УДК 621.396:621.391

Байесовская оценка доплеровского смещения с сокращением размерности данных в телекоммуникационных каналах

Латышев В. В.

Рассматриваются возможности, которые появляются при сокращении размерности наблюдаемых данных в задачах оценивания параметров сигналов известной формы в телекоммуникационных каналах передачи информации с кодовым уплотнением каналов. В качестве критерия качества используется минимум потерь фишеровской информации о доплеровском смещении спектра сигнала, от которой зависит точность оценки. Это позволяет сконцентрировать эту информацию в векторной статистике небольшой размерности. Показано, что за счет этого можно значительно уменьшить объем вычислений при практической реализации байесовских оценок.

Ключевые слова: фишеровская информация; оценка доплеровского смещения; граница Крамера-Рао; сокращение размерности.

1. Введение

Байесовские оценки параметров сигналов обладают очень привлекательным экстремальным свойством – при квадратичной функции штрафов они гарантируют минимальную среднеквадратичную ошибку. В тоже время они редко используются на практике из-за нескольких проблем. Во-первых, обычно отсутствует информация об априорном законе распределения вероятностей оцениваемого параметра, которая используется в алгоритме оценивания. Однако эту проблему можно несколько ослабить, если положить неизвестное распределение равномерным в некотором интервале, который часто можно ограничить исходя из разумных соображений. Например, при оценке фазы сигнала типичным является соглашение, что она меняется в диапазоне от 0 до 2π. Другим примером является доплеровское смещение частоты, которое появляется в телекоммуникационных каналах передачи информации с кодовым уплотнением каналов при излучении или приеме сигналов движущимся объектом. Интервал изменений этого параметра можно оценить исходя из предельных скоростей известных наземных или воздушных движущихся целей. Допущение о равномерном законе распределения позволяет использовать байесовский подход, по-прежнему обеспечивая минимальную ошибку в этом частном случае, и несколько худшие результаты, если реальное распределение будет отличаться от него. Заметим, что такой вариант часто используется в качестве точки отсчета при характеристике свойств различных эвристических оценок, вводимых из-за простоты их практической реализации.

К сожалению, другими, более серьезными недостатками байесовских оценок, ограничивающих их практическое применение, являются сложность аппаратной реализации в аналоговом варианте, или большой объем вычислений при цифровой обработке. Если проблема аналогового варианта трудно поддается разрешению, то объем цифровых операций может быть существенно уменьшен за счет сокращения размерности обрабатываемой выборки.

Сокращение размерности данных часто используется как предварительный этап обработки предъявляемых наблюдений для упрощения алгоритмов выделения информации. Это подразумевает нахождение подходящего компактного представления исходных данных большой размерности. При работе с данными малой размерности такие задачи, как классификация и распознавание, часто выполняются более аккуратно. Как следствие, в итоге получаются легко интерпретируемые результаты со значительно меньшими вычислительными затратами.

С точки зрения математики рассматриваемая проблема заключается в следующем: для данного N-мерного случайного вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$ требуется найти малоразмерное представление $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ с $m < N$, которое сохраняет информационное содержание исходных данных в соответствии с каким-либо критерием.

Среди линейных методов сокращения размерности наилучшим в смысле минимальной среднеквадратической ошибки аппроксимации является метод главных компонент (МГК) или преобразование Карунена - Лоэва [1,2,3]. Фактически МГК дает компактное малоразмерное представление исходных данных. В общем случае число главных компонент совпадает с размерностью исходного вектора $\mathbf{x}$. Но для многих практических задач несколько первых главных компонент характеризуют большую долю изменений сигнала, тогда как остальные могут быть отброшены без существенных потерь информации.

Здесь рассматривается иной подход к сокращению размерности, приспособленный к задачам оценивания параметров сигналов известной формы, как это имеет место в каналах передачи информации с кодовым уплотнением. При этом используется аналог метода главных компонент, но с другим критерием точности представления, который напрямую связан с особенностями именно задач оценивания параметров сигналов. Оценка доплеровского смещения выбрана в качестве примера, чтобы продемонстрировать возможность приближения байесовского подхода к практическому применению.

