

$$B_3 = \frac{1}{3!} \frac{\hat{\chi}_3}{\hat{\sigma}^3}, \quad B_4 = \frac{1}{4!} \frac{\hat{\chi}_4}{\hat{\sigma}^4}, \quad B_5 = \frac{1}{5!} \frac{\hat{\chi}_5}{\hat{\sigma}^5}, \quad B_6 = \frac{10}{6!} \frac{\hat{\chi}_3^2}{\hat{\sigma}^6}, \quad B_7 = \frac{35}{7!} \frac{\hat{\chi}_3 \hat{\chi}_4}{\hat{\sigma}^7}, \quad B_8 = \frac{35}{8!} \frac{\hat{\chi}_4^2}{\hat{\sigma}^8}, \quad \dots \quad (2)$$

где $\hat{\chi}_k$ – апостериорный кумулянт k -го порядка, $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\chi}_2}$ – апостериорное среднее квадратическое отклонение ФП $Y(t)$, $H_k(x)$ – полиномы Чебышева–Эрмита:

$$H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x = \frac{y - \hat{\chi}_1}{\sqrt{\hat{\chi}_2}}.$$

Отметим, что, как и в первой части статьи [1], зависимость от t для краткости в ряде формул не указана. Такая аппроксимация применяется в случае, если y – скалярная величина, для векторного аргумента y аппроксимация АПРВ более

сложная, однако выражение (2) можно применять для маргинальных АПРВ (для каждой координаты ФП $Y(t)$).

Для моды должно выполняться условие равенства нулю частной производной АПРВ по аргументу y , т.е.

$$\frac{\partial \hat{\omega}(y)}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Подставляя выражение (1) в формулу (3) и беря частную производную, находим развернутое уравнение равенства нулю частной производной АПРВ:

$$\hat{\omega}_G(x) \left[- \left(1 + \sum_{k=3}^n B_k H_k(x) \right) x + \sum_{k=3}^n B_k \frac{dH_k(x)}{dx} \right] \frac{dx}{dy} = 0. \quad (4)$$

Входящие в выражение (4) производные полиномов Чебышева–Эрмита k -й степени рассчитываются так [7, 13]:

$$\frac{dH_k(x)}{dx} = xH_k(x) - H_{k+1}(x). \quad (5)$$

Подставляя значения производных полиномов Чебышева–Эрмита из (5) в соотношение (4) и полагая $n = 3$, получаем искомое условие равенства нулю частной производной (необходимое условие экстремума):

$$x^4 - 6x^2 + \frac{1}{B_3}x + 3 = 0, \quad B_3 \neq 0. \quad (6)$$

Решая алгебраическое уравнение четвертой степени (6) и учитывая выражение для коэффициента B_3 через АЦМ $\hat{\chi}_3 = \hat{\mu}_3$ и $\hat{\sigma}$, можно приближенно найти моду для p -й фазовой координаты ФП $Y(t)$ с точностью до учета АЦМ третьего порядка. Уравнение (6) при $\hat{\chi}_3 \neq 0$ может иметь несколько действительных корней, из

которых следует выбрать корень x^* , отвечающий максимальному значению АПРВ, тогда

$$\widehat{Y}_p = \widehat{M}_p + \widehat{\sigma}_p x_p^*. \quad (7)$$

При фильтрации одномерного процесса эта формула запишется так:

$$\widehat{Y} = \widehat{M} + \widehat{\sigma} x^*. \quad (8)$$

При $\widehat{\chi}_3 = 0$ мода совпадает с апостериорным МО ФП $Y(t)$.

