

Плоская нестационарная контактная задача для абсолютно твердого штампа и упругого полупространства с полостью

Арутюнян А.М.^{1*}, Кузнецова Е.Л.^{1}, Федотенков Г.В.^{1,2***}**

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

²*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова,
Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Россия*

**e-mail: 89057254188@mail.ru*

***e-mail: Vida_ku@mail.ru@mail.ru*

****e-mail: greghome@mail.ru*

Статья поступила 28.07.2020

Аннотация

Исследуется процесс нестационарного контактного взаимодействия абсолютно жесткого штампа и упругого полупространства, имеющего заглубленную полость произвольной геометрии и расположения с гладкой границей. Рассмотрено три варианта условий контакта: свободное проскальзывание, жесткое сцепление и контакт с трением.

Метод решения задачи построен с использованием граничных интегральных уравнений. Для получения граничных интегральных уравнений использована динамическая теорема взаимности работ. В качестве ядер интегральных операторов выступают объёмные функции Грина для упругой плоскости. В результате линейных аппроксимаций границ области по пространственной переменной и линейных аппроксимаций граничных значений искомых функций по времени, задача сведена к

решению системы алгебраических уравнений относительно узловых значений искомых перемещений и напряжений на каждом временном шаге. Предполагается, что массовые силы в полупространстве отсутствуют. Используется прямоугольная декартова система координат. Одна из осей направлена вдоль невозмущенной границы полупространства, вторая – вглубь полупространства.

Ключевые слова: нестационарные контактные задачи, упругое полупространство, полость, граничные интегральные уравнения, функции Грина, обобщенные функции, жесткий штамп, динамическая теорема взаимности, интегральные преобразования.

Введение

Многие важные практические задачи связаны с исследованием динамического контактного взаимодействия ограниченных тел с полуограниченными упругими областями сложного строения. Эти задачи связаны, в том числе, с проблемами сейсмостойкости и виброзащиты сооружений, расчетом уровня и характеристик воздействия на здания и сооружения техногенных колебаний, распространяющихся в грунте, сейсморазведки полезных ископаемых и др.

В грунтовом массиве часто присутствуют неоднородности (нарушения структуры) как естественного (карстовые полости, более жесткие включения), так и искусственного (различные коммуникации, тоннели метрополитена, заглубленные хранилища отходов и др.) происхождения. Поэтому существенным является вопрос о степени влияния подобных неоднородностей на генерируемые в массиве с неоднородностью волновые поля. В задачах проектирования сейсмоустойчивых

зданий и сооружений, важно, с достаточной степенью точности, определить параметры нестационарных колебаний объектов, расположенных на земной поверхности. Следует отметить, что размещение любых датчиков в зоне контакта неизбежно порождает искажение напряженно-деформированного состояния в их локальной окрестности, что существенно осложняет экспериментальные исследования распределений контактных напряжений, и делает их практически невозможными для большинства случаев. Это приводит к необходимости развития теоретических методов и подходов к решению рассматриваемого класса задач.

Формулировка статических и динамических контактных задач в классической постановке предполагает задание закона смещения подошвы жесткого штампа и приводит к решению интегральных уравнений и систем для определения закона распределения контактных усилий. Большой вклад в развитие теории контактного взаимодействия внесли В.М. Александров, Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян, СМ. Айзикович, В.А. Бабешко, А.А. Баблюян, А.В. Белоконь, А.О. Ватульян, И.И. Ворович, Л.А. Галин, И.Г. Горячева, А.Г. Горшков, В.Т. Гринченко, Е.В. Глушков, И.Г. Кадомцев, Е.В. Коваленко, В.В. Калинин, А.А. Ляпин, С.Г. Михлин, В.И. Моссаковский, СМ. Мхитарян, Б.М. Нуллер, В.З. Партон, П.И. Перлин, Г.Я. Попов, В.Б. Поручиков, О.Д. Пряхина, В.Л. Рвачев, В.М. Сеймов, М.Г. Селезнев, Б.И. Сметанин, А.В. Смирнова, М.А. Сумбатьян, Д.В. Тарлаковский, А.Ф. Улитко, Ю.А. Устинов, Я.С. Уфлянд, М.И. Чебаков и многие другие.