2.Сокращение размерности данных

Проблема оценивания или измерения, которая рассматривается здесь, может быть сформулирована следующим образом: сигнал известной формы $s(t,\theta)$, $0 \le t \le T$ наблюдается в присутствии аддитивного гауссовского шума $w(t)$ с нулевым средним: $x(t) = s(t,\theta) + w(t)$. Интересующий нас в общем случае параметр θ является случайным с априорной плотностью распределения вероятностей $p(\theta)$. Предполагается, что функция $p(\theta)$ известна или может быть задана, например, виде равномерного распределения. Конкретная величина θ должна оцениваться по наблюдению. В общем случае параметр θ может быть связан с сигналом нелинейно.

Будем считать, что в результате дискретизации $x(t)$ пространство наблюдений соответствует набору из N дискретных значений наблюдаемого сигнала: $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Таким образом, каждый набор может рассматриваться как точка в N-мерном пространстве и обозначаться вектором-столбцом $\mathbf{x} = \mathbf{s}(\theta) + \mathbf{w}$, где $\mathbf{s}(\theta) \in R^N$ и $\mathbf{w} \in R^N$ являются N-мерными векторами-столбцами сигнала и шума соответственно. Вектор $\mathbf{w}$ имеет несингулярную ковариационную матрицу $\mathbf{R}_w$. Тогда плотность распределения вероятностей вектора $\mathbf{x}$:

$$p(\mathbf{x} \mid \theta) = \left((2\pi)^N |\mathbf{R}_w|\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{s}(\theta))^T \mathbf{R}_w^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{s}(\theta))\right]. \qquad (1)$$

Для получения m-мерного вектора сокращенной размерности $\mathbf{y}$ с $m < N$ используем линейное преобразование $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ с матрицей преобразования $\mathbf{C}$. Нужно найти такую матрицу $\mathbf{C}$, которая гарантирует минимальные потери в точности оценивания параметра θ в том случае, если для его оценки будет использоваться вектор $\mathbf{y}$. В дополнение к этим требованиям необходимо найти представление вектора $\mathbf{x}$ в новой координатной системе, в которой компоненты вектора сокращенной размерности являются статистически независимыми переменными: $\mathbf{C}\mathbf{R}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ - единичная диагональная матрица. Удобно записать матрицу преобразования в виде $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{R}_w^{-1/2}$. Здесь $\mathbf{R}_w^{-1/2}$ - симметрический квадратный корень из $\mathbf{R}_w^{-1}$, т.е. $\mathbf{R}_w^{-1/2}\mathbf{R}_w^{-1/2} = \mathbf{R}_w^{-1}$, $\mathbf{A}^T = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$. Тогда имеем

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{R}_w^{-1/2}\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \in R^m. \tag{2}$$

Приступая к решению этой задачи, напомним, что дисперсия любой несмещенной оценки произвольного параметра θ определяется неравенством Крамера - Рао [3]:

$$\sigma_\theta^2 \ge \left(\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} \mid \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right)^{-1} = \left(- \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x} \mid \theta)}{\partial \theta^2} \right)^{-1}. \tag{3}$$

Неравенство определено, если входящие в него производные существуют и абсолютно интегрируемы. Выражения, заключенные в круглые скобки, часто называют фишеровской информацией относительно параметра θ [4]:

$$I(\theta) = \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} \mid \theta)}{\partial \theta} \right]^2 = - \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x} \mid \theta)}{\partial \theta^2}. \tag{4}$$

Подставляя (1) в (3), имеем:

$$I_N(\theta) = (\mathbf{s}'(\theta))^* \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{s}'(\theta). \tag{5}$$

Здесь индекс N используется для того, чтобы отличать размерность исходного вектора наблюдений от редуцированной размерности m, $\mathbf{s}'(\theta) = \left(\frac{\partial s_1(\theta)}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial s_N(\theta)}{\partial \theta} \right)^T$ - вектор-столбец производных, звездочка означает транспонирование с одновременным комплексным сопряжением.

