

УДК 629.735.33

О возможности использования нелинейных зависимостей подъемной силы от угла атаки в теории несущей линии

Никольский А. А.

*Центральный аэрогидродинамический институт, ЦАГИ,
ул. Жуковского, 1, Жуковский, Московская область, 140180, Россия*

e-mail: anikolskii@mail.ru

Аннотация

Введено понятие критерия допустимости, позволяющее с приемлемой точностью удовлетворять гипотезе плоских сечений и находить приближенное решение прямой задачи определения крыльевой зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки по известной нелинейной профильной зависимости. Построен метод решения обратной задачи определения профильной зависимости по известной крыльевой зависимости для доверительного диапазона углов атаки крыла.

Ключевые слова: профиль; крыло; несущая линия

При расчете аэродинамических характеристик (АДХ) несущих винтов из-за сложности задачи часто применяют упрощенный подход, основанный на гипотезе плоских сечений, использующий АДХ профилей, составляющих профильный набор лопастей. В свою очередь АДХ вертолетных профилей получают методом пересчета полученных в эксперименте АДХ крыльев, испытанных в АДТ. В качестве стандартного используют метод пересчета, основанный на гипотезе плоских

сечений и теории несущей линии Прандтля. Недостатком стандартного метода пересчета является то, что он основан на формулах справедливых для линейных профильных зависимостей подъемной силы от угла атаки.

Единственный известный в литературе подход, позволяющий приближенно связать АДХ профиля и крыла, в сечениях которого расположен этот профиль- это теория крыла большого удлинения, основанная на теории несущей линии и гипотезе плоских сечений. Известны работы [1-5], в которых задачу определения подъемной силы крыла (прямую задачу) для нелинейных профильных зависимостей подъемной силы от угла атаки решают на основе модифицированной теории несущей линии. Для определения профильной зависимости по известной крыльевой зависимости приходится решать более сложную обратную задачу. Известна работа [5], в которой наряду со стандартным методом решения прямой задачи описана также некоторая процедура решения обратной задачи. Данные этой работы использованы для сравнения и обсуждения результатов.

Метод решения прямой задачи

Рассмотрим сначала прямую задачу определения коэффициента подъемной силы крыла $c_{y\text{wing}i}$ при заданном угле атаки крыла $\alpha_{\text{wing}i}$ по известной зависимости коэффициента подъемной силы профиля от угла атаки профиля $c_{y,p}(\alpha)$. Здесь и далее $i = 1, \dots, K$, K - число рассматриваемых углов атаки,

К основным положениям теории крыла большого удлинения можно отнести следующие:

1. Малый параметр $\eta = 1 / \lambda$ позволяет использовать асимптотические разложения и свести пространственную задачу к двумерной, граничные условия которой определяются из дополнительных соображений (пункт 2).

2. Течение описывается линейными уравнениями и углы атаки не велики (вихри лежат в плоскости параллельной набегающему потоку). Для таких течений индуктивные скорости в поперечном сечении крыла можно вычислить как суперпозицию скоростей от полубесконечных вихревых линий используя формулу Био-Савара. Для линейных профильных зависимостей $c_{yp}(\alpha)$ наблюдается удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных. Прямой перенос формул справедливых для линейной теории на случай нелинейных профильных зависимостей приводит к значительному расхождению с экспериментом. Поэтому, как и в работах [1-5], будем решать прямую задачу для нелинейных профильных зависимостей $c_{yp}(\alpha)$ на основе модифицированной теории несущей линии.

Следуя классической теории несущей линии и формуле Жуковского, распределение углов атаки профиля вдоль размаха крыла запишем в следующем виде:

$$\alpha(\theta; \alpha_{wingj}) = \alpha_{wingi} - \frac{1}{8\pi\lambda} \int_0^\pi \frac{dc_y/d\theta}{\theta' - \theta} d\theta. \quad (1)$$

Здесь z -отнесенная к полуразмаху крыла координата вдоль размаха крыла, $\theta = -\arccos z$, α - угол атаки профиля $c_y(\theta; \alpha_{wingj})$ - распределение коэффициента подъемной силы крыла по размаху при заданном угле атаки крыла α_{wingi} . Здесь и

далее под углом атаки понимается аэродинамический угол атаки. Использование формулы Био- Савара для вязких течений можно считать оправданным в той же мере, что и для течений идеальной жидкости в зоне слабого вязко- невязкого взаимодействия, где течение вне пограничного слоя можно считать потенциальным. В нашем случае исходные предположения теории будут заведомо нарушаться при больших углах атаки крыла, а также при больших значениях числа M , когда уравнения движения становятся нелинейными. В случае линейной профильной зависимости уравнение (1) становится линейным интегро-дифференциальным уравнением, решение которого существует и единственно. В нелинейном случае большинство авторов сводят задачу к системе нелинейных уравнений. В ходе решения приходится тем или иным образом вычислять сингулярный интеграл. Чтобы избежать этого, используем далее известный альтернативный подход. Следуя Треффтцу [6], представим функцию $c_y(\theta; \alpha_{wingj})$ в виде конечного ряда Фурье:

$$c_y(\theta; \alpha_{wingj}) = 4\lambda \sum_{l=1}^L A_m \sin m\theta . \quad (2)$$

Здесь и далее L - число членов ряда Фурье, $m = 2l + 1$. Тогда выражение для распределения углов атаки профиля примет вид:

$$\alpha_{wingi} = \sum_{l=1}^L A_m n \sin m\theta / \sin \theta . \quad (3)$$

Таким образом, решение прямой задачи сводим к определению коэффициентов Фурье. Для линейной профильной зависимости $c_{y,p}(\alpha)$ соотношения (2), (3) приводят к системе линейных уравнений относительно коэффициентов Фурье. В общем случае соотношения (2), (3) есть не что иное, как параметрическое

представление функции $c_{yp}(\alpha)$ в интервале $0 < \alpha < \alpha_{wingi}$. Совершенно понятно, что они определяют некоторый ограниченный класс функций (будем называть их допустимыми) и не всякая функция $c_{yp}(\alpha)$ может быть представлена в таком виде.

Отсюда следует, что интегральное соотношение (1) вообще говоря, не справедливо для произвольно заданной функции $c_{yp}(\alpha)$. Исключением, конечно, является классическая теория Прандтля, когда функция $c_{yp}(\alpha)$ линейна, а коэффициенты A_m определяются из решения системы линейных уравнений. Итак, соотношения (2), (3) дают точное (в рамках принятой матмодели) решение прямой задачи и определяют допустимую функцию $c_y(\alpha)$. Поскольку рассматривается нелинейная задача, и ее решение будет находиться в ходе итерационного процесса, важно определить критерий, по которому можно судить о существовании и точности найденного решения. Если отличие исходной функции $c_{yp}(\alpha)$ от допустимой функции $c_y(\alpha)$ не велико, можно говорить о том, что найдено приближенное решение прямой задачи. Если при углах атаки крыла больших некоторого $\alpha_{winglim}$ это отличие велико, можно говорить о нарушении закона плоских сечений. В этом диапазоне решение не существует.

Прямая задача аппроксимации

Поэтому переформулируем исходную задачу следующим образом: определить доверительный диапазон углов атаки крыла $\alpha_{wing} < \alpha_{winglim}$, в котором можно определить подъемную силу крыла на основе интегрального соотношения (1) или,

что более удобно уравнений (2), (3). Под доверительным диапазоном будем понимать такой диапазон углов атаки крыла, в котором закон плоских сечений соблюдается с приемлемой точностью. Такую задачу будем называть прямой задачей аппроксимации (DAP).