В области механики контактных взаимодействий наименее исследованными являются нестационарные контактные задачи. К настоящему времени имеется лишь

ограниченный круг работ, посвященных исследованию процессов нестационарного контактного взаимодействия для абсолютно твердых или деформируемых тел [1-18]. Следует отметить, что в последнее время в связи с бурным развитием ЭВМ, появилась тенденция в применении метода конечных элементов к решению контактных задач теории упругости [19], [20]. Нестационарные контактные задачи, в которых полупространство имеет заглубленные полости [21], [22], на сегодняшний день являются одними из наименее изученных. С другой стороны, эти задачи исключительно важны для различных отраслей народного хозяйства, таких как геофизика, сейсмология, акустика, вибросейсморазведка, фундаментостроение, военная промышленность и др. Актуальность исследований определяется возможностью их широкого практического приложения в различных областях механики. Сложность их исследования обусловлена тем, что вследствие многосвязности основания традиционные методы решения нестационарных контактных задач для односвязных оснований, в основе которых, как правило, полагается сведение исходной задачи к функционально-интегральным граничным уравнениям, здесь не применимы. Одним из перспективных направлений разработки точных и эффективных алгоритмов решения задач этого класса являются подходы, основанные на применении метода граничных интегральных уравнений [23-31]. В этой связи актуальными становятся как исследования рассматриваемого класса задач в новой постановке, так и разработка новых численно-аналитических методов их решения.

1. Постановка задачи

Рассматривается нестационарная контактная задача для однородного упруго-полупространства $y \geq 0$, имеющего заглубленную полость, ограниченную гладкой кривой γ и абсолютно жесткого штампа, который предполагается неограниченным по длине. Поперечное сечение штампа имеет форму прямоугольника, шириной $2b$. Полагается, что в начальный момент времени полупространства находится в невозмущённом состоянии, а штамп, двигаясь вертикально по заданному закону $w_s(t) = f(t)$, входит в контакт со свободной границей $y = 0$ полупространства (рис. 1). Для описания движения полупространства используем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Ось Ox направлена вдоль невозмущённой границы полупространства, а Oy – вглубь полупространства. Полагаем, что задача является плоской – все искомые и заданные функции зависят только от двух пространственных координат x, y и времени t . При этом вектор перемещений \mathbf{u} имеет две отличные от нуля компоненты: $u(x, y, t)$ – вдоль оси Ox и $w(x, y, t)$ – вдоль оси Oy .

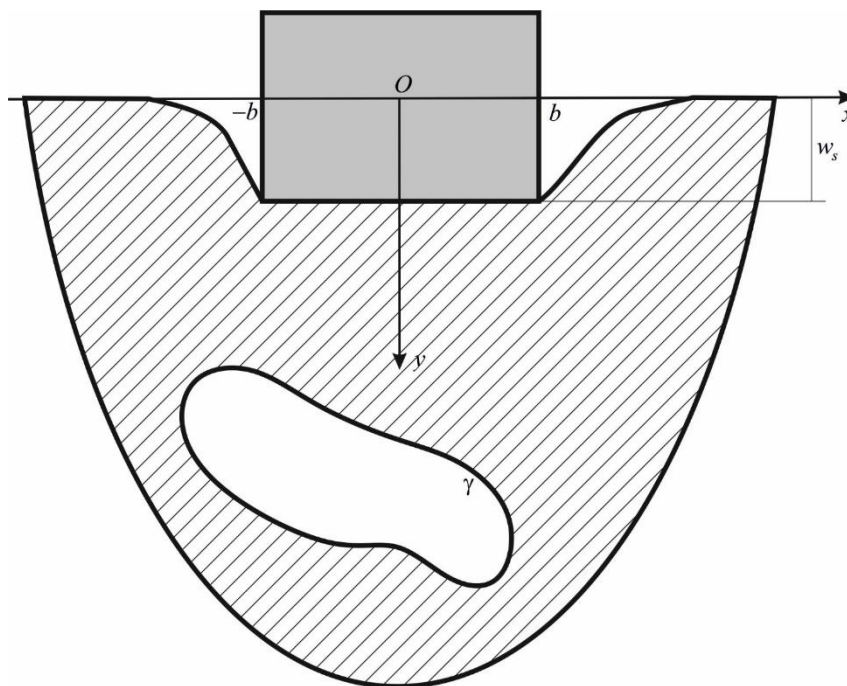


Рис. 1. Постановка задачи.

Введем систему безразмерных величин (штрихом обозначены размерные параметры)

$$x = \frac{x'}{b}, \quad y = \frac{y'}{b}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{b}, \quad u = \frac{u'}{b}, \quad w = \frac{w'}{b}, \quad F_i = \frac{F_i' b}{\lambda + 2\mu},$$

$$\eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}'}{\lambda + 2\mu},$$
(1)

где c_1 и c_2 – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига; F_i , $i = 1, 2$ – компоненты массовых сил; λ , μ и ρ – упругие постоянные Ламе и плотность среды; τ – безразмерное время, σ_{ij} , $i, j = 1, 2$ – компоненты тензора напряжений. Здесь и далее индекс «1» у величины соответствует координате x , а индекс «2» – координате y .

