

УДК 539.3

## **Верификация численной модели взаимодействия прямоугольной пластины с поверхностью воды**

**Крупенин А.М., Мартиросов М.И.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*e-mail: [zeus-russ@yandex.ru](mailto:zeus-russ@yandex.ru)*

### **Аннотация**

В статье изучаются вопросы численного моделирования эксперимента по сбросу плоских тел в жидкость. Моделируется вертикальный сброс на воду прямоугольной однослойной пластины из однородного изотропного материала. Вода моделируется идеальной сжимаемой жидкостью. Учитывается наличие воздушной прослойки между пластиной и водой. Изучается начальный этап взаимодействия, когда гидродинамические силы и давления достигают максимальных значений. Учитывается влияние на динамику пластины гравитационных сил. Задача решается в связанной плоскосимметричной постановке.

**Ключевые слова:** удар, прямоугольная пластина, взаимодействие с жидкостью, численное моделирование.

### **Введение**

В современных авиационных, ракетных и космических системах применяются транспортные средства и аппараты, вступающие в ударное взаимодействие с жидкостью в процессе эксплуатации или на аварийных режимах работы (экранопланы, спускаемые капсулы и платформы с грузами, гидросамолеты).

Для эффективного проектирования подобных конструкций необходимо учитывать различные эффекты взаимодействия их с жидкостью и применять современные решения, способствующие сохранению прочности и надежности при уменьшении массы (слоистые конструкции, композиционные материалы). Сложный характер движения жидкости в сочетании с нелинейным поведением материалов конструкции исключает возможность аналитического решения поставленной проблемы.

В общем случае задачи взаимодействия конструкций с жидкостью крайне сложны. В прошлом исследователи пользовались упрощенными математическими моделями. Главное упрощение состояло в разделении задачи на две самостоятельных (несвязная постановка): взаимодействие абсолютно твердого тела с жидкостью и исследование напряженно-деформированного состояния конструкции под действием гидродинамических нагрузок. Решения, полученные подобным образом, не могут описать всех нюансов процесса ударного взаимодействия, но позволяют получить важные для экспериментального исследования и практического применения результаты.

Применительно к рассматриваемому вопросу можно привести следующие, полученные ранее, результаты. В работе [1] М. В. Келдыш исследовал задачу об ударе жесткой пластины шириной  $2a_0$  несжимаемую жидкость конечной глубины  $h$ . Им было показано, что при  $h > 5a_0$  влияние дна уже незначительно.

При ударе затупленных тел о поверхность жидкости граница контакта будет расширяться со сверхзвуковой скоростью. В таких условиях необходимо учитывать сжимаемость жидкости [2].

Сегодня, благодаря бурному развитию вычислительной техники, возможно рассматривать сложные задачи в полной постановке и численно исследовать их, учитывая множество различных факторов. Однако, в связи с наличием разнообразных моделей описания поведения материалов и сложностью отклика материалов на импульсное воздействие, необходимо проверять достоверность получаемых численно результатов. Для этого проводят верификацию численных моделей, сравнивая полученные численно результаты с экспериментальными данными. Вопросы верификации численного эксперимента и посвящена данная работа.

В статье, в прикладном программном пакете ANSYS AUTODYN, численно моделируется эксперимент из работы [3]. Полученные результаты обрабатывались в программном комплексе Mathcad 14. В численном эксперименте рассматривается два случая: с учетом воздушной прослойки между падающей однослойной упругой пластиной и поверхностью воды и без него. В обоих случаях учитывается влияние на падающую в воду пластину гравитационных сил. Задача решается в плоскосимметричной связанной постановке. Полученные результаты сравниваются с приведенными в [3]. Проводится анализ максимальных гидродинамических давлений в зависимости от скорости соударения.

## Описание эксперимента

В статье [3] приводятся результаты и описание экспериментального исследования плоского удара прямоугольных пластин о воду. На поверхности пластин установлены электромагниты, общая мощность которых достаточна для подъема пластины. С помощью крана и электромагнитов пластина поднималась на заданную высоту, после чего электромагниты выключались, и она падала на поверхность воды. В средней части пластины на ее наружной поверхности вмонтированы мембранные датчики давлений. В процессе испытаний менялась высота падения пластины. Пластины изготовлены из пенопласта ПС-1 с кажущейся плотностью  $200 \text{ кг/м}^3$  (другие характеристики материала в статье не указаны).