Пусть при заданном угле атаки крыла α_{wingi} зависимости $c_{y0i}(\theta)$, $\alpha_{0i}(\theta)$ определяют допустимую функцию, аппроксимирующую функцию $c_{yp}(\alpha)$ в диапазоне $0 \leq \alpha \leq \alpha_{maxi}$. Здесь и далее $i = 1, \dots, K$, K - число рассматриваемых углов атаки, $j = 1, \dots, M$, M - число контрольных сечений вдоль полуразмаха крыла. Запишем критерий допустимости, определяющий отличие решения DAP от исходной функции $c_{yp}(\alpha)$:

$$\delta_i = \sqrt{\sum_{j=1}^M (c_{y0i}(\alpha_j) - c_{yp}(\alpha_j))^2} / M. \quad (4)$$

Для линейной задачи минимальная достижимая величина этого критерия $\delta_{i\min}$ равна нулю, а для нелинейной, как будет показано далее, возрастает при больших углах атаки крыла. Доверительный диапазон углов атаки крыла определим из соотношения $\delta_i < \varepsilon$. Параметр ε можно трактовать как предельно допустимую величину отклонения точных допустимых решений, полученных исходя из гипотезы плоских сечений, от заданной функции $c_{yp}(\alpha)$. Ясно, что для того чтобы решение задачи аппроксимации имело смысл, величина ε должна быть достаточно малой. В то же время, поскольку предполагается использовать рассматриваемую модель для пересчета произвольной комбинации крыло- профиль, величина ε должна быть

универсальной. Возможность такого выбора может быть определена только в ходе обширного численного эксперимента.

Для нахождения допустимых функций $c_{y_{0i}}(\theta)$, $\alpha_{0i}(\theta)$, позволяющих аппроксимировать исходную зависимость $c_{yp}(\alpha)$, построим метод последовательных приближений. Поскольку далее рассуждения ведутся для фиксированного значения α_{wing} , индекс i для краткости опустим. Процесс последовательных приближений строится следующих образом.

Пусть на N -ой итерации известна допустимая функция $c_{y_0}^{(N)}(\theta_j)$, тогда разлагая ее в ряд Фурье (2), находим коэффициенты A_m и по формуле (3) определяем $\alpha_o^{(N)}(\theta_j)$.

Далее, интерполируем исходную зависимость $c_{yp}(\alpha_o^{(N)}(\theta_j))$ и по формуле (4) определяем критерий δ_i . Процесс ведем до достижения значения $\delta_{i_{min}}$, которое заранее неизвестно и зависит от того насколько сильно исходная функция $c_{yp}(\alpha)$ отличается от допустимой функции.

Следующее приближение определяем по релаксационной формуле:

$$c_{y_0}^{(N+1)}(\theta_j) = c_{y_0}^{(N)}(\theta_j) \cdot \omega + (1 - \omega) c_{yp}(\alpha_o^{(N)}(\theta_j))$$

Численные эксперименты показали, что там, где зависимость $c_y(\alpha)$ нелинейная, для достижения возможного минимального критерия $\delta_{i_{min}}$ необходимо $\omega \approx 0.995$, т.е. процедура очень неустойчива. По этой же причине для работоспособности метода необходимо наличие хорошего начального приближения $c_{y_0}^{(0)}$.

Для нахождения $c_{y_0}^{(0)}$ аппроксимируем исходную зависимость $c_{yp}(\alpha)$ с помощью кусочно-линейной функции:

$$c_{y_0}(\theta_{j+1}) = c_{y_0}(\theta_j) + c_{y_0}^\alpha(\theta_j)(\alpha_0(\theta_{j+1}) - \alpha_0(\theta_j)) \quad (5)$$

и построим дополнительный метод последовательных приближений.

Пусть на N -ой итерации известна функция $c_{y_0}^{\alpha(N)}(\theta_j)$. Подставляя в (5) выражения (2), (3) получаем систему линейных уравнений для определения коэффициентов Фурье A_m .

По формулам (2), (3) определяем зависимости $\alpha_o^{(N)}(\theta_j)$, $c_{y_0}^{(N)}(\theta_j)$.

Далее, интерполируем функцию $c_{yp}(\alpha)$ и определяем новые значения $c_{yp}^\alpha(\alpha_o^{(N)}(\theta_j))$.

Переходим к следующему приближению, используя релаксационную формулу:

$$c_{y_0}^{\alpha(N+1)}(\theta_j) = c_{y_0}^{\alpha(N)}(\theta_j) \cdot \omega + c_{yp}^\alpha(\alpha_o^{(N)}(\theta_j)) \cdot (1 - \omega), \quad \omega \approx 0.75.$$

Процесс также продолжается до достижения возможного минимального значения критерия $\delta_{i\min}$. В качестве начального приближения принимаем $c_{y_0}^\alpha(\theta_j) = const$. Для нахождения начального приближения требуется несколько итераций.

Анализ результатов расчетов

Для определения пределов применимости ДАР были рассмотрены различные модельные зависимости $c_{yp}(\alpha)$. Было установлено, что для решения задачи ДАР

необходимо $M \approx 30$, $L \approx 15$. Напомним, что M число контрольных сечений вдоль полуразмаха крыла, L - число коэффициентов Фурье в (2), (3). Минимальные значения этих параметров были определены из того условия, что решения задачи ДАР перестают меняться при их увеличении.

На рис. 1 показана характерная зависимость $c_{yp}(\alpha)$, имеющая линейный участок, выраженный максимум и область закритических углов атаки.

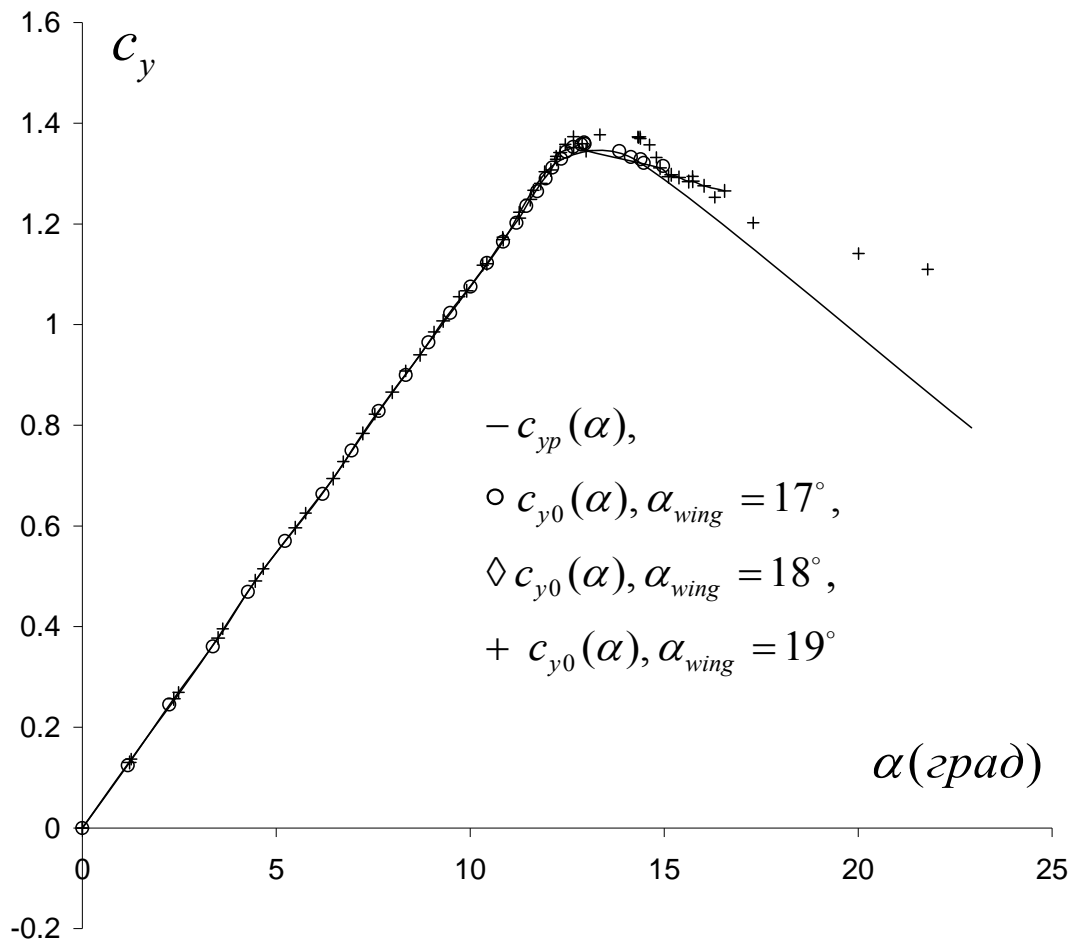


Рис. 1 Исходная зависимость $c_{yp}(\alpha)$ и допустимые функции $c_{y0}(\alpha)$, полученные для разных углов атаки крыла α_{wing} .