Далее все уравнения и соотношения будем записывать в безразмерном виде с

учётom введённой системы безразмерных величин (1).

Движение упругой среды описывается уравнениями Ламе [32]

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \eta^{-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_1(x, y, \tau), \\ \ddot{w} &= (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \eta^{-2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + F_3(x, y, \tau).\end{aligned}\quad (2)$$

Точками здесь и далее обозначены производные по безразмерному времени τ .

Для системы уравнений (2) можно использовать следующую индексную запись

$$\ddot{u}_k = (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \eta^{-2} \Delta u_k + F_k(x, y, \tau), \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

где $u_1 = u$, $u_2 = w$, $\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный оператор

Лапласа. Здесь и далее по повторяющимся латинским индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Введём также *дифференциальный оператор упругого равновесия*

$$L_k(\mathbf{u}) = - (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \eta^{-2} \Delta u_k, \quad (4)$$

Тогда уравнение (3) можно записать в операторной форме

$$\ddot{u}_k + L_k(\mathbf{u}) = F_k(x, y, \tau). \quad (5)$$

Если ввести *векторный оператор упругого равновесия*

$$\mathbf{L} = [L_1(\mathbf{u}), L_2(\mathbf{u})], \quad (6)$$

То система уравнений (5) может быть записана в векторной форме

$$\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}. \quad (7)$$

Ненулевые компоненты тензора деформации ε_{xx} , ε_{xy} и ε_{yy} связаны с перемещениями соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (8)$$

Напряжения σ_{xx} , σ_{xy} и σ_{yy} связаны с деформациями законом Гука

$$\sigma_{xx} = \varepsilon_{xx} + (1 - 2\eta^{-2})\varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{xy} = 2\eta^{-2}\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yy} = \varepsilon_{yy} + (1 - 2\eta^{-2})\varepsilon_{xx}. \quad (9)$$

Закон Гука можно записать в индексной форме

$$\sigma_{ij} = (1 - 2\eta^{-2})\theta\delta_{ij} + 2\eta^{-2}\varepsilon_{ij}. \quad (10)$$

Предполагаем, что в начальный момент времени $\tau = 0$ полупространство находится в невозмущенном состоянии, что соответствует нулевым начальным условиям

$$u(x, z, 0) = \dot{u}(x, z, 0) = w(x, z, 0) = \dot{w}(x, z, 0) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим два типа условий контакта между штампом и полупространством: условия свободного проскальзывания и жесткого сцепления. Тогда на границе $y = 0$ будем иметь соответствующие граничные условия смешанного типа. В случае свободного проскальзывания

$$\begin{aligned} w|_{y=0} = f(\tau), \quad x \in [-1, 1]; \quad \sigma_{yy}|_{y=0} = 0, \quad x \notin [-1, 1]; \\ \sigma_{xy}|_{y=0} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (12)$$

В случае жесткого сцепления

$$\begin{aligned} w|_{y=0} = f(\tau), \quad x \in [-1, 1]; \quad u|_{y=0} = 0, \quad x \in [-1, 1]; \\ \sigma_{yy}|_{y=0} = 0, \quad x \notin [-1, 1]; \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = 0, \quad x \notin [-1, 1]. \end{aligned} \quad (13)$$

На бесконечности перемещения предполагаются ограниченными

$$u|_{r \rightarrow \infty} = O(1), w|_{r \rightarrow \infty} = O(1), r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (14)$$

На границе полости γ также возможно задание одного из трех типов граничных условий.

1. Граничные условия в перемещениях:

$$u_s|_{\gamma} = U_s(s, \tau), u_n|_{\gamma} = U_n(s, \tau), \quad (15)$$

где $u_s = (\mathbf{u}, \mathbf{s}) = u_k v_k$ и $u_n = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) = u_k n_k$ – проекции вектора перемещений на направление касательной и нормали к контуру γ ; \mathbf{n} , \mathbf{s} – единичные векторы внешней нормали и касательной к контуру γ . $U_s(s, \tau)$, $U_n(s, \tau)$ – заданные функции длины дуги кривой γ и времени, характеризующие касательные и нормальные перемещения на границе полости.

2. Граничные условия в напряжениях:

$$\sigma_s|_{\gamma} = p_s(s, \tau), \sigma_n|_{\gamma} = p_n(s, \tau), \quad (16)$$

где σ_v и σ_n – касательные и нормальные напряжения на контуре γ ; $p_s(s, \tau)$ и $p_n(s, \tau)$ – функции длины дуги кривой γ и времени, характеризующие касательную и нормальную нагрузку на границе полости.