Фишеровская информация, содержащаяся в векторе $\mathbf{y}$ [5]:

$$I_m(\theta) = \sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{a}_k^* \mathbf{R}_w^{-1/2} \mathbf{s}'(\theta) \right]^2 .$$

В случае $m < N$ потери фишеровской информации составляют величину:

$$\Delta I(\theta) = I_N(\theta) - I_m(\theta) = (\mathbf{s}'(\theta))^* \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{s}'(\theta) - \sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{a}_k^* \mathbf{R}_w^{-1/2} \mathbf{s}'(\theta) \right]^2 .$$

В общем случае она зависит от конкретного значения θ. Среднее значение потерь фишеровской информации:

$$\Delta I = E_\theta \left\{ (\mathbf{s}'(\theta))^T \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{s}'(\theta) - \sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{a}_k^* \mathbf{R}_w^{-1/2} \mathbf{s}'(\theta) \right]^2 \right\}, \tag{6}$$

где E_θ обозначает усреднение по случайной переменной θ. Необходима такая матрица преобразования (2), которая обеспечит минимальную величину ΔI.

Покажем, что линейное преобразование с матрицей $\mathbf{AR}_w^{-1/2}$ обеспечивает минимальное значение средних потерь фишеровской информации ΔI, если векторы столбцы $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$ матрицы $\mathbf{A}^T$ являются ортонормированными собственными векторами матрицы

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_w^{-1/2} E_\theta \left\{\mathbf{s}'(\theta)(\mathbf{s}'(\theta))^*\right\} \mathbf{R}_w^{-1/2}, \tag{7}$$

соответствующими m наибольшим собственным значениям. Кроме того,

$$\Delta I_{\min} = \lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_N, \tag{8}$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$ - ранжированные в порядке убывания собственные значения $\mathbf{B}$.

Перепишем (3) в следующем виде:

$$\Delta I = E_\theta \left\{(\mathbf{s}'(\theta))^* \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{s}'(\theta)\right\} - E_\theta \left\{\sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{a}_k^* \mathbf{R}_w^{-1/2} \mathbf{s}'(\theta)\right]^2\right\}$$

Первое слагаемое не зависит от векторов $\mathbf{a}_k$. Следовательно, минимальное значение ΔI получается в том случае, если вычитаемое максимально. Обозначим его $H(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)$. Меняя порядок суммирования и вычисления математического ожидания, а так же учитывая очевидное равенство

$$\left[\mathbf{a}_k^* \mathbf{R}_w^{-1/2} \mathbf{s}'(\theta)\right]^2 = \mathbf{a}_k^* \mathbf{R}_w^{-1/2} \mathbf{s}'(\theta)(\mathbf{s}'(\theta))^* \mathbf{R}_w^{-1/2} \mathbf{a}_k,$$

имеем:

$$H(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{a}_k^T \left[\mathbf{R}_w^{-1/2} E_\theta \left\{\mathbf{s}'(\theta)(\mathbf{s}'(\theta))^*\right\} \mathbf{R}_w^{-1/2}\right] \mathbf{a}_k.$$

Выражение в квадратных скобках есть симметричная матрица:

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_w^{-1/2} E_\theta \left\{\mathbf{s}'(\theta)(\mathbf{s}'(\theta))^*\right\} \mathbf{R}_w^{-1/2}.$$

Учитывая теорему о собственных векторах и собственных значениях [2], получаем, что величина $H(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)$ будет максимальна в том случае, если $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$ являются собственными векторами матрицы $\mathbf{B}$, соответствующими m наибольшим собственным значениям $\lambda_1 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_m$ и

$$\max H(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k.$$

Из равенства $\mathbf{R}_w^{-1/2} \mathbf{R}_w^{-1/2} = \mathbf{R}_w^{-1}$ следует, что след матрицы $\mathbf{B}$ может быть выражен в следующем виде:

$$trB = E_\theta\left\{(\mathbf{s}'(\theta))^* \mathbf{R}_w^{-1}\mathbf{s}'(\theta)\right\}.$$

С другой стороны, $trB = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k$. Отсюда получаем

$$\Delta I_{\min} = \sum_{k=m+1}^{N}\lambda_k .$$

Таким образом, потери фишеровской информации определяются суммой собственных значений, соответствующих отброшенным членам ортогонального ряда.