Если ФП $Y(t)$ является существенно негауссовым, но с симметричной (четной) АПРВ, то для повышения точности фильтрации в частичной сумме ряда Эджворта следует учитывать большее число членов ряда. При этом целесообразно использовать другое разложение АПРВ в ряд Эджворта по степени убывания влияния членов ряда на точность фильтрации [10]:

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}(y) = \frac{1}{\sqrt{\widehat{\chi}_2}} \widehat{\omega}_G(x) & \left\{ 1 + \frac{1}{3!} \frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} H_3(x) + \left[\frac{1}{4!} \left(\frac{\widehat{\mu}_4}{\widehat{\sigma}^4} - 3 \right) H_4(x) + \frac{10}{6!} \left(\frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} \right)^2 H_6(x) \right] + \right. \\ & + \left[\frac{1}{5!} \left(\frac{\widehat{\mu}_5}{\widehat{\sigma}^5} - 10 \frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} \right) H_5(x) + \frac{35}{7!} \frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} \left(\frac{\widehat{\mu}_4}{\widehat{\sigma}^4} - 3 \right) H_7(x) + \frac{280}{9!} \left(\frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} \right)^3 H_9(x) \right] + \\ & + \left[\frac{1}{6!} \left(\frac{\widehat{\mu}_6}{\widehat{\sigma}^6} - 15 \frac{\widehat{\mu}_4}{\widehat{\sigma}^4} - 10 \left(\frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} \right)^2 + 30 \right) H_6(x) + \frac{56}{8!} \frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} \left(\frac{\widehat{\mu}_5}{\widehat{\sigma}^5} - 10 \frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} \right) H_8(x) + \frac{35}{8!} \left(\frac{\widehat{\mu}_4}{\widehat{\sigma}^4} - 3 \right) H_8(x) + \right. \\ & \left. + \frac{2100}{10!} \left(\frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} \right)^2 \left(\frac{\widehat{\mu}_4}{\widehat{\sigma}^4} - 3 \right) H_{10}(x) + \frac{15400}{12!} \left(\frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3} \right)^4 H_{12}(x) \right] + \dots \left. \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Ограничиваясь членами ряда (9) до АЦМ четвертого, пятого или шестого порядков и используя вышеизложенную методику, можно получить более точное выражение для расчета моды [6], однако при этом потребуется находить корни алгебраического уравнения, степень которого больше четырех.

Кроме того, если АПРВ равна нулю при отрицательных значениях аргумента

(например, пуассоновская или релейевская ПРВ), то ряд Эджворта вида (1) или (9) сходится медленно. В этом случае целесообразно использовать аппроксимацию АПРВ с помощью ряда Лагерра [10, 14]. Далее, используя изложенную выше методику, можно получить выражения для расчета моды с точностью до учета АЦМ требуемого порядка (например, четвертого, пятого или шестого).

Основываясь на полученных алгоритмах, на рис. 1 приведена обобщенная структурная схема высокоточного оптимального фильтра с учетом АЦМ до четвертого порядка включительно для двух критериев оптимальности: минимум среднего квадрата ошибки фильтрации и максимум АПРВ [1, 6] (КН – канал наблюдения).

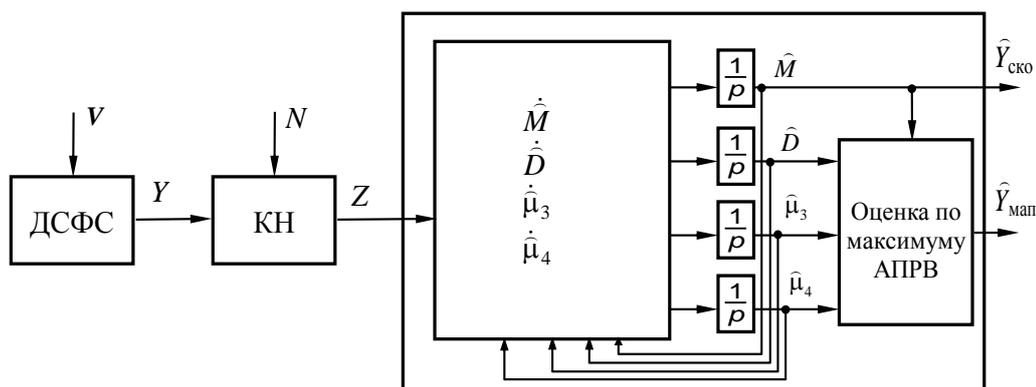


Рис. 1. Структурная схема высокоточного оптимального нелинейного фильтра

На седьмом этапе методики необходимо задать известные и рассчитать недостающие начальные условия для учитываемых АЦМ ФП.

