УДК 536.2

К вопросу применимости классического уравнения теплопроводности к высокоэластичным материалам при больших деформациях

В. С. Корнеев, С. А. Корнеев, В. В. Шалай

Омский государственный технический университет, Омск, 644050, Россия
e-mail: korneyev@omgtu.ru

Поступила в редакцию 25.12.2018
После доработки 29.12.2018
Принята к публикации 29.12.2018

Показано, что область применимости классического уравнения теплопроводности распространяется на большие деформации эластомеров. Основанием служат фундаментальный закон изменения внутренней энергии и известные экспериментальные данные по одноосному адиабатическому растяжению. Обращено внимание на то, что для модели твердого тела с постоянной или зависящей от температуры теплоемкостью уравнение переноса внутренней энергии расщепляется на два самостоятельных уравнения, отдельно для тепловой энергии и энергии деформации. Полученные результаты представляют практический интерес при исследовании пневматических элементов с резинокордной оболочкой.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, эластомеры, конечные деформации.

Введение

В технике для защиты стационарных и подвижных объектов от вибраций и ударов широкое применение нашли пневматические элементы с резинокордными оболочками. В процессе колебаний температура рабочей среды (воздуха) пневматического элемента изменяется с течением времени. Поэтому при проведении расчетов необходимо учитывать условия теплообмена с окружающей средой. В деталях металлической арматуры температурное поле описывается классическим уравнением теплопроводности, при выводе которого механическая работа действующих сил полагается равной нулю или пренебрежимо малой величиной [1–8]. Напротив, резинокордная оболочка способна испытывать большие деформации, при которых механическая работа значительна по своей величине. В нелинейной теории термоупругости уравнение распространения теплоты (уравнение теплопроводности) устанавливается в наиболее общем виде (см., например, [9, 10]), вследствие чего сравнительная оценка величины входящих в него членов не проводится. В связи с этим возникает принципиально важный вопрос: применимо ли классическое уравнение теплопроводности, не содержащее механическую работу, для описания температурного поля в эластомерах при деформациях, достигающих 100% и более. Изучению данного вопроса и некоторых связанных с ним деталей, представляющих практический интерес, посвящена настоящая статья.

Общие положения

По первому началу термодинамики (в форме записи закона изменения внутренней энергии) для индивидуального объема сплошной среды [11–13]

$$\mathrm{d}U/\mathrm{d}t = \dot{Q}^{ext} - \dot{A}^{int}, \tag{1}$$

где

$$U = \int_V \rho u \mathrm{d}V,\ \dot{Q}^{ext} = -\int_\Sigma \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\Sigma + \int_V \rho\beta \mathrm{d}V,$$
$$\dot{A}^{\mathrm{int}} = -\int_V \mathbf{T}:\nabla\mathbf{v}\mathrm{d}V \tag{2}$$

– внутренняя энергия индивидуального объема среды V, скорость подвода теплоты от внешних источников, мощность внутренних сил соответственно. Здесь обозначено: ρ – плотность; u – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия; $\mathbf{q}$ – вектор теплового потока; $\mathbf{n}$ – орт внешней нормали к границе Σ объема V; β – массовая плотность внешних источников теплоты (например, за счет излучения); $\mathbf{T}$ – тензор напряжений; $\nabla\mathbf{v} = \partial\mathbf{v}(t,\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}$ – градиент скорости среды $\mathbf{v}$ по отношению к актуальной конфигурации; $\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ – двойное скалярное произведение тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$; $\mathrm{tr}\mathbf{A}$ – след тензора $\mathbf{A}$.