В данной статье рассмотрим моделирование падения только одного типа пластин размером  $1.65 \text{ м} \times 0.55 \text{ м}$  (высота пластин в [3] не указана). Вес пластины  $40 \text{ кг}$ . Недостающий геометрический параметр пластины (высота) легко найти, зная массу, плотность, длину и ширину.

$$h = \frac{m}{\rho S};$$

где  $m$  – масса пластины,

$\rho$  – плотность материала,

$S$  – площадь пластины,

$h$  – высота пластины.

$$h = \frac{40}{200 \cdot 0.907} = 0.22 \text{ м};$$

Недостающие для моделирования характеристики материала найти сложнее. В работе [4] приведены модуль упругости и модуль сдвига для пенопласта ПС-1 с кажущейся плотностью  $100 \text{ кг/м}^3$ . В работе [5] — модуль упругости для интересующего нас пенопласта. Чтобы найти модуль сдвига, сделаем допущение, что оба пенопласта обладают одинаковым коэффициентом Пуассона.

$E_{100} = 5.88 \cdot 10^7 \text{ Па}$  – модуль упругости на сжатие для пенопласта с кажущейся плотностью в  $100 \text{ кг/м}^3$ .

$E_{200} = 9.8 \cdot 10^7 \text{ Па}$  – модуль упругости на сжатие для пенопласта с кажущейся плотностью в  $200 \text{ кг/м}^3$ .

$G_{100} = 2.45 \cdot 10^7 \text{ Па}$  – модуль сдвига пенопласта с кажущейся плотностью в  $100 \text{ кг/м}^3$ .

Тогда коэффициент Пуассона  $\nu$  равен:

$$\nu = \frac{E_{100}}{2G_{100}} - 1 = 0.2;$$

Модуль сдвига для пенопласта с кажущейся плотностью в  $200 \text{ кг/м}^3$  равен:

$$G_{200} = \frac{E_{200}}{2(1 + \nu)} = 4.083 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

Для моделирования эксперимента в ANSYS AUTODYN необходим мгновенный модуль объемной деформации  $K$ .

$$K = \frac{E_{200}}{3(1 - 2\nu)} = 5.444 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

В результате испытаний в [3] получены максимальные гидродинамические давления в центре пластины от высоты падения в  $\text{кг/см}^2$ . Переведенные в Паскали, они сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Номер эксперимента	Высота падения, м	Ударные давления, Па
1	0.5	$1.382 \cdot 10^7$
2	0.9	$1.509 \cdot 10^7$
3	1.0	$1.813 \cdot 10^7$
4	1.2	$2.234 \cdot 10^7$
5	1.3	$1.813 \cdot 10^7$
6	2.3	$2.46 \cdot 10^7$

В [3] делается вывод о том, что зависимость между ударными давлениями и скоростью удара близка к линейной.

Однако, в статье [3] получено по одному результату для каждого случая, поэтому ни о какой статистической выборке не может идти и речи. Полученные результаты представляют исключительно научную ценность, как позволяющие ориентировочно оценить уровень нагрузок, действующих на пластины со стороны воды.

На рисунке 1 изображены результаты из таблицы 1 (за исключение результата за номером 5).