3. Смешанные граничные условия:

$$\begin{aligned} u_s|_{\gamma_u} &= U_s(s, \tau), u_n|_{\gamma_u} = U_n(s, \tau), \\ \sigma_s|_{\gamma_\sigma} &= p_s(s, \tau), \sigma_n|_{\gamma_\sigma} = p_n(s, \tau), \end{aligned} \quad (17)$$

где γ_u – часть границы полости, на которой заданы перемещения, а γ_σ – часть границы полости, на которой заданы нагрузки.

2. Функции Грина для упругой плоскости

Для решения поставленных задач нам понадобятся функции Грина для упругой плоскости Оуз. Этими функциями являются перемещения $G_{km}^u(x, z)$ и напряжения $G_{klm}^\sigma(x, z)$ как ограниченные на бесконечности решения задачи (5)-(11) для безграничной упругой плоскости при воздействии единичных сосредоточенных массовых сил, приложенных в начале координат:

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{km}^u - L(G_{km}^u) &= \delta_{km} \delta(\tau) \delta(x_1, x_2), \\ \theta_m &= \frac{\partial G_{1m}^u}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{2m}^u}{\partial x_2} = \frac{\partial G_{km}^u}{\partial x_k} = G_{11m}^\varepsilon + G_{22m}^\varepsilon = G_{kkm}^\varepsilon, \\ G_{klm}^\varepsilon &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{km}^u}{\partial x_l} + \frac{\partial G_{lm}^u}{\partial x_k} \right), \quad G_{klm}^\sigma = (1 - \eta^{-2}) \theta_m \delta_{kl} + 2\eta^{-2} G_{klm}^\varepsilon, \end{aligned} \quad (18)$$

где δ_{km} – символ Кронекера, $\delta(\tau)$, $\delta(x_1, x_2)$ дельта-функции Дирака [10].

Применяя к (18) прямое двумерное интегральное преобразование Фурье по пространственным координатам x и y и интегральное преобразование Лапласа по времени, а затем выполняя последовательное обращение интегральных преобразований Фурье и Лапласа с помощью таблиц [33], находим оригиналы искомых функций Грина

$$\begin{aligned} G_{km}^u(x, y, \tau) &= \frac{\delta_{km}}{2\pi r^2} \left[\tau^2 (\tau^2 - \eta^2 r^2)_+^{-1/2} - (\tau^2 - r^2)_+^{1/2} \right] - \\ &- \frac{x_k x_m}{2\pi r^4} \sum_{j=1}^2 (-1)^j (2\tau^2 - \eta_j^2 r^2) (\tau^2 - \eta_j^2 r^2)_+^{-1/2}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
G_{klm}^{\varepsilon}(x, y, \tau) &= \frac{\eta^4}{4\pi} (x_k \delta_{lm} + x_l \delta_{km}) (\tau^2 - \eta^2 r^2)_+^{-3/2} + \\
&+ \frac{1}{2\pi r^4} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[\frac{x_k x_l x_m}{r^2} (8\tau^4 - 12\eta_j^2 r^2 \tau^2 + 3\eta_j^4 r^4) (\tau^2 - \eta_j^2 r^2)_+^{-3/2} - \right. \\
&\left. - (x_k \delta_{lm} + x_l \delta_{km} + x_m \delta_{kl}) (2\tau^2 - \eta_j^2 r^2) (\tau^2 - \eta_j^2 r^2)_+^{-1/2} \right], \\
G_{klm}^{\sigma} &= (1 - \eta^{-2}) \theta_m \delta_{kl} + 2\eta^{-2} G_{klm}^{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь и далее $f(x)_+ = \begin{cases} f(x), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Очевидно, что функции влияния G_{km}^u и G_{klm}^{ε} (а следовательно и G_{klm}^{σ}) симметричны соответственно по индексам k, m и k, l :

$$G_{km}^u = G_{mk}^u, \quad G_{klm}^{\sigma} = G_{lkm}^{\sigma}. \tag{21}$$

3. Теорема взаимности работ двумерной нестационарной теории упругости и основное разрешающее граничное интегральное уравнение

Рассмотрим некоторую двумерную область D конечную (ограниченную кривой Γ) или бесконечную. Область D может быть также и полуограниченной, например, представлять собой полуплоскость.