На практике инженеру-исследователю известны начальные условия лишь для части АЦМ. Чтобы найти начальные условия для остальных АЦМ, можно воспользоваться следующей методикой, которая показала свою практическую эффективность [15]. Данная методика состоит из четырех подэтапов:

- 1) перенумеруем АЦМ посредством замены переменных, а именно

сформируем вектор моментов X , элементы которого задаются последовательно:

$$\begin{aligned} X_1 = \widehat{M}_1, \quad X_2 = \widehat{M}_2, \quad \dots, \quad X_{N_Y} = \widehat{M}_{N_Y}; \\ X_{N_Y+1} = \widehat{D}_{11}, \quad \dots, \quad X_m = \widehat{D}_{N_Y N_Y}; \quad X_{m+1} = \widehat{\mu}_{111}, \quad \dots, \quad X_K = \widehat{\mu}_{1 \dots R}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $m = \frac{1}{2} N_Y (N_Y + 3)$ – число апостериорных МО и взаимных корреляционных моментов ФП; $K = C_{N_Y+R}^{N_Y} - 1$ – общее число учитываемых АЦМ ФП $Y(t)$; R – порядок учитываемых АЦМ;

2) после нумерации запишем полученную ранее замкнутую систему СДУ для учитываемых АЦМ с учетом проведенной нумерации в (10):

$$\dot{X}_j = F_j(X), \quad j = \overline{1, K}, \quad (11)$$

где $F_j(X)$ – в общем случае нелинейная функция, представляющая собой правую часть СДУ для j -го АЦМ (на основе уравнения, приведенного в первой части статьи [1]);

3) определим недостающие начальные условия как координаты неподвижной точки (на начальный момент времени интегрирования t_0) системы (11). Правомерность такого выбора обусловлена расположением неподвижной точки в области устойчивости решения указанной системы. Координаты неподвижной точки удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений

$$F_j(X) = 0, \quad j = \overline{1, K - n}, \quad (12)$$

где n – число известных начальных условий для АЦМ ФП $Y(t)$;

4) решение данной системы нелинейных алгебраических уравнений (12) осуществляется наиболее эффективно итерационным методом Ньютона–Рафсона [16, 17] с учетом заданной допустимой погрешности. Результатом решения

являются искомые недостающие начальные условия для учитываемых АЦМ ФП $Y(t)$. Приведенная методика обеспечивает быструю сходимость решений СДУ для АЦМ и малый этап приработки высокоточных фильтров (менее 2–5 % от общего времени счета на ЭВМ).

На восьмом этапе методики после задания начальных условий для учитываемых АЦМ осуществляется выполнение следующих четырех подэтапов:

- 1) численное интегрирование на ЭВМ системы СДУ для АЦМ выбранного порядка;
- 2) контроль точности расчета на ЭВМ учитываемых АЦМ ФП $Y(t)$;
- 3) проверка ФП $Y(t)$ на гауссовость и уточнение итерационным образом порядка рассчитываемых АЦМ (адаптация алгоритмов работы оптимального фильтра);
- 4) получение оптимальных оценок ФП $Y(t)$.

Краткий обзор методов по численному интегрированию СДУ для АЦМ и их связь с методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений дан в [6], поэтому не будем здесь подробно останавливаться на этом.