В локальной форме записи уравнение (1) имеет вид

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = \dot{q}^{ext} - \dot{a}^{int}, \tag{3}$$

где

$$\dot{q}^{ext} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{q} + \beta,\ \dot{a}^{int} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{T}:\nabla\mathbf{v} \tag{4}$$

– удельная (на единицу массы) скорость подвода теплоты от внешних источников и удельная мощность внутренних сил соответственно. Выражения (4) относятся к актуальной конфигурации сплошной среды (описание Эйлера). По отношению к отсчетной конфигурации (описание Лагранжа) выражение для удельной мощности внутренних сил можно представить в виде [10, 12, 13]:

$$\dot{a}^{int} = -\frac{1}{\rho_0}\mathbf{P}_\mathbf{E}:\dot{\mathbf{E}}. \tag{5}$$

Здесь ρ_0 – плотность среды в отсчетной конфигурации; $\mathbf{P}_\mathbf{E}$ – приведенный тензор напряжений, энергетически сопряженный с тензором конечной деформации $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{P}_\mathbf{E} = (\det\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}\cdot\left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T,\ \mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F} - \mathbf{I}\right), \tag{6}$$

$\mathbf{I}$ – единичный тензор; $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}(t,\mathbf{X})/\partial\mathbf{X}$ – градиент деформации; $\mathbf{x}(t,\mathbf{X})$ – закон движения среды ($\mathbf{X}$, $\mathbf{x}$ – радиус-векторы точки среды в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно); точкой сверху обозначена полная производная по времени: $\dot{\psi} = \partial\psi(t,\mathbf{X})/\partial t \equiv \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$. Тензор (6) называется также вторым тензором напряжений Пиолы–Кирхгофа [10].

Термоупругость при больших деформациях

В случае термоупругого тела, термодинамическое состояние которого определяется абсолютной температурой θ и тензором конечной деформации $\mathbf{E}$, по уравнению (3) и формуле (5)

$$\begin{gathered}\mathrm{d}q^{ext} = \mathrm{d}u + \mathrm{d}a^{int} = \\ = \frac{\partial u(\theta,\mathbf{E})}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta + \left[\frac{\partial u(\theta,\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}} - \frac{1}{\rho_0}\mathbf{P}_\mathbf{E}(\theta,\mathbf{E})\right]:\mathrm{d}\mathbf{E},\end{gathered} \tag{7}$$

где $\mathrm{d}q^{ext} = \dot{q}^{ext}\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}a^{int} = \dot{a}^{int}\mathrm{d}t$ – элементарное (за время $\mathrm{d}t$) количество теплоты и элементарная работа внутренних сил соответственно. Величина

$$c_\mathbf{E}(\theta,\mathbf{E}) \equiv \left(\frac{\mathrm{d}q^{ext}}{\mathrm{d}\theta}\right)_\mathbf{E} = \frac{\partial u(\theta,\mathbf{E})}{\partial\theta} \tag{8}$$

представляет собой удельную (на единицу массы) теплоемкость при постоянной деформации, а величина

$$\mathbf{L}_\mathbf{E}(\theta,\mathbf{E}) = \frac{\partial u(\theta,\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}} - \mathbf{P}_\mathbf{E}(\theta,\mathbf{E}) \tag{9}$$

называется тензором скрытых теплот изотермической деформации [14, 15]. Благодаря этому формула (7) принимает вид

$$\mathrm{d}q^{ext} = c_\mathbf{E}(\theta,\mathbf{E})\mathrm{d}\theta + \mathbf{L}_\mathbf{E}(\theta,\mathbf{E}):\mathrm{d}\mathbf{E}. \tag{10}$$

Если взять стандартный образец некоторого материала и достаточно быстро подвергнуть его равномерной деформации $\mathrm{d}\mathbf{E}$ (например, растянуть), то тогда $\mathrm{d}q^{ext} = 0$ и температура образца в соответствии с (10) получит приращение

$$\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathbf{L}_\mathbf{E}(\theta,\mathbf{E}):\mathrm{d}\mathbf{E}}{c_\mathbf{E}(\theta,\mathbf{E})}. \tag{11}$$

Количественную оценку величины температурного эффекта (11), который впервые наблюдал в 1805 г. Джон Гаф [16], позволяют сделать результаты опытов на адиабатическое растяжение вулканизированной индийской резины, полученные в 1859 г. Джеймсом Джоулем [17]. Как видим (рис. 1), вслед за начальным понижением температуры до деформации немногим более 20% происходит повышение температуры на протяжении дальнейшего растяжения образца из вулканизированной индийской резины. Там же (см. рис. 1) приведены результаты опытов по адиабатическому растяжению образцов вулканизированного натурального каучука, которые получили в 1943 г. Джеймс и Гут и которые практически совпадают с результатами опытов Джоуля [18].