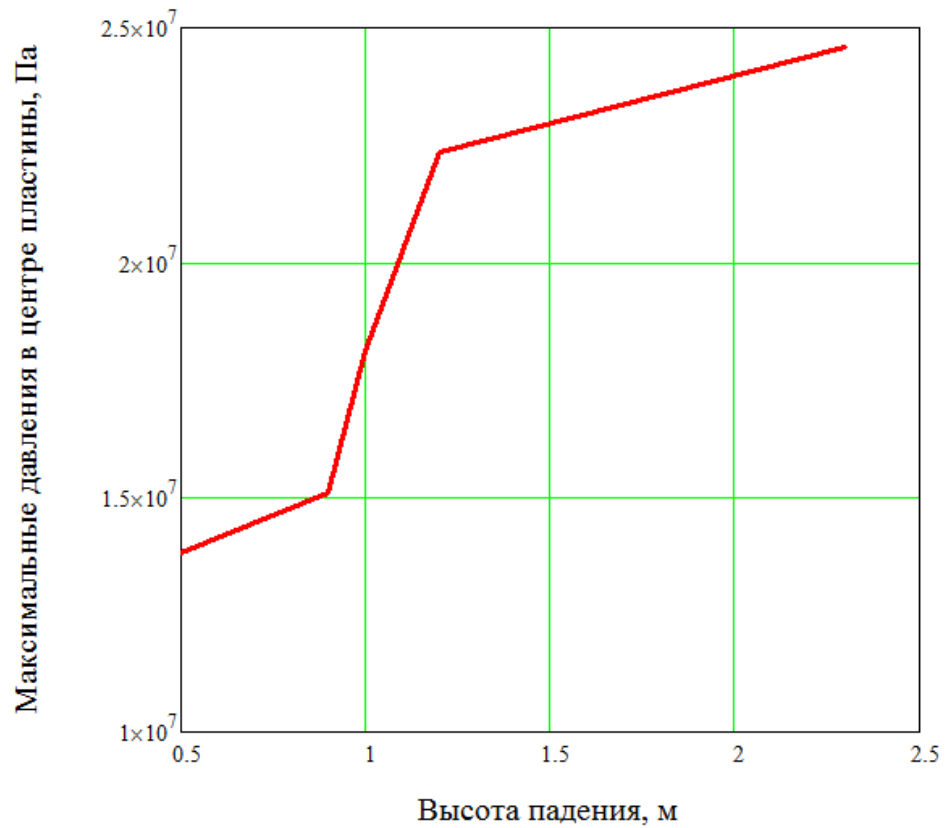


Рис.1 Максимальные давления в центре пластины от высоты падения

### Описание моделирования

Численное моделирование рассматриваемой задачи проводилось в программном продукте ANSYSAUTODYN, результаты обрабатывались в пакете Mathcad 14.

В программном комплексе ANSYSAUTODYN используется явный метод интегрирования уравнений. Разрешающие соотношения в лагранжевых декартовых координатах представляют собой:

Уравнение сохранения массы:

$$\frac{\rho_0 V_0}{V} = \frac{m}{V'}$$

где введены следующие обозначения:

$\rho_0, V_0$  – начальная плотность и начальный объем,

$m, V$  – текущая масса и текущий объем.

Уравнения сохранения количества движения:

$$\rho \ddot{x} = b_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z};$$

$$\rho \ddot{y} = b_y + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z};$$

$$\rho \ddot{z} = b_z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z};$$

где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,

$b_i$  – компоненты объемных сил,

$x, y, z$  – компоненты перемещений в соответствующих направлениях.

Уравнение сохранения энергии:

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho} (\sigma_{xx} \dot{\varepsilon}_{xx} + \sigma_{yy} \dot{\varepsilon}_{yy} + \sigma_{zz} \dot{\varepsilon}_{zz} + 2\sigma_{xy} \dot{\varepsilon}_{xy} + 2\sigma_{xz} \dot{\varepsilon}_{xz} + 2\sigma_{yz} \dot{\varepsilon}_{yz});$$

где  $e$  – удельная энергия,

$\varepsilon_{ij}$  – тензор деформаций.

Точкой традиционно обозначается частная производная по времени.

В общем случае материалы имеют сложный отклик на динамическую нагрузку. В ANSYS AUTODYN модель материала разбивается на три части: уравнение состояния, которое выражает изменение объема и описывается шаровым



тензором, модель прочности, которая выражает изменение формы и описывается девиатором, и модель разрушения.

Модель материала:

$$\sigma_i = -p + s_i;$$

где  $p$  – гидростатическое давление,

$\sigma_i$  – главные напряжения,

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3);$$

$s_i$  – девиатор тензора напряжений.

В качестве уравнения состояния в работе принято соотношение:

$$p = K\mu;$$

где  $p$  – гидростатическое давление,

$K$  – мгновенный модуль объемной деформации,

$\mu$  – сжатие,

$$\mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1;$$

$\rho$  – плотность материала,

$\rho_0$  – начальная плотность.