Проверка ФП на гауссовость и уточнение итерационным образом порядка рассчитываемых АЦМ ФП (адаптация алгоритмов работы оптимального фильтра) осуществляется по следующей методике:

1. При первой итерации на интервале времени от t_0 до $t_0 + \Delta t_k$, где Δt_k – интервал контроля, равный 10–20 шагов интегрирования, интегрируются СДУ для АЦМ до четвертого порядка включительно. Затем по полученным значениям АЦМ

на каждом шаге интегрирования рассчитываются коэффициенты асимметрии $\hat{\gamma}_{1p}$ и эксцесса $\hat{\gamma}_{2p}$ ФП $Y(t)$ по формулам

$$\hat{\gamma}_{1p} = \frac{\hat{\mu}_{3p}}{\hat{\sigma}_p^3}, \quad \hat{\gamma}_{2p} = \frac{\hat{\mu}_{4p}}{\hat{\sigma}_p^4} - 3, \quad p = \overline{1, N_Y}, \quad (13)$$

где $\hat{\mu}_{3p} = \hat{\mu}_{ppp}$ и $\hat{\mu}_{4p} = \hat{\mu}_{pppp}$ – АЦМ p -й фазовой координаты третьего и четвертого порядков соответственно; $\hat{\sigma}_p$ – апостериорное среднеквадратическое отклонение p -й фазовой координаты ФП $Y(t)$.

Далее, если модуль величины асимметрии не превышает 0,25 и модуль величины эксцесса не превышает 0,5, то с вероятностью 0,95 такой ФП является гауссовым [6]. Если все фазовые координаты имеют нормальную ПРВ, то такой ФП $Y(t)$ является гауссовым и в этом случае ЭВМ автоматически не учитывает в алгоритмах фильтрации АЦМ выше второго порядка. В противном случае ЭВМ автоматически итерационным образом учитывает в алгоритмах фильтрации высшие АЦМ для тех фазовых координат, которые не являются гауссовыми.

Если по результатам первой итерации модули величин асимметрии и (или) эксцесса для всех или части фазовых координат превысили указанные выше пороговые значения 0,25 и 0,5 соответственно, то ФП $Y(t)$ является негауссовым и при его фильтрации необходимо учитывать АЦМ как минимум до четвертого порядка.

2. При второй итерации снова возвращаемся к начальному моменту времени начала интегрирования t_0 и повторно интегрируем на интервале контроля $t_0 + \Delta t_k$ СДУ для АЦМ, но уже до пятого порядка. По результатам интегрирования на

каждом шаге снова рассчитываем модули величин асимметрии и эксцесса согласно (13). Если относительный прирост этих величин для всех фазовых координат не превысил 5–10 % по сравнению с первой итерацией, то нет необходимости в дополнительном учете уравнений для АЦМ шестого порядка [6].

Опыт решения восьми контрольных задач по фильтрации многомерных негауссовых СП с различными ПРВ показал, что при допустимой погрешности в 5 % нет необходимости учитывать АЦМ выше шестого порядка.

3. На каждом шаге интегрирования осуществляется расчет относительного изменения модулей апостериорных МО и апостериорных дисперсий всех фазовых координат ФП $Y(t)$ по результатам вычислений при разных итерациях по формулам:

$$|\Delta \widehat{M}_p| = \left| \frac{\widehat{M}_{p(2)} - \widehat{M}_{p(1)}}{\widehat{M}_{p(2)}} \right| 100 \%, \quad |\Delta \widehat{D}_p| = \left| \frac{\widehat{D}_{p(2)} - \widehat{D}_{p(1)}}{\widehat{D}_{p(2)}} \right| 100 \%,$$

где цифра в круглых скобках (2) или (1) означает, при какой итерации (второй или первой) берутся значения апостериорных МО или апостериорных дисперсий в каждый момент времени.

Эти характеристики нужны для оценки сходимости. Например, если величины $|\Delta \widehat{M}_p|$ и $|\Delta \widehat{D}_p|$ для всех фазовых координат не превышают заданной малой величины $\varepsilon \leq 5 \%$, то решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации полагается успешным.