Термоупругость при малых деформациях

Рассмотрим случай малых упругих деформаций, чтобы дополнить количественные оценки, содержащиеся в [10]. В данном приближении

$$\mathbf{E} \cong \boldsymbol{\varepsilon}, \ \mathbf{P_E} \cong \mathbf{T}, \ \dot{a}^{int} \cong -\frac{1}{\rho_0}\mathbf{T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{F}-\mathbf{I}) + (\mathbf{F}-\mathbf{I})^T\right]$$

– тензор малой деформации (линейный тензор деформации), повсеместно используемый в классической теории упругости и пластичности. Для изотропного упругого тела по аналогии с формулами (8)–(10) имеем

$$c_\varepsilon \equiv \left(\frac{\mathrm{d}q^{ext}}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{L}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)_\theta - \frac{\mathbf{T}(\theta,\boldsymbol{\varepsilon})}{\rho_0} = \frac{\gamma_\theta\theta}{\rho_0}\mathbf{I}, \tag{12}$$

$$\mathrm{d}q^{ext} = c_\varepsilon\mathrm{d}\theta + \mathbf{L}_{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = c_\varepsilon\mathrm{d}\theta + \frac{\gamma_\theta\theta_0}{\rho_0}\mathrm{d}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}). \tag{13}$$

При записи (12), (13) принято во внимание, что [11, 15]

$$\mathbf{T} = \left[\lambda_e\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma_\theta(\theta-\theta_0) - p_0\right]\mathbf{I} + 2\mu_e\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{14}$$

$$u = u_0 + c_\varepsilon(T-T_0) + \left(\frac{\gamma_\theta}{\rho_0}T_0 - \frac{p_0}{\rho_0}\right)\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\lambda_e}{\rho_0}\frac{(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2}{2} + \frac{\mu_e}{\rho_0}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2), \tag{15}$$

где u_0, θ_0, p_0 – удельная внутренняя энергия, абсолютная температура и абсолютное давление (на границе тела) в отсчетной конфигурации (например, $u_0 = 0$, температура θ_0 комнатная, давление p_0 атмосферное);

$$\gamma_\theta = 3\alpha_\theta K_e, \ K_e = \lambda_e + \frac{2}{3}\mu_e \tag{16}$$

– коэффициент температурных напряжений и модуль объемного сжатия соответственно. В выражениях (14)–(16) полагается, что удельная теплоемкость при постоянной деформации c_ε, упругие постоянные Ламе λ_e, μ_e и температурный коэффициент линейного расширения α_θ являются константами. При адиабатическом деформировании, согласно (13), (16), приращение температуры определяется выражением

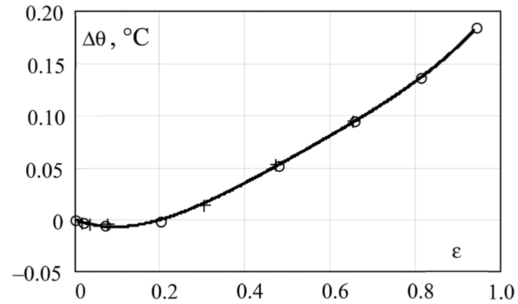

Рис. 1. Изменение температуры при адиабатическом растяжении: ○ – опыты Джоуля с вулканизированной индийской резиной [17]; + – опыты Джеймса и Гута с вулканизированным натуральным каучуком [18]; сплошная линия – усредненная (эмпирическая) кривая

$$\mathrm{d}\theta = -3\frac{\alpha_\theta K_e\theta}{\rho_0 c_\varepsilon}\mathrm{d}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}). \tag{17}$$

Интегрируя соотношение (17), будем иметь

$$\theta - \theta_0 = -\theta_0\left[1 - \exp\left(-3\frac{\alpha_\theta K_e}{\rho_0 c_\varepsilon}\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right]. \tag{18}$$