В качестве модели прочности принято соотношение:

$$ds_i = 2G \left( d\varepsilon_i - \frac{dV}{3V} \right);$$

где  $G$  – модуль сдвига,

$V$  – объем.

Вместе они являются эквивалентом закона Гука.

Для моделирования воды и воздуха использовались стандартные модели, заложенные в ANSYS AUTODYN.

Полное моделирование падение пластин ресурсоемко, поэтому моделировалось падение пластин с высоты в 0.1 м с заданной начальной скоростью, которая вычислялась в зависимости от высоты падения. В дальнейшем пластина под действием гравитационного ускорения продолжает падение до встречи с жидкостью. Так же моделировался случай, когда пластина лежит на поверхности воды и в начальный момент времени приобретает скорость.

На рисунке 2 представлен фрагмент конечно элементной модели эксперимента с учетом воздушной прослойки. Бассейн и воздух моделировались областью шириной 4 м и высотой 7 м, заполнялись элементами Эйлера 0.01 м×0.01 м (400 элементов по ширине и 700 элементов по высоте). Воздух занимает 1 м верхней части моделируемой области (в численном эксперименте с учетом воздушной прослойки воздух занимает 1.1 м). Количество элементов Эйлера, моделирующих жидкость и воздух, равно 280000. Пластина моделировалась элементами Лагранжа размерами 0.028 м×0.028 м (8 элементов по высоте и 20 элементов по ширине). Количество элементов, моделирующих пластину, равно 160.

Цифрой 1 на рисунке 2 отмечена контрольная точка (геометрический центр нижней поверхности пластины), в которой снимались параметры гидродинамических давлений.

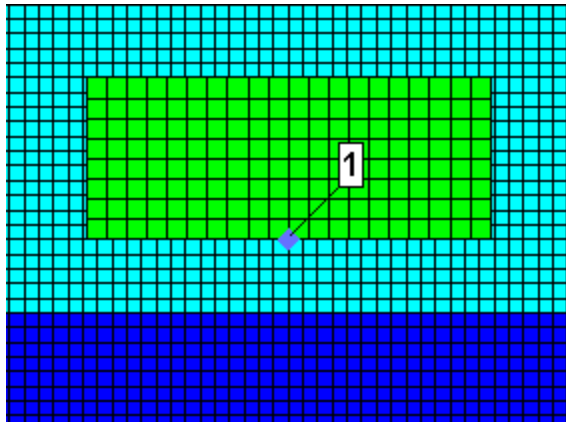


Рис. 2 Фрагмент конечно элементной модели с учетом воздушной прослойки

На рисунке 3 представлен фрагмент конечно элементной модели без учета воздушной прослойки. На рисунке 4 представлен вид бассейна (вся область моделирования).