Применение последовательных методов Монте-Карло (фильтр частиц)

В этом разделе излагается применение последовательных методов Монте-Карло, или фильтров частиц. Фильтры частиц могут служить для контроля

погрешности при расчете высших АЦМ, а также апостериорных асимметрий и эксцессов, необходимость в которых возникает при использовании методологии высокоточной фильтрации СП в ДСФС.

Данная методика включает три основных этапа [18].

Первый этап методики состоит в получении аналога системы нелинейных СДУ в дискретном времени, необходимого для численного моделирования стохастической ДСФС. Например, при использовании стохастического метода Эйлера

$$Y_{k+1} = Y_k + h(C(t_k) + D(t_k)Y_k + B(t_k)\Phi(Y_k, t_k)) + \sqrt{h}H(t_k)V_k, \quad (14)$$

где V_k – случайный вектор, координаты которого для всех k независимы и имеют стандартное гауссово распределение; h – постоянный шаг интегрирования: $h = t_{k+1} - t_k$; случайный вектор Y_0 моделируется согласно заданному начальному распределению.

Для повышения точности следует применять более сложные методы численного решения СДУ, нежели стохастический метод Эйлера, например, методы типа Рунге–Кутты или Розенброка, методы, построенные на разложении кратных стохастических интегралов [19–22].

Второй этап методики предполагает нахождение интенсивности изменения весовой функции, определяющей вклад траектории стохастической ДСФС в искомую оптимальную оценку ФП $Y(t)$:

$$\lambda(y, z, t) = S^T(t)\Psi^T(y, t)\Xi^{-1}(t)\left(z - \frac{1}{2}\Psi(y, t)S(t)\right), \quad \Xi(t) = M(t)M^T(t).$$

Весовая функция и ее аналог в дискретном времени имеют вид

$$w(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \lambda(Y(\tau), Z(\tau), \tau) d\tau \right\}, \quad w_{k+1} = w_k \exp \{ \lambda(Y_k, Z_k, t_k) h \}, \quad w_0 = 1. \quad (15)$$

Функцию $\lambda(y, z, t)$ можно рассматривать как интенсивность пуассоновского потока обрывов и ветвлений специального ветвящегося СП, построенного на основе системы нелинейных СДУ исходной ДСФС [1]. Методы и алгоритмы нелинейной фильтрации СП, основанные на такой интерпретации, подробно изложены в [18].

На третьем этапе методики проводится синтез высокоточного оптимального нелинейного фильтра в соответствии с выбранным критерием оптимальности фильтрации и численное моделирование на ЭВМ.

При использовании в качестве критерия оптимальности минимума среднего квадрата ошибки фильтрации оптимальная оценка ФП $Y(t)$ – это взвешенное среднее по результатам численного моделирования пар «траектория + вес»:

$$\hat{Y}(t_k) \approx \sum_i w_k^i Y_k^i / \sum_i w_k^i,$$

где суммирование ведется по всем реализациям (i – номер реализации, M – число реализаций, $i = \overline{1, M}$), которые получаются в результате численного моделирования решения уравнения (14) с учетом весовой функции (15).

При использовании в качестве критерия оптимальности максимума АПРВ оптимальная оценка представляет собой вектор, на котором достигается максимум оценки АПРВ, полученной на основе численного моделирования пар «траектория + вес». Для уменьшения вычислительных затрат можно находить эту оценку приближенно для p -й фазовой координаты ФП $Y(t)$ на основе формулы (7) или (8) и взвешенных оценок АЦМ третьего порядка.