Рассмотрим в области D два поля перемещений, задаваемых векторами \mathbf{u} и \mathbf{v} соответственно. Для них справедлива динамическая теорема взаимности работ [34]

$$\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{u}) * \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{u}) * \mathbf{v} ds = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{v}) * \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{v}) * \mathbf{u} ds, \tag{22}$$

где \mathbf{p} – вектор напряжения на контуре Γ , символ «*» означает операцию свёртки по времени ($\mathbf{x} = (x_1, x_2)$):

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) * \mathbf{v} = \int_0^{\tau} \mathbf{F}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau - t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt.$$

В случае отсутствия массовых сил $\mathbf{F}(\mathbf{u}) \equiv 0$ в формуле (22) двумерные интегралы будут равны нулю. Далее будем полагать, что массовые силы отсутствуют. Таким образом, имея какое-либо пробное состояние \mathbf{v} , $\mathbf{p}(\mathbf{v})$, для искомого решение \mathbf{u} , $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ получаем граничное интегральное уравнение плоской нестационарной задачи

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v}_1 * \mathbf{p}(\mathbf{u}) ds = \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{v}_1) * \mathbf{u} ds. \quad (23)$$

Уравнение (23) удобно представить в компонентной записи. Как следует из постановок начально-краевых задач, в граничных условиях, которые ставятся на контуре Γ , фигурируют нормальные и касательные к контуру компоненты векторов перемещений $U_n(s, \tau)$, $U_s(s, \tau)$ и усилий $p_n(s, \tau)$, $p_s(s, \tau)$. Поэтому в качестве искомых перемещений и напряжений удобно принять касательные и нормальные к контуру перемещения u_s , u_n и касательные и нормальные напряжения σ_s , σ_n . Аналогично, в качестве пробного состояния выступают другие нормальные к контуру перемещения u'_s , u'_n и касательные и нормальные напряжения σ'_s , σ'_n . Тогда, очевидно, уравнение (23) примет такой вид

$$\int_{\Gamma} \sigma_s * u'_s + \sigma_n * u'_n ds = \int_{\Gamma} \sigma'_s * u_s + \sigma'_n * u_n ds. \quad (24)$$

Уравнение (24) является основным и будет использовано для решения начально-краевых задач.

4. Дискретный аналог граничного интегрального уравнения

Рассмотрим некоторую область D , ограниченную контуром Γ и заполненную упругой средой. С каждой точкой ξ контура Γ свяжем касательные и нормальные перемещения u_s, u_n и касательные и нормальные напряжения (или усилия) σ_s, σ_n . Эти величины задаются относительно локальной системы координат s, n точки ξ (рис. 2).

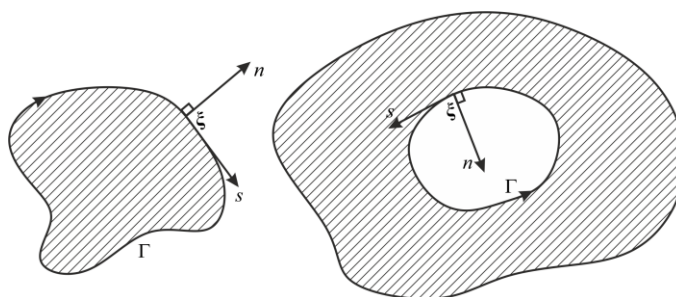


Рис. 2. Локальные системы координат и направления обхода контура Γ в случае внутренней и внешней по отношению к Γ областей.

При этом в каждой точке контура заданы касательное напряжение σ_s или касательное перемещение u_s и нормальное напряжение σ_n или нормальное перемещение u_n , т. е. две из четырех величин u_s, u_n, σ_s и σ_n известны заранее из граничных условий. Оставшиеся две величины должны быть найдены из решения задачи. Для этого используем уравнение (24).

Выберем какое-либо пробное состояние, характеризующееся перемещениями u'_s, u'_n и напряжениями σ'_s, σ'_n .

Для численного решения уравнения (24) применим дискретизацию по времени.

Для этого разделим временной интервал $[0, \tau]$ на N равных промежутков длительностью Δt : $t_k = k\Delta t$, $k = 1, 2, \dots, N$, $\tau = N\Delta t$. Перемещения и напряжения в исходной задаче аппроксимируем линейно по времени:

$$\begin{aligned} u_n(s, t) &= u_n^k(s)m_1(t) + u_n^{k-1}(s)m_2(t), \quad u_s = u_s^k(s)m_1(t) + u_s^{k-1}(s)m_2(t), \\ \sigma_n &= \sigma_n^k(s)m_1(t) + \sigma_n^{k-1}(s)m_2(t), \quad \sigma_s = \sigma_s^k(s)m_1(t) + \sigma_s^{k-1}(s)m_2(t), \\ m_1(t) &= \frac{t - t_{k-1}}{\Delta t}, \quad m_2(t) = \frac{t_k - t}{\Delta t}, \quad u_n^k(s) = u_n(s, t_k), \quad u_s^k(s) = u_s(s, t_k), \\ \sigma_n^k(s) &= \sigma_n(s, t_k), \quad \sigma_s^k(s) = \sigma_s(s, t_k). \end{aligned} \quad (25)$$