Основываясь на этих результатах, можно утверждать, что подпространство исходного пространства наблюдений, порожденное векторами столбцами $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$, представляет собой подпространство с максимальным содержанием фишеровской информации относительно параметра θ среди любых других подпространств фиксированной размерности m. В связи с такими свойствами вектор $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{R}_w^{-1/2}\mathbf{x}$, можно рассматривать как приближенную векторную достаточную статистику [6]. Заметим, что при независимых отсчетных значениях вектора наблюдений $\mathbf{x}$ ковариационная матрица $\mathbf{R}_w$ является диагональной и матрица преобразования $\mathbf{C}$ с точностью до константы совпадает с матрицей $\mathbf{A}^T$.

3.Байесовская оценка доплеровского смещения частоты

Для иллюстрации возможного эффекта от сокращения размерности в задачах оценивания параметров сигналов рассмотрим байесовскую оценку доплеровского смещения частоты f_D . Будем использовать следующую модель:

$$x(t) = s(t,\, f_D) + w(t). \tag{9}$$

Здесь $s(t,\, f_D)$ - сигнал известной формы, наблюдаемый в присутствии аддитивного гауссовского шума $w(t)$ с независимыми отсчетами и с нулевым средним и дисперсией σ_w^2. Момент прихода сигнала известен, необходимо оценить доплеровскую частоту f_D . Далее используется распространенное предположение, заключающееся в том, что доплеровский эффект из-за перемещения излучающего или отражающего объекта моделируется смещением спектра сигнала. Такая модель является узкополосной аппроксимацией реального сжатия или растяжения спектра вдоль частотной оси.

Пусть величина f_D является случайным параметром с равномерной априорной плотностью распределения вероятностей $p_0(f_D)$, $f_D \in [-F;\, F]$. Тогда можно использовать байесовскую процедуру оценивания. С точки зрения практического применения она достаточно сложна и требует большого объема вычислений при цифровой реализации. Покажем, что сокращение размерности данных позволяет существенно уменьшить этот объем. Для конкретности будем использовать квадратичную функцию стоимости, что гарантирует минимальную дисперсию оценки [3].

Из представленных выше результатов следует, что при сокращении размерности наблюдаемых данных необходимо в максимальной степени обеспечить сохранение фишеровской информации о доплеровском смещении частоты.

Для количественной иллюстрации воспользуемся тестовым примером из [3]:

$$s(t,\, f_D) = \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)\right)\cos\left(2\pi\left(f_0 + f_D\right)t\right), \quad 0 \le t \le T. \tag{10}$$

При дискретном представлении с независимыми отсчетными значениями $x_k,\, k = 1, \ldots, N$ имеем вектор-столбец $\mathbf{x} = \mathbf{s}\left(f_D\right) + \mathbf{w} \in R^N$ с диагональной ковариационной матрицей $\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$.

Байесовская оценка основывается на вычислении апостериорной плотности распределения вероятностей:

$$p\left(f_D \,|\, \mathbf{x}\right) = \frac{p\left(\mathbf{x} \,|\, f_D\right) p_0\left(f_D\right)}{\int\limits_{-F}^{F} p\left(\mathbf{x} \,|\, f_D\right) p_0\left(f_D\right) df_D}. \tag{11}$$

Сама оценка представляет собой апостериорное среднее [3]:

$$f_D(\mathbf{x}) = \int\limits_{-F}^{F} f_D\, p\left(f_D \,|\, \mathbf{x}\right) df_D. \tag{12}$$

Упрощение байесовской оценки может быть достигнуто с использованием линейной матрицы преобразования $\mathbf{A}$, обеспечивающей минимальные потери фишеровской информации о доплеровском смещении. В соответствии с (7) векторы столбцы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ матрицы $\mathbf{A}^T$ являются ортонормированными собственными векторами матрицы

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sigma^2} E_D\left\{\mathbf{s}'\left(f_D\right)\left(\mathbf{s}'\left(f_D\right)\right)^*\right\},$$

соответствующими m наибольшим собственным значениям. Здесь $\mathbf{s}'\left(f_D\right)$ - вектор-столбец производных сигнала по переменной f_D. Если для оценки вместо исходных данных используется вектор $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in R^m$, байесовская оценка определяется теми же соотношениями (11) – (12), где $\mathbf{x}$ заменяется $\mathbf{y}$.