При одноосном растяжении

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon(1-2\nu), \tag{19}$$

где ν – коэффициент Пуассона; ε – относительное удлинение (по оси растяжения), которое должно лежать в области упругого деформирования. К примеру, при одноосном растяжении образцов из алюминия, меди и железа при температуре $\theta_0 = 298$ К и атмосферном давлении по формулам (18), (19) получаются графики (рис. 2), на которых точками отмечены границы области упругого деформирования, соответствующие деформации текучести при растяжении $\varepsilon_T = \sigma_T/E_e$ (ε_T – предел текучести, E_e – модуль Юнга). Значения материальных параметров брались в [19, 20]. Ординаты указанных точек дают количественную оценку максимальной абсолютной погрешности (по температуре), которая будет иметь место, если в выражении (13) пренебречь членом с тензором скрытых теплот изотермической деформации $\mathbf{L}_\varepsilon$.

Область применимости классического уравнения теплопроводности

Анализируя экспериментальные данные, относящиеся как к большим деформациям эластомеров (см. рис. 1), так и к малым деформациям ме-

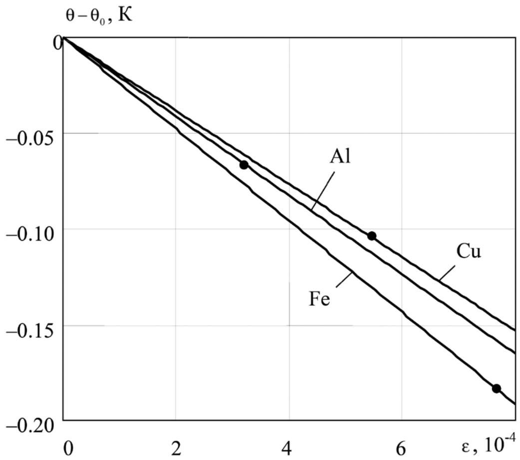

Рис. 2. Изменение температуры металлических образцов при одноосном адиабатическом растяжении: ● – граница области упругого деформирования

таллов (см. рис. 2), приходим к выводу, что для существующих конструкционных материалов эффект изменения температуры при адиабатическом деформировании крайне незначителен. Поэтому в уравнениях (10), (13) с достаточной для инженерной практики точностью можно пренебречь членом, содержащим тензор скрытых теплот изотермической деформации, по сравнению с членом, содержащим удельную теплоемкость при постоянной деформации. В том случае, когда в формулах (10), (13) тензор скрытых теплот изотермической деформации полагается равным нулю, отмеченный эффект изменения температуры при одноосном адиабатическом растяжении-сжатии не проявляется вовсе. Максимальная абсолютная погрешность от такого пренебрежения крайне мала по своей величине и, судя по рис. 1 и 2, не превышает 0.2 °C как при малых деформациях металлов, так при больших деформациях (до 100%) вулканизированной резины. Последнее является убедительным обоснованием того, почему уравнение (10) с достаточной для практики точностью можно представить в упрощенном виде:

$$c_{\mathbf{E}}\left(\theta,\mathbf{E}\right)\dot{\theta}\cong\dot{q}^{ext}. \qquad (20)$$

Если в правую часть (20) подставить первое выражение (4), придем к классическому уравнению теплопроводности твердых тел

$$\rho c_{\mathbf{E}}\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=-\nabla\cdot\mathbf{q}+\rho\beta, \qquad (21)$$

которое не содержит выражения для механической работы. Теперь не остается сомнений в том, что уравнение (21) применимо при любых деформациях упругих эластомеров, в том числе резинокордной оболочки пневматических элементов.