Используя определение АЦМ произвольного R -го порядка $\mu_{r_1, r_2, \dots, r_R}$ [1],

запишем соотношение для его оценки в виде

$$\hat{\mu}_{r_1, r_2, \dots, r_R}(t_k) \approx \sum_i w_k^i \left((Y_k^i)_{r_1} - \hat{M}_{r_1} \right) \dots \left((Y_k^i)_{r_R} - \hat{M}_{r_R} \right) / \sum_i w_k^i,$$

где $(Y_k^i)_p$ – p -я фазовая координата ФП $Y(t)$ для i -й реализации и момента времени t_k ;

\hat{M}_p – оценка апостериорного МО p -й фазовой координаты ФП $Y(t)$ при $t=t_{k+1}$,

$p = \overline{1, N_Y}$. Таким образом, для АЦМ второго и третьего порядков имеем

$$\begin{aligned} \hat{D}_p(t_k) &= \hat{\sigma}_p^2(t_k) \approx \sum_i w_k^i \left((Y_k^i)_p - \hat{M}_p \right)^2 / \sum_i w_k^i, \\ \hat{\mu}_{3p}(t_k) &= \hat{\mu}_{ppp}(t_k) \approx \sum_i w_k^i \left((Y_k^i)_p - \hat{M}_p \right)^3 / \sum_i w_k^i. \end{aligned}$$

Для приближенного нахождения моды их следует подставить в формулу (7) или (8), выражая x^* через АЦМ третьего порядка. Аналогичным образом можно привести соотношения для АЦМ высших порядков. Эти оценки могут быть использованы для приближенного представления маргинальных АПРВ (для каждой координаты ФП $Y(t)$) согласно (1) или (9).

Точность фильтрации зависит от шага численного интегрирования h и числа реализаций M . При $h \rightarrow 0$ и $M \rightarrow \infty$ оценки АЦМ ФП $Y(t)$ будут стремиться к своим точным значениям.

Отметим, что можно предложить численное моделирование других пар «траектория + вес». Отличие состоит в том, что необходимо моделировать вспомогательную стохастическую ДСФС, построенную на базе исходной, и

заменить формулу для расчета весовой функции. Более подробно такая методика изложена в [24].

Заключение

В данной статье предложена общая методология адаптивной высокоточной оптимальной нелинейной фильтрации многомерных негауссовых СП в непрерывных стохастических ДСФС. Общность предлагаемой методологии обусловлена тем, что полученные алгоритмы оптимальной нелинейной фильтрации не зависят от конкретного вида СДУ, описывающих ФП и КН, а выражаются через вектор сноса, диффузионную матрицу и обновляющий процесс. Кроме того, данные алгоритмы обеспечивают оптимальную фильтрацию негауссовых СП по различным критериям оптимальности [1].

Высокая точность разработанных алгоритмов оптимальной нелинейной фильтрации обусловлена учетом при фильтрации АЦМ произвольного R -го порядка ФП, а также использованием в них эффективного метода раскрытия усреднений от одно- и многоаргументных нелинейностей произвольного вида по гауссовой или негауссовой АПРВ: метода статистической аппроксимации нелинейностей [15].

Адаптивность разработанных алгоритмов высокоточной нелинейной фильтрации обусловлена автоматическим расчетом на ЭВМ в реальном времени апостериорных асимметрий и эксцессов всех фазовых координат ФП с их последующим сравнением с пороговыми значениями. Если модули величин апостериорных асимметрий менее 0,25 и эксцессов менее 0,5, то такой ФП с вероятностью 0,95 является гауссовым [6]. В этом случае ЭВМ автоматически

исключает из алгоритмов высокоточной фильтрации уравнения для высших АЦМ ФП и решает задачу калмановской фильтрации. При невыполнении этих условий ЭВМ на этапе приработки фильтра автоматически последовательно добавляет в расчетные алгоритмы фильтрации уравнения для АЦМ третьего, четвертого, пятого и шестого порядков и осуществляет проверку точности решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации. Итерационная процедура заканчивается при достижении относительной погрешности фильтрации не более 2–5 %. Решение восьми контрольных задач показало, что такая точность фильтрации обеспечивается при учете АЦМ ФП не выше шестого порядка для основных встречающихся на практике видов АПРВ ФП.

Из-за ограниченного объема статьи в ней основное внимание уделено задаче фильтрации многомерного негауссового СП с безынерционным нелинейным КН и аддитивными шумами. Однако предложенная методология может применяться и для других задач, описанных в первой части статьи [1].