Результаты компьютерного моделирования байесовской оценки f_D в зависимости от отношения сигнал/шум (осш) показаны на рис.1 одновременно с рассчитанной границей Крамера–Рао (ГКР). В процессе моделирования использовались нормированная длительность сигнала $T = 1$, $N = 101$, f_D - случайная величина с равномерным априорным распределением на промежутке $f_D \in [-0.4; 0.4]$. Среднеквадратические ошибки (СКО) для всех алгоритмов рассчитывались на основе метода Монте-Карло с 10000 повторением независимых испытаний для различных отношений сигнал/шум.

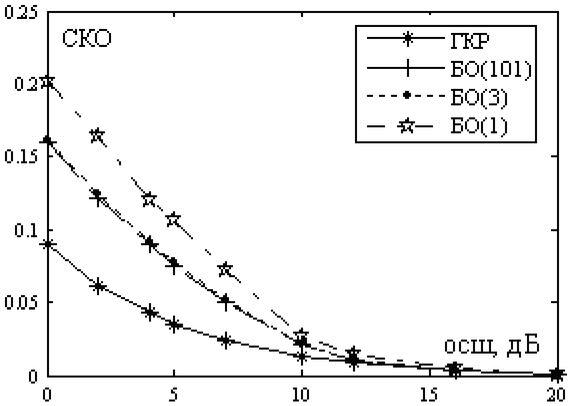

Рис.1. СКО байесовских оценок с использованием исходного 101-мерного вектора наблюдения и векторов сокращенной размерности

Линия БО(101) соответствует байесовской оценке, использующей исходный 101-мерный вектор $\mathbf{x}$. Другие линии БО(1) и БО(3) соответствуют оценкам доплеровского смещения частоты на основе одномерного и 3-мерного векторов сокращенной размерности, соответственно. Как видно из рисунка, 101-мерный и 3-мерный векторы эквивалентны с точки зрения получаемой точности оценивания. В то же время вычислительная сложность при сокращении размерности со 101 до 3 уменьшается более чем на порядок величины [7]. Сохранение точности оценивания байесовским алгоритмом является следствием сохранения фишеровской информации о доплеровском смещении. Дальнейшее сокращение размерности от 3 до 1 приводит уже к ощутимым потерям в точности.

Обратим внимание на тот факт, что, хотя байесовская оценка с квадратичной функцией потерь дает минимальную ошибку, тем не менее из анализа рисунка видно, что точность оценивания даже и в этом случае не достигает границы Крамера – Рао. Это вполне согласуется с основными положениями теории оценивания [3], из которых следует, что байесовская оценка является асимптотически эффективной в нелинейных задачах.

4.Заключение

Рассмотрено разбиение исходного сигнального пространства на подпространства с позиций их фишеровского информационного содержания, от которого зависит точность оценивания. В основе представленного подхода лежит решение задачи сокращения размерности данных при оценивании параметров сигналов. Введение критерия, нацеленного на сохранение точности оценивания при сокращении размерности, позволяет выделять подпространства исходного сигнального пространства, в которых концентрируется фишеровская информация о том или ином параметре.

Моделирование с использованием тестового сигнала позволило проиллюстрировать эффективность такого подхода в значительном уменьшении вычислительной сложности байесовской оценки доплеровского смещения частоты, что упрощает его практическую реализацию.

Библиографический список

1. Jolliffe I. T. Principal Component Analysis. Springer-Verlag, Berlin 1986, 486 p.
2. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. – М.: Наука, 1979, 368 с.
3. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. В 3 томах. – М.: Советское радио, 1977, 744 с.
4. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979, 528 с.
5. Латышев В.В. Сокращение размерности в задачах оценивания параметров // Радиотехника и электроника. – 1988. - №3. - т. 33. - с. 635-637.
6. Леман Э., Теория точечного оценивания. – М.: Наука,, 1991, 448 с.
7. Дунин Д. С. Байесовская оценка доплеровского смещения частоты при мешающем параметре с сокращением размерности данных // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2009. - №8. - т. 7. - с. 10-16.

Сведения об авторе

Латышев Вячеслав Васильевич, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета) д.т.н.,

тел. (495) 954-44-00, 8-916-610-78-42, e-mail: lvv@mai.ru