На рис.1 видно, что доверительный диапазон составляет $\alpha_{wing} \leq 17^\circ$, далее закон плоских сечений заметно нарушается и решение задачи аппроксимации не существует. Если на рис.1 убрать исходную зависимость $c_{yp}(\alpha)$ и добавить определенную по допустимым функциям зависимость $c_{ywing}(\alpha_{wing})$, получим рис.2..

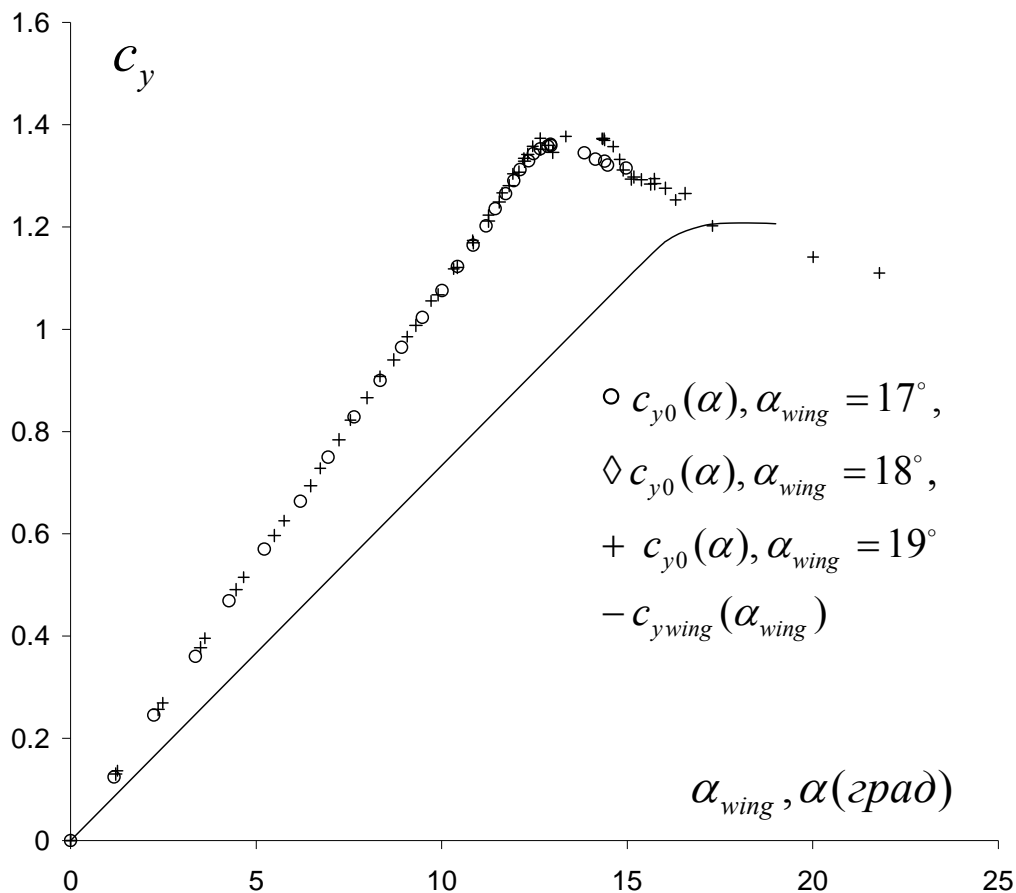


Рис. 2 Допустимые функции $c_{y0}(\alpha)$, полученные для разных углов атаки крыла α_{wing} и определенная по ним зависимость $c_{ywing}(\alpha_{wing})$.

На рис. 2 видно, что при $\alpha_{wing} \leq 18^\circ$ допустимые функции совпадают с приемлемой точностью. Если исходную зависимость $c_{yp}(\alpha)$ заменить полученной допустимой зависимостью, то решение задачи DAP существует, а доверительный диапазон составляет $\alpha_{wing} \leq 18^\circ$. Сопоставляя рис.1, 2 заключаем, что увеличение отрицательного градиента функции $c_{yp}(\alpha)$ в закритической области приводит к

сужению доверительного диапазона. В то же время сам доверительный диапазон ограничен сверху ближайшей окрестностью критического угла атаки крыла. Поэтому, как будет видно далее, при решении обратной задачи при параметризации функции $c_{yp}(\alpha)$ имеет смысл вводить ограничение на величину ее градиента в закритической области и учитывать ограниченность доверительного диапазона углов атаки крыла.

На рис 3, 4 приведены расчетные распределения углов атаки $\alpha(\theta; \alpha_{wingj})$ и подъемной силы $c_y(\theta; \alpha_{wingi})$ по размаху крыла.

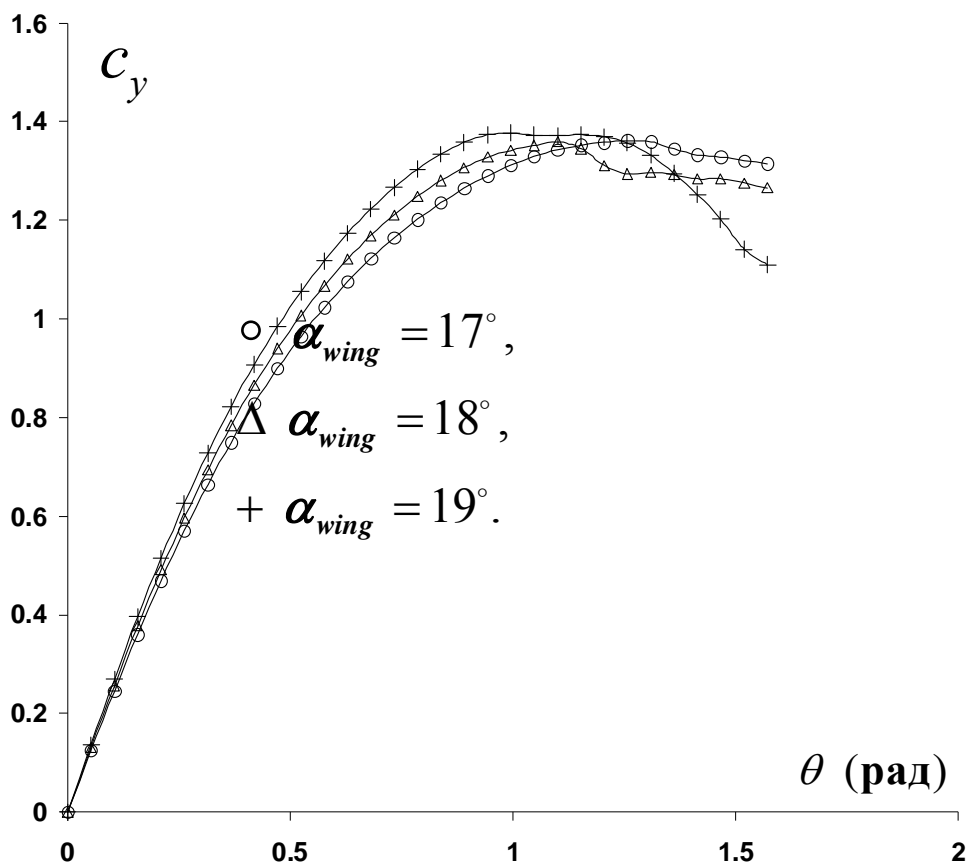


Рис. 3 Расчетные распределения подъемной силы $c_y(\theta; \alpha_{wingi})$ по размаху крыла.

Распределение подъемной силы вполне соответствует физической картине обтекания. Однако распределение углов атаки при $\alpha_{wing} = 19^\circ$ перестает ей соответствовать. Индуктивные углы меняют знак, что, конечно, не соответствует реальному течению. Необходимо подчеркнуть, что это ограничение доверительного диапазона углов атаки крыла есть не более чем свойство математической модели течения.