Применение последовательных методов Монте-Карло требует больших вычислительных ресурсов. Оно не всегда возможно для решения задачи оптимальной фильтрации в реальном времени, но может быть рекомендовано для контроля погрешности при использовании методологии высокоточной фильтрации СП в ДСФС, которая составляет основу обеих частей данной статьи.

Описанные подходы могут быть использованы при решении различных прикладных задач оптимальной фильтрации [10, 14, 24–26]

Библиографический список

1. Косачев И.М., Чугай К.Н., Рыбаков К.А. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой. Часть 1 // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104262>
2. Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering, New York, Springer, 2009, 394 p.
3. Волков В.А., Кудрявцева И.А. Численное решение задач нелинейной фильтрации на основе алгоритмов фильтра частиц // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=73405>
4. Дашевский М.Л. Приближенный анализ точности нестационарных нелинейных систем методом семиинвариантов // Автоматика и телемеханика. 1967. № 11. С. 62 - 81.
5. Дашевский М.Л. Семиинвариантный метод замыкания уравнений для моментов в задачах анализа нелинейных систем // Проблемы управления и теория информации. 1975. № 4. С. 317 - 328.
6. Косачев И.М. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой // Вестник Военной академии Республики Беларусь. 2014. № 4 (45). С. 125 - 161.
7. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Теория стохастических систем. – М.: Логос, 2004. – 1000 с.
8. Сеницын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. – М.: Логос, 2007. – 776 с.

9. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Введение в теорию обобщенных функций. – М.: МИАН, 2006. – 164 с.
10. Млечин В.В. Теория радиоэлектронного преодоления. Анализ воздействия помех на радиотехнические системы и устройства. - М.: Радиотехника, 2009. - 976 с.
11. Крамер Г. Математические методы статистики. - М.: Мир, 1975. - 648 с.
12. Казаков И.Е., Гладков Д.И. Методы оптимизации стохастических систем. - М.: Наука, 1987. - 304 с.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – СПб.: Лань, 2003. - 832 с.
14. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Рипол классик, 2013. - 684 с.
15. Косачев И.М., Ерошенков М.Г. Аналитическое моделирование стохастических систем. - Минск: Наука и техника, 1993. - 264 с.
16. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. Численные методы. Решение задач и упражнения. - М.: Лаборатория знаний, 2016. - 352 с.
17. Гателюк О.В., Исмаилов Ш.К., Манюкова Н.В. Численные методы. - М.: Юрайт, 2019. - 140 с.
18. Рыбаков К.А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. - М.: Изд-во МАИ, 2017. – 176 с.
19. Аверина Т.А. Построение алгоритмов статистического моделирования систем со случайной структурой. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015. – 155 с.
20. Аверина Т.А., Карачанская Е.В., Рыбаков К.А. Моделирование и анализ линейных инвариантных стохастических систем // Дифференциальные уравнения и процессы

управления. 2018. № 1. С. 54 - 76. URL: <http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/-2018.1/article.1.3.html>

21. Kloeden P.E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Berlin, Springer, 1995, 668 p.

22. Кузнецов Д.Ф. К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядками сильной сходимости 1.5 и 2.0 // Автоматика и телемеханика. 2018. № 7. С. 80 - 98.

23. Кузнецов Д.Ф. К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядком сильной сходимости 2.5 // Автоматика и телемеханика. 2019. № 5. С. 99 - 117.

24. Рыбаков К.А. Решение нелинейных задач оценивания при обработке навигационных данных с использованием непрерывного фильтра частиц // Гироскопия и навигация. 2018. Т. 26. № 4 (103). С. 82 - 95.

25. Сычев М.И. Траекторная обработка радиолокационной информации на основе многомодельной фильтрации // Труды МАИ. 2016. № 90. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=74830>

26. Грошев А.В. Стратегия алгоритмического повышения точностных характеристик и информационной надежности инерциально-спутниковых навигационных систем в составе беспилотных летательных аппаратов // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102217>