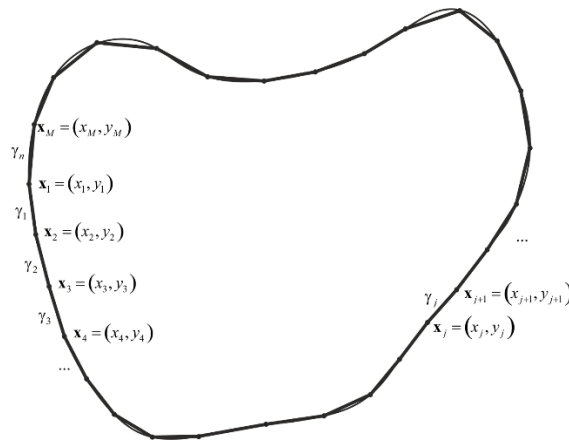
Подстановка (25) в (24) приводит последнее к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} \sigma_s^k u_{s1}^{\prime k} + \sigma_s^{k-1} u_{s2}^{\prime k} ds + \sigma_n^k u_{n1}^{\prime k} + \sigma_n^{k-1} u_{n2}^{\prime k} ds &= \\ = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} u_s^k \sigma_{s1}^{\prime k} + u_s^{k-1} \sigma_{s2}^{\prime k} + u_n^k \sigma_{n1}^{\prime k} + u_n^{k-1} \sigma_{n2}^{\prime k} ds, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} u_{n1}^{\prime k} &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u_n'(s, \tau - t) m_1(t) dt, \quad u_{n2}^{\prime k} = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u_n'(s, \tau - t) m_2(t) dt, \quad u_{s1}^{\prime k} = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u_s'(s, \tau - t) m_1(t) dt, \\ u_{s2}^{\prime k} &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u_s'(s, \tau - t) m_2(t) dt, \quad \sigma_{n1}^{\prime k} = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma_n'(s, \tau - t) m_1(t) dt, \quad \sigma_{n2}^{\prime k} = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma_n'(s, \tau - t) m_2(t) dt, \\ \sigma_{s1}^{\prime k} &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma_s'(s, \tau - t) m_1(t) dt, \quad \sigma_{s2}^{\prime k} = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma_s'(s, \tau - t) m_2(t) dt, \end{aligned}$$

Аппроксимируем контур Γ с помощью M примыкающих друг к другу прямолинейных отрезков (рис 3):

$$\Gamma \approx \bigcup_{j=1}^M \gamma_j. \quad (27)$$

Рис. 3. Аппроксимация контура Γ .

Теперь положим, что перемещения и напряжения на границе контура Γ в пределах каждого отрезка γ_j постоянны, тогда уравнение (26) примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M \sigma_s^{k,j} \int_{\gamma_j} u_{s1}^k ds + \sigma_s^{k-1,j} \int_{\gamma_j} u_{s2}^k ds + \sigma_n^{k,j} \int_{\gamma_j} u_{n1}^k ds + \sigma_n^{k-1,j} \int_{\gamma_j} u_{n2}^k ds = \\ & = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M u_s^{k,j} \int_{\gamma_j} \sigma_{s1}^k ds + u_s^{k-1,j} \int_{\gamma_j} \sigma_{s2}^k ds + u_n^{k,j} \int_{\gamma_j} \sigma_{n1}^k ds + u_n^{k-1,j} \int_{\gamma_j} \sigma_{n2}^k ds. \end{aligned} \quad (28)$$

Путем перегруппировки слагаемых с учётом нулевых начальных условий, уравнение (28) может быть переписано так