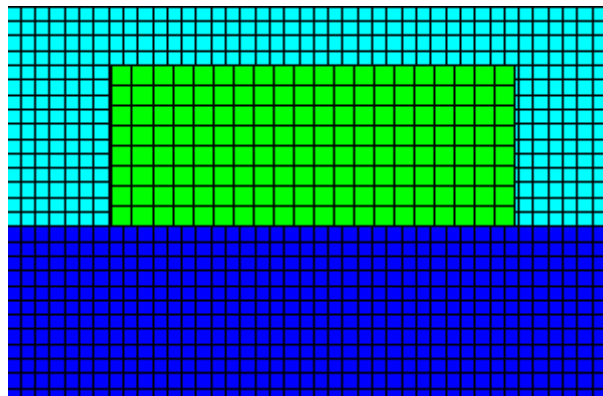


Рис. 3 Фрагмент конечно элементной модели без учета воздушной прослойки

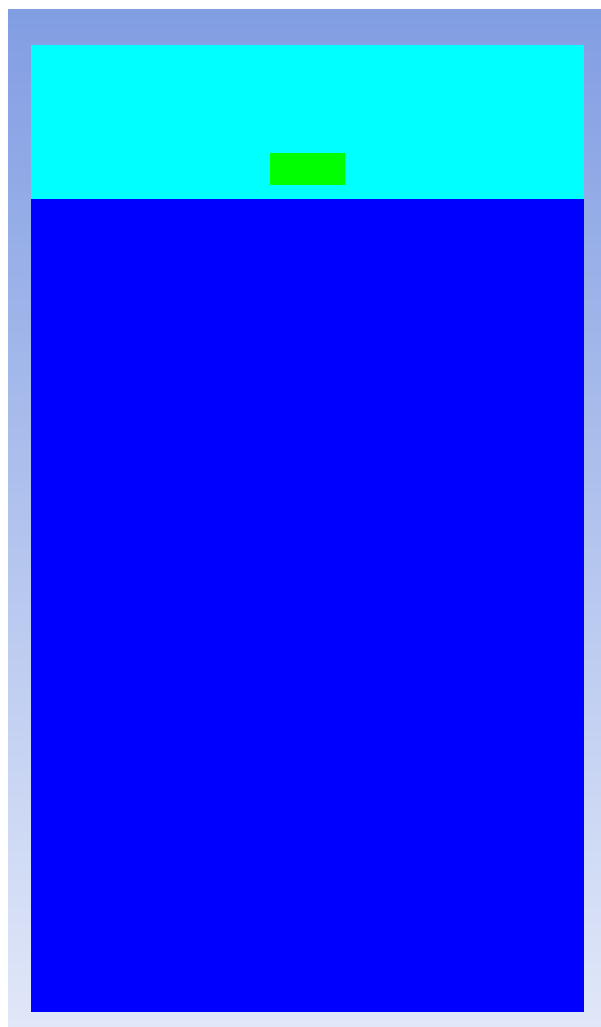


Рис. 4 Вид бассейна (вся область моделирования)

### **Вычисление скорости**

В [3] автором высказано предположение, что для определения скорости соударения пластины о жидкость по начальной высоте падения, формулой, полученной для тела свободно падающего под действием гравитационных сил, пользоваться нельзя (в силу наличия сопротивления воздуха). Для определения скорости падения пластины рассмотрим уравнение свободного падения тела с учетом аэродинамического сопротивления воздуха (точкой традиционно обозначается производная по времени):

$$m\dot{v} = mg - C_x \frac{\rho_{\text{в}} v^2}{2} S;$$

где  $m$  – масса, падающей пластины,

$g$  – ускорение свободного падения,

$C_x$  – коэффициент сопротивления,

$\rho_{\text{в}}$  – плотность воздуха,

$v$  – скорость, падающей пластины,

$S$  – площадь пластины в плане.

Второе слагаемое в правой части уравнения есть сила аэродинамического сопротивления воздуха.

Разделим уравнение на  $m$  и введем обозначение:

$$b = C_x \frac{\rho_{\text{в}} S}{2m};$$

$$a^2 = \frac{g}{b}.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = -b(v^2 - a^2);$$

где  $t$  – время.

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{(v^2 - a^2)} = -b dt;$$

Интегрируя, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{-a^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{\sqrt{-a^2}}\right) = C_1 - bt;$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования.

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{-a^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{-a^2}}\right);$$

где  $v_0$  – начальная скорость.

Выражение для  $v$  будет иметь вид:

$$v(t) = \sqrt{-a^2} \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{-a^2}(C_1 - bt));$$

Интегрируя по времени, получим:

$$x(t) = \frac{1}{b} \ln(\cos(\sqrt{-a^2}(C_1 - bt))) + C_2;$$

где  $C_2$  – постоянная интегрирования,

$x(t)$  – перемещение.

$$C_2 = x_0 - \frac{1}{b} \ln\left(\cos\left(\sqrt{-a^2}C_1\right)\right) = x_0 - \frac{1}{b} \ln\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{-a^2}}\right)\right)\right);$$

где  $x_0$  – начальное перемещение.

Найдем скорость в зависимости от пройденного перемещения. Для этого выразим время из уравнения для перемещения и подставим его в уравнение для скорости. Получаем следующие выражения:

$$t(x) = \frac{\sqrt{-a^2}C_1 + \operatorname{arccos}(e^{-b(C_2-x)})}{b\sqrt{-a^2}};$$

$$v(x) = \sqrt{-a^2} \cdot \operatorname{tg}(-\operatorname{arccos}(e^{-b(C_2-x)})).$$

Напомним, что скорость в зависимости от перемещения в случае свободного падения тела без учета аэродинамического сопротивления воздуха, имеет вид:

$$v(x) = \sqrt{2gx}.$$

На рисунке 5 приведен график зависимости скорости соударения от начальной высоты падения для узкой пластины без груза.