Замечание. Для полноты общей картины отметим ряд особенностей, характерных для эластомеров. При деформациях, значительно превышающих 100%, приращение температуры при адиабатическом растяжении эластомеров может достигать 14 °C [18]. Так например, для вулканизированного латексного каучука кривые $\Delta\theta-\varepsilon$ являются обратимыми вплоть до 230% относительного удлинения (рис. 3). После этой точки процесс деформирования перестает быть обратимым (кривые $\Delta\theta-\varepsilon$ при нагрузке и разгрузке не совпадают). Тепловыделение при разгрузке оказывается большим, чем тепловыделение при нагружении. Столь большое приращение температуры связывают со скрытой теплотой кристаллизации, которая накладывается на обратимый температурный эффект термоупругости [18]. Вследствие этого в правую часть уравнения (21) необходимо ввести мощность внутренних источников теплоты q_V, чтобы учесть теплоту фазовых превращений.

Более существенным (для прикладных расчетов) является тепловой эффект от действия внутренних сил вязкого сопротивления в эластомерах. Например, в процессах циклического деформирования полиуретана с частотой 0.5–20 Гц на тепловыделение идет 37–52% от работы, затраченной при нагружении [21]. Явная запись соответствующего выражения для мощности внутренних источников теплоты q_V, которую нужно ввести в уравнение теплопроводности (21) в качестве поправки, значительным образом зависит от вида математической модели, используемой для описания вязкоупругих свойств эластомеров.

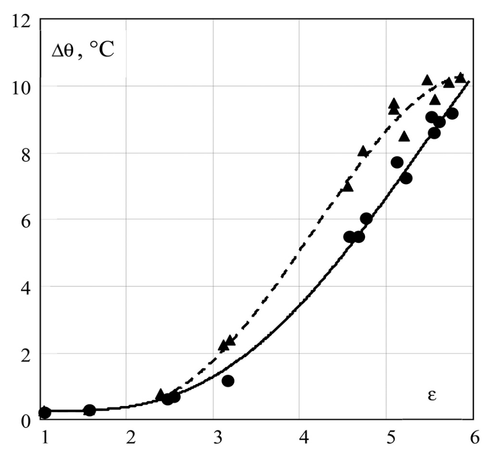

Рис. 3. Изменение температуры вулканизированного латексного каучука при адиабатическом растяжении [18]: сплошная линия – нагружение; пунктирная линия – разгрузка

Частная модель термоупругости

Рассмотрим частный случай термоупругого твердого тела, имеющий прикладное значение. Как правило, при проведении инженерных расчетов предполагается, что удельная теплоемкость твердых тел при постоянной деформации является постоянной величиной или зависит от температуры*. В качестве таковой берется изобарная или изохорная теплоемкости, разностью между которыми обычно пренебрегают. В данном случае, интегрируя выражение (8), находим

$$u(\theta,\mathbf{E}) = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} c_{\mathbf{E}}(\theta)\mathrm{d}\theta + u_{\mathbf{E}}(\mathbf{E}), \qquad (22)$$

где θ_0 – некоторая фиксированная температура (например, комнатная). Постоянную интегрирования $u_{\mathbf{E}}(\mathbf{E})$ можно назвать удельной (на единицу массы) энергией деформации, а величину

$$u_{\theta}(\theta) = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} c_{\mathbf{E}}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

можно назвать удельной тепловой энергией. Таким образом, если $c_{\mathbf{E}} = c_{\mathbf{E}}(\theta)$, удельная внутренняя энергия (22) складывается из удельной тепловой энергии, зависящей лишь от температуры, и удельной энергии, зависящей лишь от деформации:

$$u(\theta, \mathbf{E}) = u_{\theta}(\theta) + u_{\mathbf{E}}(\mathbf{E}).$$

Аналогичное разложение имеет место и для внутренней энергии индивидуального объема деформируемого твердого тела (2):

$$U = U_{\theta} + U_{\mathbf{E}}, \qquad (23)$$

где

$$U_{\theta} = \int\limits_{V} \rho u_{\theta}(\theta)\mathrm{d}V = \int\limits_{V_0} \rho_0 u_{\theta}(\theta)\mathrm{d}V_0,$$
$$U_{\mathbf{E}} = \int\limits_{V} \rho u_{\mathbf{E}}(\mathbf{E})\mathrm{d}V = \int\limits_{V_0} \rho_0 u_{\mathbf{E}}(\mathbf{E})\mathrm{d}V_0, \qquad (24)$$

– внутренняя тепловая энергия и внутренняя энергия деформации индивидуального объема тела соответственно. При записи (24) учтен закон сохранения массы

$$\rho\mathrm{d}V = \rho_0\mathrm{d}V_0,$$

где ρ – плотность элементарного объема тела $\mathrm{d}V$ в актуальной конфигурации V, который в отсчетной конфигурации V_0 занимал элементарный объем $\mathrm{d}V_0$ и имел плотность ρ_0.