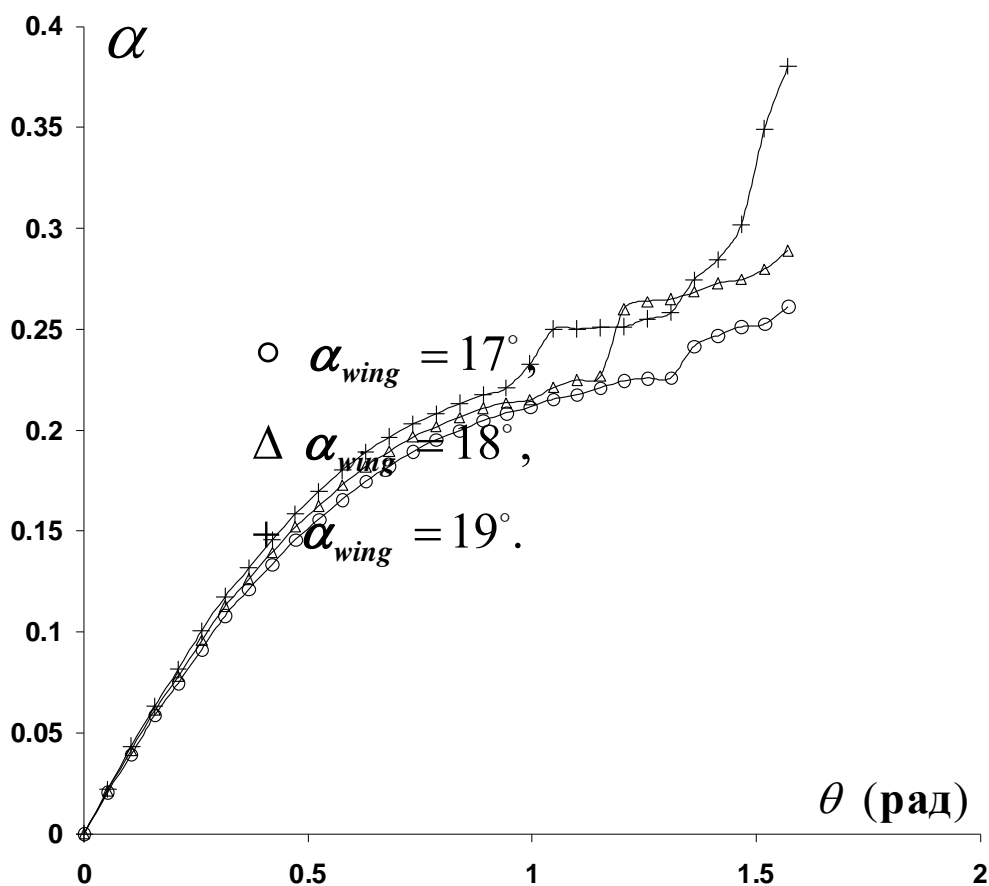


Рис. 4 Расчетные распределения углов атаки $\alpha(\theta; \alpha_{wingj})$ по размаху крыла.

На рис.5 приведено сравнение расчетных зависимостей $c_{ywing}(\alpha_{wing})$, полученных на основе экспериментальной зависимости $c_{yp}(\alpha)$ для профиля GAW в работе [4] и в данной работе. В этом случае доверительный диапазон α_{wing} из-за большого отрицательного градиента зависимости $c_{yp}(\alpha)$ становится еще меньше и не позволяет определить $c_{ywing\max}$. Этим объясняется отличие кривых при $c_{ywing} \geq c_{ywing\max}$, так как в этом диапазоне решение ДАР просто не существует.

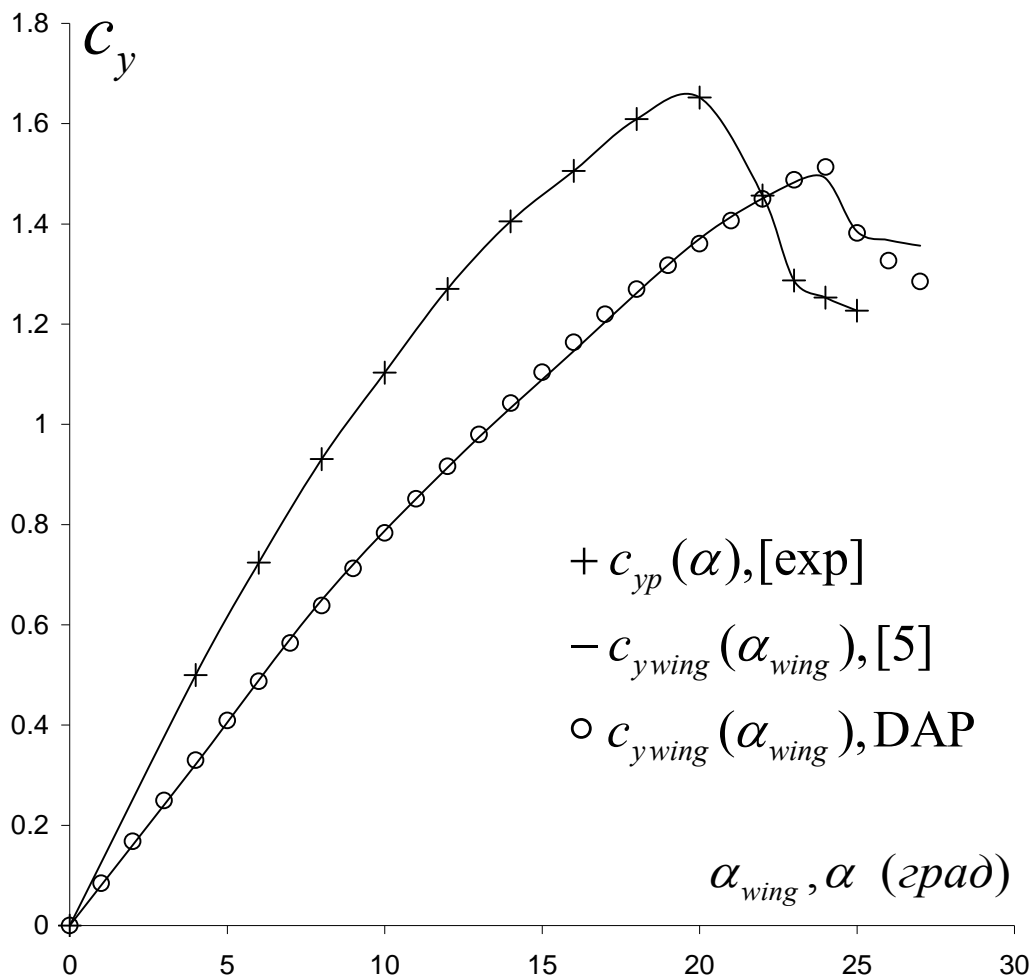


Рис. 5 Экспериментальная зависимость $c_{yp}(\alpha)$ для профиля GAW и расчетные зависимости $c_{ywing}(\alpha_{wing})$.

Этот факт становится понятным из рис.6. Видно, что при $\alpha_{wing} = 24^\circ$ в точке предполагаемого максимума $c_{ywing\ max}$ допустимая кривая (точное решение модифицированной теории несущей линии) заметно отличается от исходной профильной зависимости, демонстрируя нарушение закона плоских сечений. Этот рисунок подтверждает тезис о невозможности расчета крыльевой зависимости в зоне закритических углов атаки крыла на основе модифицированной теории несущей линии.