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M (u_s^{N,j} \sigma_{s,j}^{\prime N} + u_n^{N,j} \sigma_{n,j}^{\prime N} - \sigma_s^{N,j} u_{s,j}^{\prime N} - \sigma_n^{N,j} u_{n,j}^{\prime N}) = F_N, \quad (29) \\ & \sigma_{s,j}^{\prime N} = \int_{\gamma_j} \sigma_{s1}^{\prime N} ds, \quad \sigma_{n,j}^{\prime N} = \int_{\gamma_j} \sigma_{n1}^{\prime N} ds, \quad u_{s,j}^{\prime N} = \int_{\gamma_j} u_{s1}^{\prime N} ds, \quad u_{n,j}^{\prime N} = \int_{\gamma_j} u_{n1}^{\prime N} ds, \\ & F_N = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M \sigma_s^{k,j} \int_{\gamma_j} (u_{s1}^k + u_{s2}^{k+1}) ds + \sigma_n^{k,j} \int_{\gamma_j} (u_{n1}^k + u_{n2}^{k+1}) ds - \\ & - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M u_s^{k,j} \int_{\gamma_j} (\sigma_{s1}^k + \sigma_{s2}^{k+1}) ds + u_n^{k,j} \int_{\gamma_j} (\sigma_{n1}^k + \sigma_{n2}^{k+1}) ds. \end{aligned}$$

В уравнении (29) правая часть F_N – известна, т.к. содержит искомые функции на предшествующих текущему временных шагах ($k = 1, 2, \dots, N - 1$). В соответствии с заданными граничными условиями, в левой части уравнения (29) содержатся $2M$ неизвестных узловых значений перемещений или напряжений. Остальные $2M$ узловых значений заданы граничными условиями (15), (16) или (17). Кроме того, в случае контактных задач, на части границы Γ заданы соответствующие условия контакта (12) или (13).

Поэтому $2M$ слагаемых в левой части уравнения (29) в каждом конкретном случае также являются известными. Уравнение (29) должно быть скорректировано в каждом конкретном случае постановки граничных условий и условий контакта.

Также отметим, что для получения замкнутой системы разрешающих уравнений относительно $2M$ искомым узловых значений перемещений или напряжений необходимо сформировать $2M$ уравнений вида (29). Для этого необходимо обеспечить достаточное количество, а именно, $2M$ пробных решений (состояний) $u'_s, u'_n, \sigma'_s, \sigma'_n$.

5. Выбор пробных решений и формирование замкнутой системы разрешающих уравнений

Как указано в предыдущем пункте, для формирования замкнутой системы разрешающих уравнений необходимо иметь $2M$ пробных решений.

Положим, что в неограниченной упругой плоскости, заполненной упругой средой, расположен «фиктивный» контур $\tilde{\Gamma}$, положение которого совпадает с положением контура Γ . Контур $\tilde{\Gamma}$ приближенно заменим кусочно-линейной

аппроксимацией, как указано на рис. 3: $\tilde{\Gamma} \approx \bigcup_{j=1}^M \gamma_j$. В дальнейшем, так как в области,

\tilde{D} , ограниченной контуром $\tilde{\Gamma}$ и соответствующей области D , построенное решение будет совпадать с искомым, не будем делать различий между контуром Γ и фиктивным контуром $\tilde{\Gamma}$, а также между областями D и \tilde{D} .

В качестве пробных решений примем решения задач о воздействии сосредоточенных по координатам и времени нормальных P_s^i и касательных P_n^i единичных усилий, приложенных к точкам ξ_i , которые являются серединами отрезков γ_i , $i=1,2,\dots,M$ *извне* области D , ограниченной контуром Γ . Решениями этих задач являются функции влияния (см. § 1.4).

Для вычисления коэффициентов и правой части уравнения (29) удобно на каждом участке γ_j ввести локальную систему координат с осями $\tilde{x}(s_j)$ и $\tilde{y}(n_j)$, причем направление оси $\tilde{y}(n_j)$ совпадает с направлением внешней нормали к контуру Γ , а ось $\tilde{x}(s_j)$ направлена по направлению обхода контура Γ (рис. 2.4.1).

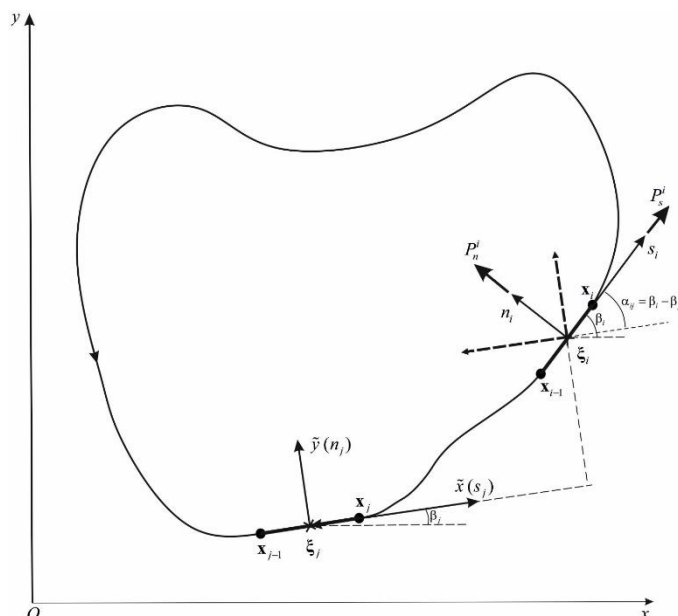


Рис. 4. Пробные состояния.