Расчетные характеристики:  $m = 40$  кг,  $C_x = 1$ ,  $\rho_v = 1.225$  кг/м<sup>3</sup>,  $S = 0.907$  м<sup>2</sup>.

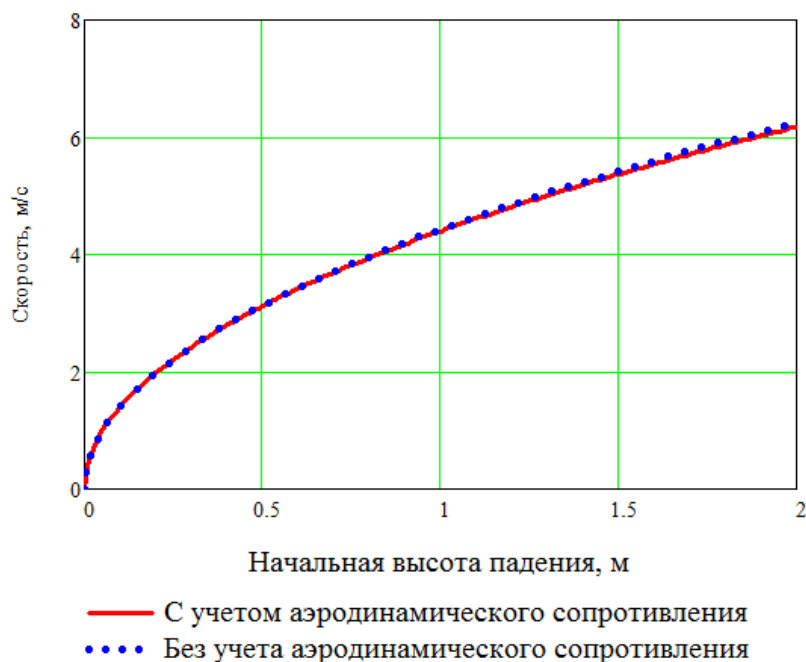


Рис. 5 Скорость соударения в зависимости от начальной высоты падения

Из рисунка видно, что на рассматриваемых высотах отклонения незначительные. А при сбросе грузов с парашютом скорость падения вообще постоянная. Однако, в приведенных выше формулах не учитывается деформирование водной поверхности воздушной подушкой.

По полученным выше формулам рассчитаны начальные характеристики для численного моделирования падающей пластины с высоты 0.1 м. В численном

эксперименте значения начальных скоростей соударения рассмотрено для 18 случаев. Вычисленные характеристики занесены в таблицу 2. За начальную скорость в численном эксперименте без учета воздушной прослойки принималась скорость соударения.

Таблица 2

№	Высота падения, м	Начальная скорость, м/с	Скорость соударения, м/с	Время полного падения, с	Время падения с 0.1 м, с
1	0.5	2.792	3.12	0.32	0.034
2	0.9	3.938	4.174	0.429	0.025
3	1.0	4.174	4.397	0.453	0.023
4	1.2	4.608	4.81	0.496	0.021
5	1.3	4.81	5.003	0.517	0.02
6	1.4	5.003	5.188	0.536	0.02
7	2.3	6.467	6.608	0.689	0.015
8	2.7	7.012	7.14	0.747	0.014
9	3.0	7.39	7.511	0.788	0.013
10	3.5	7.974	8.085	0.852	0.012
11	4.0	8.511	8.614	0.912	0.012
12	4.5	9.01	9.105	0.968	0.011
13	5.0	9.476	9.565	1.022	0.011
14	-	20	21.773	-	0.005
15	-	30	29.202	-	0.0033
16	-	40	37.187	-	0.0025



17	-	50	45.437	-	0.002
18	-	100	88.004	-	0.001

### Результаты

Результаты моделирования сведены в таблицу 3. Из таблицы видно, что давления, полученные в численном эксперименте с учетом воздушной прослойки, близки с давлениями полученными в [3]. Давления же без учета воздушной прослойки значительно выше.