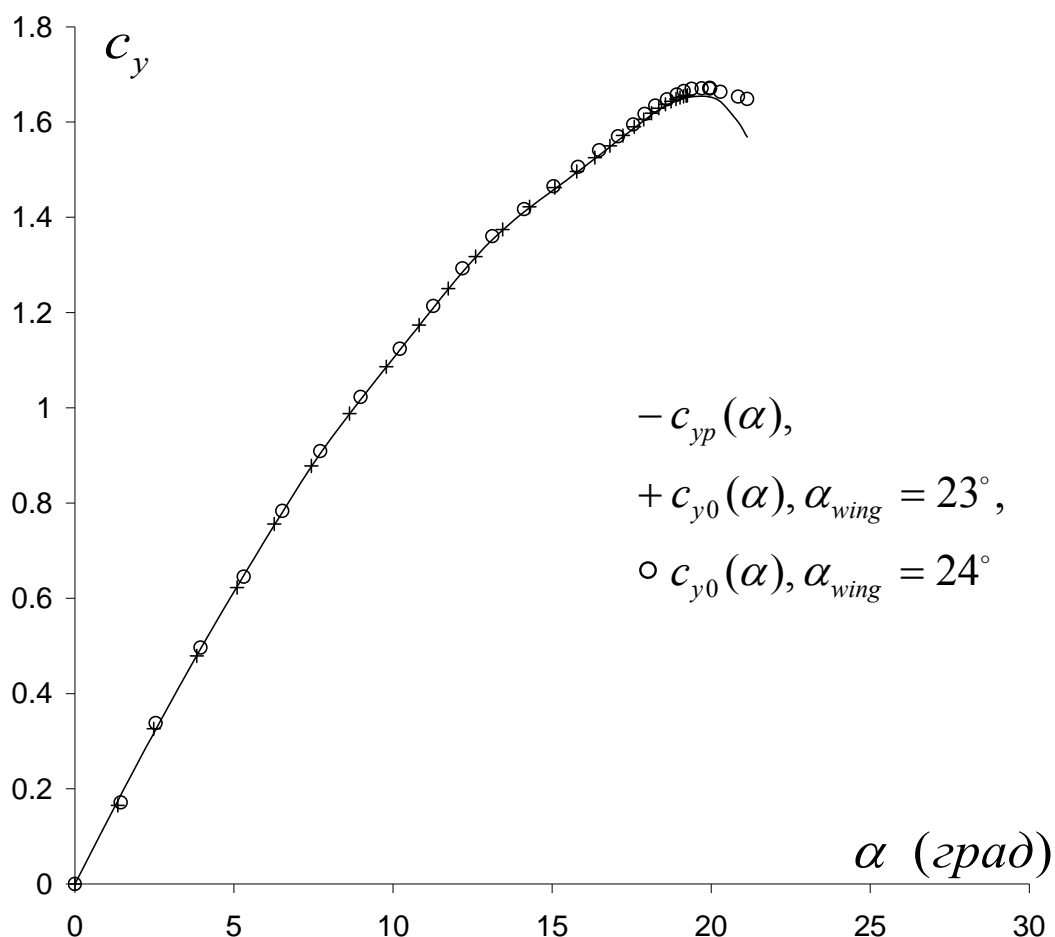


Рис. 6 Исходная зависимость $c_{yp}(\alpha)$ и допустимые функции $c_{y0}(\alpha)$, полученные для двух углов атаки крыла α_{wing} .

Результаты численных экспериментов показали, что определение коэффициента подъемной силы крыла c_{ywing} в лучшем случае возможно вплоть до слегка закритических углов атаки крыла $\alpha_{wing} < \alpha_* + \Delta\alpha$. Здесь α_* - критический угол атаки крыла, $\Delta\alpha \approx 0.5^\circ$. Таким образом, нелинейная теория несущей линии не позволяет определять c_{ywing} крыла в зоне отрыва и не позволяет по экспериментальной зависимости для профиля $c_{yp}(\alpha)$ с достаточной точностью и полнотой восстановить экспериментальную зависимость для крыла $c_{ywing}(\alpha_{wing})$. В частности это можно объяснить тем, что исходные положения теории нарушаются вблизи концов крыла и на больших углах атаки в области отрыва потока, где течение носит пространственный характер.

Верификация итерационного метода решения DAP

Результаты, приведенные в работе, существенно отличаются от данных приведенных в работах [4, 5]. Это касается, прежде всего, сужения доверительного диапазона (в рамках матмодели) углов атаки крыла, для которых возможен пересчет АДХ. При обсуждении результатов настоящей работы было высказано мнение, что автор пришел к таким выводам в результате специфики используемого метода последовательных приближений. Поэтому была проведена дополнительная верификация метода.

Вернемся к исходным положениям DAP.

Бесспорным является тот факт, что точное решение прямой задачи, а именно распределения углов атаки и подъемной силы вдоль размаха крыла дается

уравнениями (2), (3). Поэтому построим альтернативный метод решения задачи DAP используя только эти соотношения.

В том диапазоне углов атаки крыла, где решение задачи DAP итерационным методом не существует, будем искать решение методом оптимизации. Будем искать такое распределение углов атаки профиля $\alpha(\theta; \alpha_{wingj})$ по размаху крыла, которое доставляет минимум следующей функции:

$$\min \delta_i = \sqrt{\sum_{j=1}^M c_{y0i}(\alpha_j) - c_{yp}(\alpha_j))^2}, \quad j = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, K.$$

Напомним, что M – число рассматриваемых сечений крыла, K – число углов атаки крыла. Функцию $\alpha(\theta)$ зададим сплайном, точки которого примем переменными проектирования. Решения задачи оптимизации были получены комплекс - методом Нелдера-Мида [6] и методом квадратичной аппроксимации Пауэлла [7]. Результаты с хорошей точностью совпали с результатами, полученными итерационным методом. Поскольку оставалось сомнение, что найденные методы находят локальные минимумы, для поиска был применен генетический алгоритм [8], претендующий на нахождение глобальных оптимумов. Результаты также совпали с результатами, полученными итерационным методом.. Поэтому для решения задачи DAP целесообразно использовать быстродействующий итерационный метод.

Проведенная верификация дает основания считать правомерными выводы об ограниченности доверительного диапазона углов атаки крыла, в котором существует решение DAP. Следует отметить, что такой вывод сделан на основе обширного численного эксперимента.

Обратная задача аппроксимации IAP

В действительности, целью развиваемого метода является пересчет экспериментальных характеристик прямоугольных крыльев удлинения $\lambda \approx 5$ для последующего использования характеристик профилей при аэродинамическом расчете винта вертолета, то есть обратная задача. Основная задача метода расширить область применимости методики Прандтля на нелинейный диапазон профильной зависимости $c_{yp}(\alpha)$. Понятно, что и обратный пересчет экспериментальной характеристики крыла может дать лишь некоторое приближение к реальным характеристикам профиля. Однако если предлагаемый пересчет позволит качественно отражать преимущества одного профиля над другим и количественно улучшить совпадение с экспериментом по сравнению со стандартной методикой это дает основания для использования этих характеристик при аэродинамическом расчете винта вертолета.

Поскольку единственная известная теория дающая связь между характеристиками крыла и профиля основана на уравнении (1), решение обратной задачи необходимо осуществлять именно на его основе.

Естественным способом решения обратной задачи представляется создание оптимизационного процесса, ядром которого является прямая задача, а целевой функцией отличие рассчитанных и экспериментальных характеристик крыла. Для этого необходима детальная параметризация искомой функции $c_{yp}(\alpha)$ таким образом, чтобы охватить все возможное предполагаемое множество решений. Для

выполнения гипотезы плоских сечений, в процессе оптимизации необходимо искать решение в классе допустимых функций, то есть выполнять ограничение (4). Учитывая выше сказанное обратную задачу аппроксимации (IAP) можно сформулировать следующим образом.

По известной экспериментальной зависимости $c_{ywing}(\alpha_{wing})$ найти такую функцию $c_{yp}(\alpha)$, которая в доверительном диапазоне α_{wing} может быть аппроксимирована допустимой функцией и обеспечивает аппроксимацию зависимости $c_{ywing}(\alpha_{wing})$ с заданной точностью.