Подстановка (23) в уравнение (1) приводит к равенству

$$\mathrm{d}U_{\theta}/\mathrm{d}t + \mathrm{d}U_{\mathbf{E}}/\mathrm{d}t = \dot{Q}^{ext} - \dot{A}^{int}. \qquad (25)$$

С другой стороны, на основании (24) со ссылкой на (2), (8), (21) получаем

$$\mathrm{d}U_{\theta}/\mathrm{d}t = \dot{Q}^{ext}. \qquad (26)$$

Вычитая (26) из (25), приходим к равенству

$$\mathrm{d}U_{\mathbf{E}}/\mathrm{d}t = -\dot{A}^{int}. \qquad (27)$$

Таким образом, для модели термоупругого твердого тела, у которого удельная теплоемкость при постоянной деформации (8) зависит от температуры, а тензор скрытых теплот изотермической деформации (9) равен нулю, уравнение переноса внутренней энергии (1) распадается на два самостоятельных уравнения, а именно: уравнение теплопроводности (26) и уравнение энергии деформации (27).

Замечание. Применительно к пневматическим элементам уравнение теплопроводности (26) удобно использовать при инженерных расчетах распределений температуры и тепловых потоков в резинокордной оболочке и металлической арматуре. Уравнение энергии деформации (27) может быть полезным при инженерных расчетах напряженно-деформированного состояния резинокордной оболочки. При этом расщепление уравнения (1) на два уравнения (26), (27) вовсе не означает, что распределения температуры и деформаций не связаны друг с другом. Деформирование тела приводит к изменению его размеров (например, изменению толщины стенок резинокордной оболочки), а изменение температуры влияет на значения упругих постоянных материала тела, входящих в выражение мощности внутренних сил (2).

Заключение

Анализ следствий из фундаментального закона изменения внутренней энергии показал, что при больших деформациях высокоэластичных материалов (например, вулканизированной резины) с достаточной для инженерной практики точностью можно пренебречь членом, содержащим тензор скрытых теплот изотермической деформации, по сравнению с членом, содержащим

* Теоретическая оценка зависимости удельной теплоемкости твердых тел $c_{\mathbf{E}}(\theta, \mathbf{E})$ от деформации содержится, например, в [15].

удельную теплоемкость при постоянной деформации. Максимальная абсолютная погрешность от такого пренебрежения крайне мала по своей величине и, судя по имеющимся экспериментальным данным по одноосному адиабатическому растяжению, не превышает 0.2 °С для приращений температуры как при больших деформациях (до 100%) вулканизированной резины, так и при малых деформациях металлов. Тем самым, получено обоснование того, что область применимости классического уравнения теплопроводности, не содержащего выражения для механической работы, распространяется не только на малые упругие деформации твердых тел, но и на большие упругие деформации высокоэластичных материалов. И только в случае неупругого деформирования твердых тел в классическом уравнении теплопроводности по необходимости присутствуют внутренние объемные источники теплоты, которые надлежащим образом учитывают мощность диссипативных сил внутреннего сопротивления.