На рисунке 6 изображены результаты из таблицы 3. Из численного эксперимента без учета воздушной прослойки видно, что гидродинамические давления зависят от скорости начального взаимодействия линейно. Наличие воздушной прослойки приводит к колебанию пластины и поверхности воды до удара, т.е. к их неравномерному взаимодействию (номера 3,4,5,6,7 в таблице 3), и тем больше, чем меньше скорость, падающей пластины. Также из рисунка 6 видно, что при увеличении скорости взаимодействия влияние воздушной прослойки уменьшается.

Скорость удара, определяемая по полученным выше формулам, для случая с учетом воздушной прослойки несколько завышена. Таким образом, если скорость удара принять меньшей, то и график зависимость гидродинамических давлений от скорости, будет стремиться к линейному, что совпадает с результатами в [3].

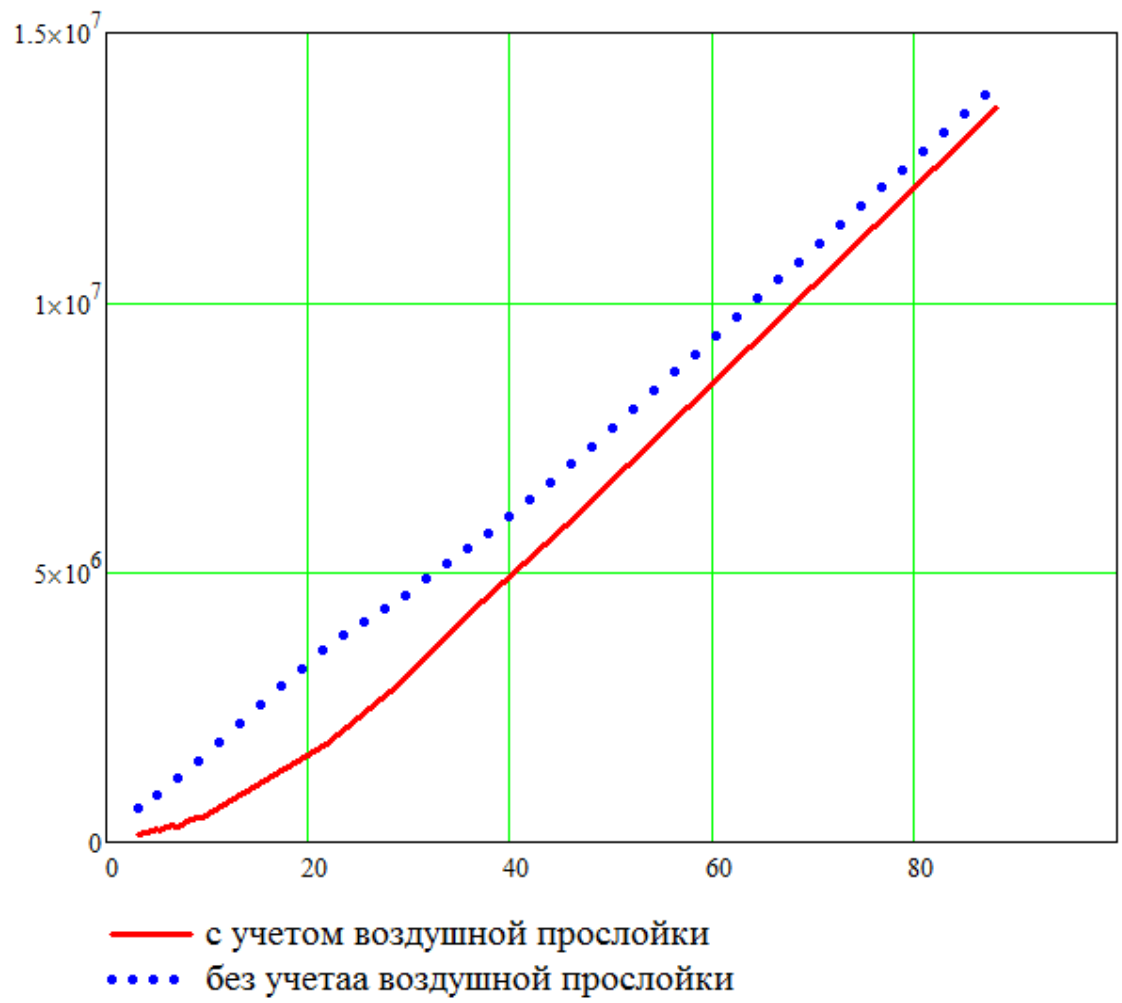


Рис. 6 Зависимость гидродинамических давлений от скорости соударения

Таблица 3

№	Скорость соударения, м/с	Давления в [3], Па	Расчетные давления с учетом воздушной прослойки, Па	Разница расчетных давлений с учетом воздушной прослойки и экспериментальным, %	Расчетные давления без учета воздушной прослойки, Па
1	3.12	$1.382 \cdot 10^5$	$1.534 \cdot 10^5$	9.9	$6.33 \cdot 10^5$
2	4.174	$1.509 \cdot 10^5$	$1.801 \cdot 10^5$	16.2	$7.588 \cdot 10^5$
3	4.397	$1.813 \cdot 10^5$	$2.152 \cdot 10^5$	15.75	$7.704 \cdot 10^5$
4	4.81	$2.234 \cdot 10^5$	$2.125 \cdot 10^5$	-5.13	$8.584 \cdot 10^5$
5	5.003	$1.813 \cdot 10^5$	$2.279 \cdot 10^5$	20.5	$8.67 \cdot 10^5$
6	5.188	-	$2.127 \cdot 10^5$	-	$8.75 \cdot 10^5$
7	6.608	$2.46 \cdot 10^5$	$3.089 \cdot 10^5$	20.4	$10.877 \cdot 10^5$
8	7.14	-	$2.711 \cdot 10^5$	-	$11.736 \cdot 10^5$
9	7.511	-	$3.2 \cdot 10^5$	-	$12.344 \cdot 10^5$
10	8.085	-	$3.756 \cdot 10^5$	-	$13.29 \cdot 10^5$
11	8.614	-	$4.12 \cdot 10^5$	-	$14.161 \cdot 10^5$