Для решения задачи IAP используем следующую процедуру условной оптимизации:

$$\text{найти } \min \mu = \sqrt{\sum_{i=1}^K (c_{y0wingi} - c_{ywingi})^2} / K, \text{ при условии } \delta_i < \varepsilon,$$

$$\text{где } \delta_i = \sqrt{\sum_{j=1}^M (c_{y0i}(\alpha_j) - c_{yp}(\alpha_j))^2} / M, i = 1, \dots, K.$$

Это означает, что необходимым условием существования решения задачи IAP является $\delta_i < \varepsilon$, а достаточным условием $\mu < \varepsilon_1$. Первое условие гарантирует, что решение с приемлемой точностью удовлетворяет гипотезе плоских сечений, второе - что решение с приемлемой точностью соответствует исходной экспериментальной крыльевой зависимости $c_{ywing}(\alpha_{wing})$.

Последнее условие определяет доверительный диапазон (в рамках матмодели) углов атаки крыла, в котором может быть найдено решение задачи IAP. Ранее в ходе численных экспериментов по решению задач DAP было установлено,

что доверительный диапазон ограничен ближайшей окрестностью критического угла атаки крыла.

Определение универсальных малых значений ε и ε_1 для всего массива имеющихся в экспериментальной базе данных зависимостей $c_{ywing}(\alpha_{wing})$ возможно только в ходе обширного численного эксперимента. При стремлении ε и ε_1 к нулю решения задач ДАР и IAP возможны только для линейных участков профильных (и соответственно крыльевых) зависимостей. С другой стороны при увеличении значений этих параметров все в большей степени нарушается основное положение матмодели - закон плоских сечений. Разумный компромисс при выборе этих параметров остается прерогативой пользователя метода. Численные эксперименты по решению обратных задач IAP показали, что приемлемым выбором для значений критериев представляется следующий: $\varepsilon \approx 0.003$, $\varepsilon_1 \approx 0.003$.

Поскольку IAP является задачей на определение минимума, возможность выполнения ограничения $\mu < \varepsilon_1$ зависит и от удачного выбора параметрического описания зависимости $c_{yp}(\alpha)$. Осуществим параметризацию на основе следующего соотношения:

$$c_{yp}(\alpha) = c_{ywing}(\alpha(\alpha_{wing})) \cdot factor_{cy_{max}}$$

Здесь $factor_{cy_{max}} = c_{yp_{max}} / c_{ywing_{max}}$. Такая параметризация заключается в неравномерной деформации крыльевой зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки крыла по оси абсцисс и последующем аффинном вытягивании по оси ординат. Нетрудно видеть, что таким преобразованием можно получить любую приемлемую их физических соображений профильную зависимость. Кроме того

зависимость $\alpha(\alpha_{wing})$ близка к линейной и носит монотонный характер. Все эти факторы позволяют существенно ограничить как пространство переменных проектирования, так и пространство возможных решений, увеличивая эффективность оптимизационной процедуры. Характерная зависимость $\alpha(\alpha_{wing})$ показана на рис. 7.

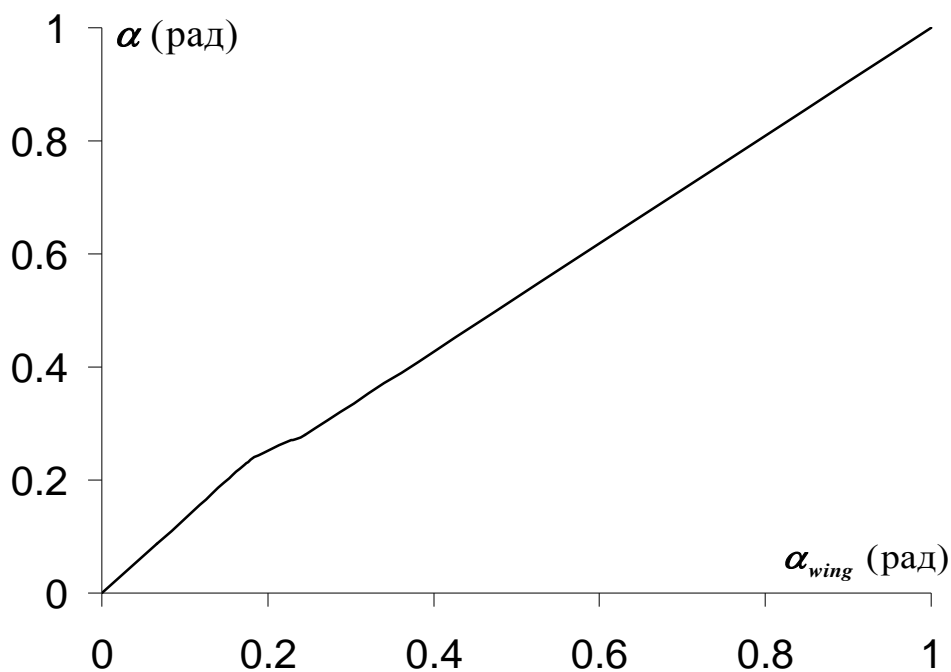


Рис. 7 Характерная зависимость $\alpha(\alpha_{wing})$.

Эта зависимость задавалась с помощью кубического сплайна, а точки сплайна являлись параметрами проектирования. Ясно, что такое параметрическое описание позволяет охватить все возможное множество решений. Численные эксперименты показали, что максимальное количество точек такого сплайна обычно не превышает 15. Дальнейшее увеличение количества точек не приводило к достижению лучшего оптимума. Это обусловлено плавным характером профильных зависимостей $c_{yp}(\alpha)$.

Вычисление целевой функции метода решения IAP основана на решении DAP и не нуждается в дополнительном описании.

В настоящее время вычислительная программа решает задачу DAP в автоматическом режиме. Задача IAP находится в стадии перехода из интерактивного в автоматический режим. Некоторое отставание задачи IAP от задачи DAP обусловлено выработкой универсальных численных критериев для автоматического определения максимального доверительного диапазона α_{wing} для различных типов (для разных чисел M) зависимостей $c_{ywing}(\alpha_{wing})$.

Анализ результатов расчетов

Далее для сравнения выбран пример из недавней работы [5], где обратная задача решалась на основе соотношений, не учитывающих необходимость выполнения закона плоских сечений.

На рис. 8 приведено сравнение расчетных зависимостей $c_{yp}(\alpha)$, полученных по экспериментальной зависимости $c_{ywing}(\alpha_{wing})$ для крыла с профилем NACA 0012, полученных в работе [5] и методом IAP данной работы.

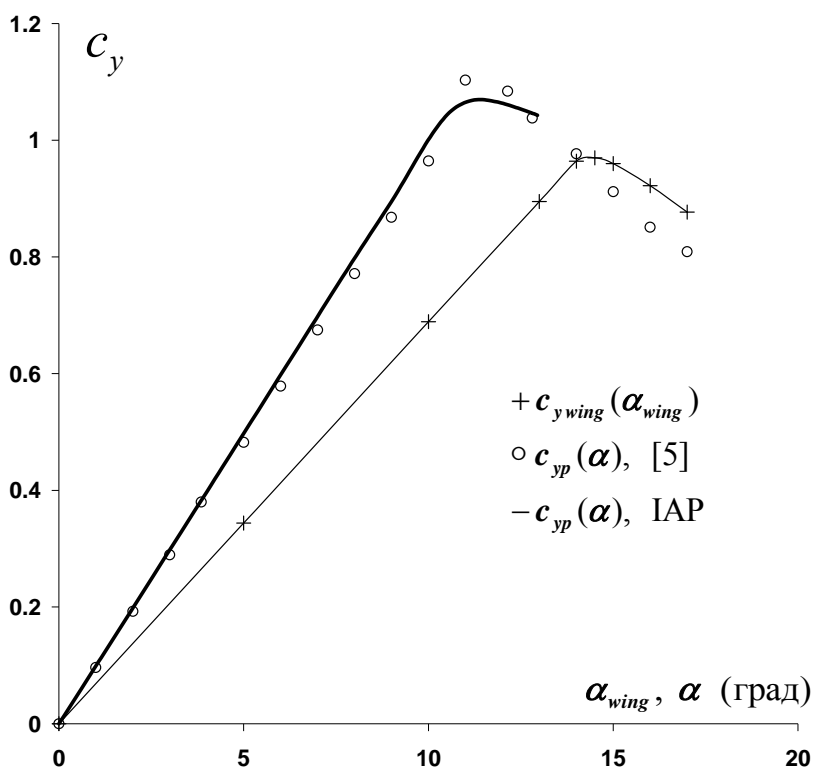


Рис. 8 Экспериментальная зависимость $c_{ywing}(\alpha_{wing})$ и расчетные зависимости $c_{yp}(\alpha)$ для профиля NACA 0012. $M_\infty=0.3$.