Для модели термоупругого твердого тела, у которого удельная теплоемкость при постоянной деформации зависит от температуры, а тензор скрытых теплот изотермической деформации равен нулю, уравнение переноса внутренней энергии (первое начало термодинамики) расщепляется на два самостоятельных уравнения для тепловой энергии и энергии деформации. Подобные математические модели предназначены для расчета элементов конструкций из высокоэластичных материалов, в частности, пневматических элементов с резинокордной оболочкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зарубин В.С.** Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
2. **Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.** Теплопередача. М.: Энергия, 1975. 488 с.
3. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
4. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
5. **Кутателадзе С.С.** Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
6. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
7. **Новиков И.И., Воскресенский К.Д.** Прикладная термодинамика и теплопередача. М.: Атомиздат, 1977. 352 с.
8. **Исаев С.И., Кожинов И.А., Кофанов В.И и др.** Теория тепломассообмена / Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979. 495 с.
9. **Грин А., Адкинс Дж.** Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
10. **Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.** Математические модели термомеханики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 168 с.
11. **Ильюшин А.А.** Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
12. **Лурье А.И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
13. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
14. **Базаров И.П.** Термодинамика. М.: Высш. шк., 1991. 376 с.
15. **Корнеев С.А.** Понятия и основы локально-неравновесной термодинамики сплошной среды. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2009. 284 с.
16. **Белл Дж. Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2-х т. Т. 1. Малые деформации. М.: Наука, 1984. 597 с.
17. **Белл Дж. Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2-х т. Т. 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
18. **Трелоар Л.** Физика упругости каучука. М.: ИЛ, 1953. 241 с.
19. **Физические** величины: справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
20. **Францевич И.Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А.** Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Киев: Наукова думка, 1982. 287 с.
21. **Белкин А.Е., Даштиев И.З., Семенов В.К.** Математическая модель вязкоупругого поведения полиуретана при сжатии с умеренно высокими скоростями деформирования // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». 2014. № 6. С. 44–58.

On the issue of classical heat transfer equation applicability to highly elastic materials at large strains

V.S. Korneyev, S.A. Korneyev, V.V. Shalay

Omsk State Technical University, Omsk, 644050, Россия
e-mail: korneyev@omgtu.ru

A quantitative accuracy evaluation of the mathematical model describing the distribution of temperature fields and heat flux in structural elements from highly elastic materials with large strains based on the classical heat transfer equation, which does not contain expressions for mechanical work, was performed. The general approach of the nonlinear theory of thermoelasticity is applied with account for the fact that natural and artificial elastomers, widely applied in engineering (primarily rubber and rubber-cord composites), are capable of experiencing large elastic deformations, which contribution overlaps the mechanical effects associated with inelastic (viscoelastic) strain. A comparative analysis of direct consequences of the fundamental law of the internal energy change and experimental data obtained by Joule, James and Guth while elastomers testing on uniaxial adiabatic tension, revealed that large deformations (up to 100% and more) insignificantly affected the total thermal balance. If the term, containing the tensor of latent heats of the isothermal strain relative to the term, containing specific heat capacity at the constant strain, is neglected in the thermal balance equation, then maximum absolute error from this neglecting does not exceed 0.2 °C. This evaluation of thermodynamically reversible temperature effect is equally small by the order of magnitude, as for the metals at small strains in the elastic region. Along with this, the temperature effect from the thermodynamically irreversible process of the internal forces of viscous resistance mechanical work turning into a heat at the moderately high deformation velocities is not negligiblysmall, which is accounted for in classical thermal conductivity equation as a correction for the internal heat sources power.

It was noted, that for the widely used model of the thermoelastic body with temperature-dependent heat capacity, the internal energy transfer equation splits into two independent equations, i. e. separately for the thermal energy and for the deformation energy. In the theory of elastic shells, the equation for the thermal energy, which coincides with the classical heat conduction equation, serves to determine the temperature and heat fluxes distribution, and the equation for deformation energy is used for obtaining the governing relationships that relate the linear forces and moments to the bending strains and membrane deformations of the shell. The results obtained are of practical interest for structural elements calculation from highly elastic materials, in particular, while the studying pneumatic elements with the rubber-cord shell.

Keywords: heat conduction equation, elastomers, finite deformations.