12	9.105	-	$4.466 \cdot 10^5$	-	$14.958 \cdot 10^5$
13	9.565	-	$4.604 \cdot 10^5$	-	$15.717 \cdot 10^5$
14	21.773	-	$18.173 \cdot 10^5$	-	$36.208 \cdot 10^5$
15	29.202	-	$29.819 \cdot 10^5$	-	$45.3 \cdot 10^5$
16	37.187	-	$44.778 \cdot 10^5$	-	$56.523 \cdot 10^5$
17	45.437	-	$58.525 \cdot 10^5$	-	$69.234 \cdot 10^5$
18	88.004	-	$136 \cdot 10^5$	-	$140.28 \cdot 10^5$

## Заключение

В работе проведено численное моделирование эксперимента по вертикальному сбросу однослойных упругих пластин прямоугольной формы на воду. Рассмотрено влияние на гидродинамические давления скорости начального взаимодействия пластины и жидкости, а также влияние воздушной прослойки на величину максимальных гидродинамических давлений.

В результате получено, что в программном комплексе ANSYS AUTODYN возможно адекватно моделировать сбросы грузов на воду. Численные значения гидродинамических давлений близки к экспериментальным. Гидродинамические давления зависят от скорости взаимодействия по линейному закону, что тоже хорошо согласуется с экспериментом [3].

Влияние воздушной прослойки существенно сказывается на величине максимальных давлений только на малых скоростях взаимодействия. При увеличении скоростей взаимодействия влияние воздушной прослойки уменьшается.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00540\_a, 12-01-00566\_a).*

## Библиографический список

1. Келдыш М. В. Удар пластины о воду, имеющую конечную глубину// Труды ЦАГИ, 1935. Вып. 152. С. 13-20.
2. Горшков А. Г., Григолюк Э. И. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение). Л.:Судостроение. 1976. 200с.

3. Бельгова М. А. Экспериментальное исследование плоского удара// Труды ЦНИИМФ, 1969. Вып. 117. С. 15-28.
4. Пособие по физико-механическим характеристикам пенопластов и сотопластов. М.: Стройиздат. 1977. 79с.
5. Справочник по пластическим массам// под редакцией Гарбара М. И., М.: Химия. 1969. 520с.