На рисунке видно, что в работе [5], в отличие от результатов настоящей работы, утверждается возможность восстановления профильной зависимости без ограничений в закритической области углов атаки. Кроме того сами кривые заметно отличаются, особенно в окрестности c_{ymax} .

Для объяснения расхождения результатов был проведен расчет методом DAP характеристик крыла на основе зависимости $c_{yp}(\alpha)$, полученной в работе [5].

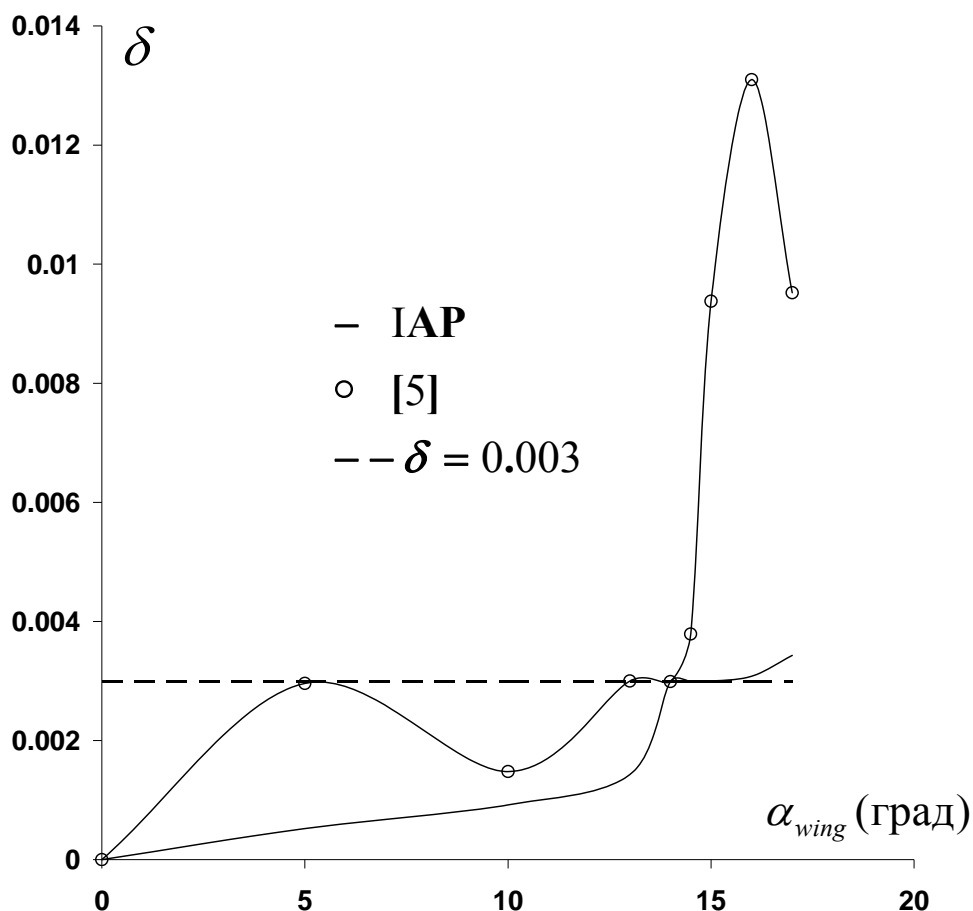


Рис. 9 Сравнение значений критерия допустимости.

На рис. 9 приведено сравнение значений критерия допустимости для зависимостей $c_{yp}(\alpha)$, полученных методом IAP и приближенным методом работы [5] с предложенным ранее уровнем допустимости. На рисунке видно, что при $\alpha_{wing} \geq 14.5^\circ$ зависимость из работы [5] перестает быть допустимой, что обусловлено спецификой используемого пересчета. Дополнительно на рис. 10 показаны зависимость $c_{yp}(\alpha)$ из работы [5] и допустимые зависимости, полученные методом DAP для двух значений α_{wing} .

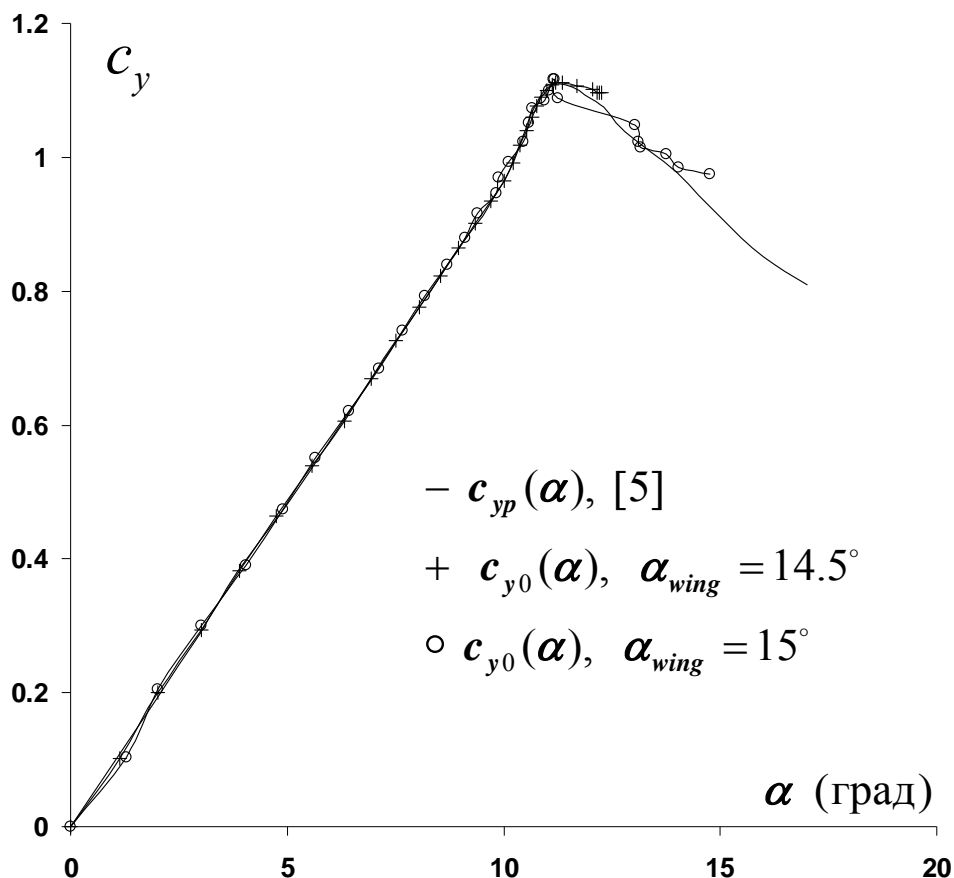


Рис. 10 Зависимость $c_{yp}(\alpha)$ из работы [5] и допустимые зависимости $c_{y0}(\alpha)$, полученные методом DAP.

На рис. 10 видно, что допустимые кривые $c_{y0}(\alpha)$ (точные решения модифицированной теории несущей линии) не совпадают между собой и с исходной кривой $c_{yp}(\alpha)$. Это свидетельствует о заметном нарушении гипотезы плоских сечений, что делает использование этой зависимости неправомерной

Для сравнения на рис. 11 приведены подобные зависимости, полученные методом настоящей работы.