REFERENCES

1. **Zarubin V. S.** *Inzhenernyye metody resheniya zadach teploprovodnosti* [Engineering methods for solving problems of heat conduction}. Moscow: Energoatomizdat, 1983. 328 p. In Russ.
2. **Isachenko V. P., Osipova V. A., Sukomel A. S.** *Teploperedacha* [Heat transfer]. Moscow: Energiya, 1975. 488 p. In Russ.
3. **Carslaw H. S., Jaeger J. C.** *Conduction of heat in solids*. Clarendon Press, Oxford. 1959. 517 pp.
4. **Kartashov E. M**. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvyordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. M.: Vysshayashkola, 2001. 552 p. In Russ.
5. **Kutateladze S. S.** *Osnovy teorii teploobmena* [Fundamentals of the theory of heat transfer]. Moscow: Atomizdat, 1979. 416 p.In Russ.
6. **Lykov A. V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshayashkola, 1967. 600 p. In Russ.
7. **Novikov I. I., Voskresenskiy K. D.** Prikladnaya termodinamika i teploperedacha [Applied thermodynamics and heat transfer]. Moscow: Atomizdat, 1977. 352 p.In Russ.
8. **Isaev S. I., Kozhinov I. A., Kofanov V. I., et al.** *Teoriya teplomassoobmena. Pod red. A. I. Leont'yeva* [Theory of heat and mass transfer. Red. A. I. Leont'yev]. Moscow: Vyssh. shk., 1979. 495 p. In Russ.
9. **Green A. E., Adkins J. E.** *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 1960. 348 p.
10. **Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N.** *Mathematical models of thermomechanics* [Matematicheskiye modeli termomekhaniki]. Moscow: FIZMATLIT, 2002. 168 p.In Russ.
11. **Il'yushin A. A.** *Mechanics of continua* [Mekhanika sploshnoy sredy]. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1978. 287 p. In Russ.
12. **Lur'ye A. I.** *Nonlinear theory of elasticity* [Nelineynaya teoriya uprugosti]. Moscow: Nauka, 1980. 512 p. In Russ.
13. **Truesdell C.** *A first course in rational continuum mechanics*. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 1972. 417 pp.
14. **Bazarov I. P.** *Termodinamika* [Thermodynamics]. Moscow: Vyssh. shk., 1991. 376 s. In Russ.
15. **Korneyev S.A.** *Ponyatiya i osnovy lokal'no-neravnovesnoy termodinamiki sploshnoy sredy* [Concepts and basics of locally nonequilibrium thermodynamics of continuum]. Omsk: Izd-voOmGTU, 2009. 284 s. In Russ.
16. **Bell J. F.** *Eksperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemykh tverdykh tel. T. 1. Malyedeformatsii* [The Experimental Foundations of Solid Mechanics. Vol. I. Small deformations]. Moscow: Nauka, 1984. 597 p. In Russ.
17. **Bell J. F.** *Eksperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemykh tverdykh tel. T. 2. Konechnye deformatsii* [The Experimental Foundations of Solid Mechanics. Vol. II. Finitedeformations]. Moscow: Nauka, 1984. 432 p. In Russ.
18. **Treloar L.** The physics of rubber elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1949. 328 p.
19. ***Fizicheskiye*** *velichiny: spravochnik. Pod red. I. S. Grigor'yeva, E. Z. Meylikhova* [Physical quantities: Handbook. Ed. I. S. Grigorieva, E. Z. Meilikhova]. Moscow: Energoatomizdat, 1991. 1232 p. In Russ.
20. **Frantsevich I. N., Voronov F. F., Bakuta S. A.** *Uprugiye postoyannye moduli uprugosti metallov i nemetallov* [Elastic constants and moduli of elasticity of metals and nonmetals]. Kiyev: Naukova dumka, 1982. 287 p. In Russ.
21. **Belkin A. E., Dashtiyev I. Z., Semenov V. K.** Matematicheskaya model' vyazkouprugogo povedeniya poliuretana pri szhatii s umerenno vysokimi skorostyami deformirovaniya [Mathematical model of viscoelastic behavior of polyurethane under compression with moderately high strain rates]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. «Mashinostroyeniye» – Bulletin MGTU them. N. E. Bauman. Ser. «Engineering»*, 2014, no. 6, pp. 44–58. In Russ.