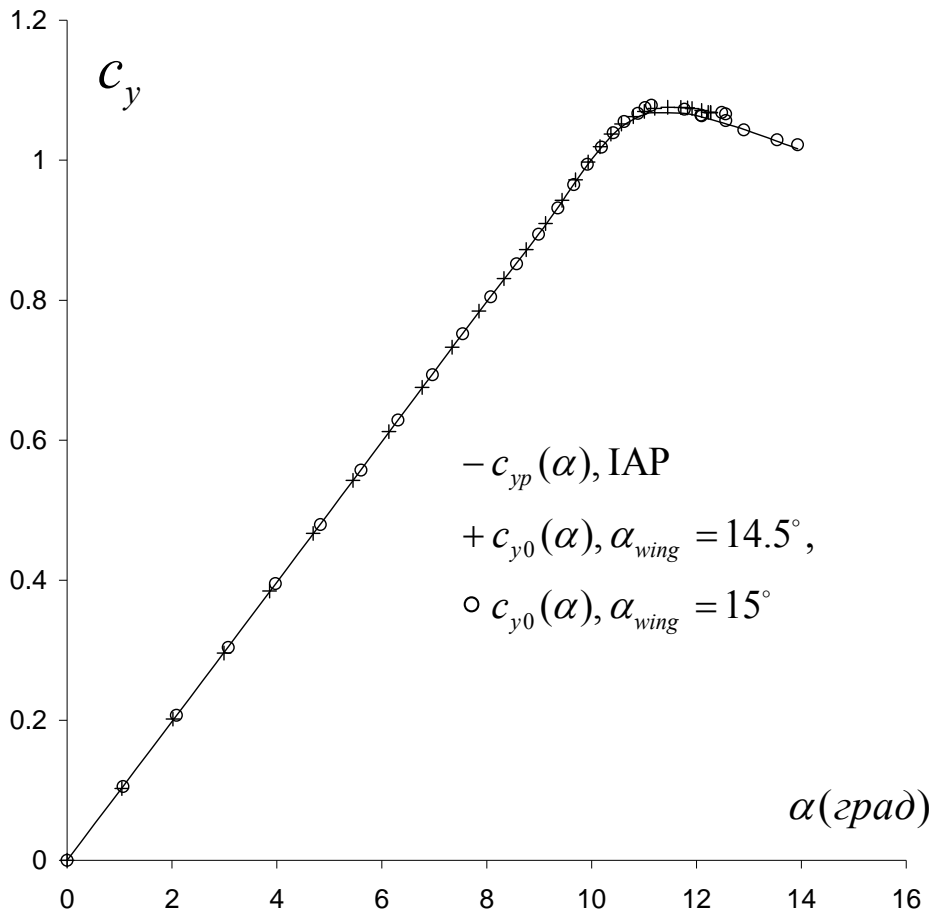


Рис. 11 Зависимость $c_{yp}(\alpha)$, полученная методом IAP. и допустимые зависимости $c_{y0}(\alpha)$, полученные методом DAR.

На рис. 11 видно, что исходная зависимость $c_{yp}(\alpha)$ и допустимые зависимости $c_{y0}(\alpha)$ удовлетворительно согласуются между собой.

Из этого следует, что принятый уровень допустимости решений задачи DAR позволяет с приемлемой точностью следовать гипотезе плоских сечений и обоснованно (в рамках модифицированной теории несущей линии) определять профильную зависимость $c_{yp}(\alpha)$ по экспериментальной зависимости $c_{ywing}(\alpha_{wing})$.

Определение профильного сопротивления и момента

Модифицированная теория несущей линии позволяет предложить и метод определения коэффициента профильного сопротивления $c_{xp}(\alpha)$.

В процессе решения обратной задачи IAP определяем доверительный диапазон α_{wing} и решаем задачу DAP, то есть для углов атаки из этого диапазона определяем разложения в ряды Фурье (2), (3). Зная коэффициенты Фурье, для каждого угла атаки крыла α_{wing} находим индуктивное сопротивление крыла:

$c_{xind} = \pi\lambda \sum_{m=0}^L mA_m^2$. Далее вводим следующее обозначение:

$$\Delta_i = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} c_{xp}(\alpha_i(\theta))d\theta - (c_{xwingi} - c_{xindi}), i = 1, K_0.$$

Здесь K_0 определяет доверительный диапазон α_{wing} . Очевидно искомая зависимость $c_{xp}(\alpha)$ должна удовлетворять системе уравнений:

$$\Delta_i = 0, i = 1, K_0. \quad (7)$$

Поскольку зависимости $c_{xp}(\alpha)$ имеют плавный характер, ищем решение, например в виде полиномиальной функции: $c_{xp}(\alpha) = \sum_{mp=0}^{Mp} a_{mp} \alpha^{mp}$.

Если принять $Mp = K_0$, систему уравнений (7) можно свести к линейной относительно коэффициентов a_{mp} и тем самым решить задачу. Однако при больших значениях K_0 для того чтобы избежать нерегулярного вида кривой $c_{xp}(\alpha)$ представляется целесообразным выбрать $Mp = 4 \div 6$, а для определения коэффициентов a_{mp} вновь прибегнуть к процедуре оптимизации. Для этого запишем целевую функцию в виде $S = \sum_{i=1}^K \Delta_i^2(a_1, a_2, \dots, a_{Mp})$, где a_{mp} - переменные проектирования и ищем $\min S$.

Аналогичную процедуру применим для нахождения коэффициента момента профиля $c_m(\alpha)$. Вводим следующее обозначение:

$$\Delta_i = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} c_m(\alpha_i(\theta))d\theta - c_{mwingi}, i = 1, K_0.$$

Зависимость $c_m(\alpha)$ ищем в виде: $c_m(\alpha) = \sum_{np=0}^{Np} b_{np} \alpha^{np}$. Для нахождения

коэффициентов b_{np} записываем целевую функцию в виде $T = \sum_{i=1}^K \Delta_i^2(b_1, b_2, \dots, b_{Np})$ и

ищем $\min T$.

Выводы

1. Для решения прямой задачи определения крыльевой зависимости подъемной силы от угла атаки по известной профильной зависимости разработан метод последовательных приближений.

2. На основании результатов численного эксперимента сделан вывод о приближенном характере модифицированной теории несущей линии.

3. Введено понятие критерия допустимости, позволяющего с приемлемой точностью удовлетворять гипотезе плоских сечений и находить приближенное решение прямой задачи в доверительном диапазоне углов атаки крыла.

4. Проведено сравнение с имеющимися в литературе данными и разработан дополнительный верификационный алгоритм решения прямой задачи.

5. На основе метода решения прямой задачи разработана оптимизационная процедура определения профильной зависимости $c_{yp}(\alpha)$ по доверительному участку экспериментальной зависимости для крыла $c_{ywing}(\alpha_{wing})$.

6. Разработан алгоритм и находится в процессе отладки программа расчета профильного сопротивления и момента.

7. На следующем этапе работы планируется сделать программу полностью автоматической пригодной для обработки имеющейся экспериментальной базы

данных по испытаниям крыльев конечного удлинения и создания электронной базы данных АДХ вертолетных профилей.

Библиографический список

1. Бураго Г.Ф. Опыт расчета распределения подъемной силы по размаху крыла на закритических углах атаки: - М.: Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1944. - 68 с.
2. Майкапар Г.И. К аэродинамическому расчету крыла конечного удлинения // Труды ЦАГИ. 1944. № 547. С. 1-11.
3. Sivells J.C., Nelly R.H., Method for calculating wing characteristics by lift-line theory using nonlinear section lift data. NASA Rep. 865, 1947, 37 p.
4. Ляпунов С.В., Щенникова О.Л. Расчет нелинейных несущих характеристик крыльев большого удлинения // Ученые записки ЦАГИ. 1994. т. XXV. № 1-2. С. 3-13.
5. Артамонов Б.Л. Определение аэродинамических характеристик профиля по полюре крыла конечного размаха // Научный вестник МГТУ ГА. 2014. № 200. С. 20-27.
6. Trefftz E. Prandtl's wing theory, Math. Ann., 1921, vol.82, pp. 306-319.
7. Himmelblau David M. Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill, New York, 1972, 498 p.
8. Powell M.J.D. The BOBYQA algorithm for bound constrained optimization without derivatives. DAMTP 2009/NA06, 39 p.

9. Michalewicz Z. Genetic Algorithms + Data Structure = Evolution Programs. Springer, 1999, 387 p.