Пусть в точке ξ_i участка γ_i приложены единичное нормальное усилие P_n^i и единичное касательное усилие P_s^i . Тогда в локальной системе координат $\tilde{x}(s_j)$ и $\tilde{y}(n_j)$ суммарные проекции этих сил на координатные оси будут определяться следующими выражениями:

$$\begin{aligned} P_{\tilde{x}}^{ij} &= P_s^i \cos \alpha_{ij} - P_n^i \sin \alpha_{ij}, \\ P_{\tilde{y}}^{ij} &= P_s^i \sin \alpha_{ij} + P_n^i \cos \alpha_{ij}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\alpha_{ij} = \beta_i - \beta_j$, а β_i и β_j – углы между векторами s_i , s_j с осью Ox глобальной декартовой системы координат Oxy .

При этом пробные решения в локальной системе координат, согласно п.2, имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma'_{xy} = \sigma'_s &= P_s^i G_{121}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} - P_n^i G_{121}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&+ P_s^i G_{122}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + P_n^i G_{122}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}, \\
\sigma'_{yy} = \sigma'_n &= P_s^i G_{221}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} - P_n^i G_{221}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&+ P_s^i G_{222}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + P_n^i G_{222}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij},
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
u'_x = u'_s &= P_s^i G_{11}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} - P_n^i G_{11}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&+ P_s^i G_{12}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + P_n^i G_{12}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}, \\
u'_y = u'_n &= P_s^i G_{21}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} - P_n^i G_{21}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + \\
&+ P_s^i G_{22}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + P_n^i G_{22}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Отметим, что формулы (31) и (32) в сущности содержат два пробных решения:

одно вследствие действия единичной силы P_s^i , а другое – вследствие действия единичной силы P_n^i . Полагая в (31), (32) $P_s^i = 1$, $P_n^i = 0$, получаем первое пробное решение для элемента γ_i :

$$\begin{aligned}
\sigma'_{s1,ij} (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= G_{121}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} + G_{122}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij}, \\
\sigma'_{n1,ij} (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= G_{221}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} + G_{222}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij}, \\
u'_{s1,ij} (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= G_{11}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} + G_{12}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij}, \\
u'_{n1,ij} (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= G_{21}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij} + G_{22}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Аналогично, полагая в (31), (32) $P_s^i = 0$, $P_n^i = 1$, получаем второе пробное

решение для элемента γ_i :

$$\begin{aligned}
\sigma'_{s2,ij} (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= -G_{121}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + G_{122}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}, \\
\sigma'_{n2,ij} (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= -G_{221}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + G_{222}^\sigma (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}, \\
u'_{s2,ij} (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= -G_{11}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + G_{12}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij}, \\
u'_{n2,ij} (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) &= -G_{21}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \sin \alpha_{ij} + G_{22}^u (\tilde{x} - c_{ij}, -d_{ij}, \tau) \cos \alpha_{ij},
\end{aligned} \tag{34}$$

Поскольку число элементов γ_i равно M , то повторяя аналогичные действия для каждого элемента, как раз и получаем $2M$ необходимых пробных решений. Для каждой пары этих решений из (29) получаем два уравнения

$$\sum_{j=1}^M \left(u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N + u_n^{N,j} a_{ns,ij}^N - \sigma_s^{N,j} b_{ss,ij}^N - \sigma_n^{N,j} b_{ns,ij}^N \right) = F_{si}^N, \quad (35)$$

$$F_{si}^N = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M \sigma_s^{k,j} b_{ss,ij}^k + \sigma_n^{k,j} b_{ns,ij}^k - u_s^{k,j} a_{ss,ij}^k - u_n^{k,j} a_{ns,ij}^k,$$

$$\sum_{j=1}^M \left(u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N + u_n^{N,j} a_{ns,ij}^N - \sigma_s^{N,j} b_{ss,ij}^N - \sigma_n^{N,j} b_{ns,ij}^N \right) = F_{ni}^N, \quad (36)$$

$$F_{ni}^N = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M \sigma_s^{k,j} b_{sn,ij}^k + \sigma_n^{k,j} b_{nn,ij}^k - u_s^{k,j} a_{sn,ij}^k - u_n^{k,j} a_{nn,ij}^k,$$

$$a_{ss,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{ss,ij}^N dx, \quad a_{ns,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{ns,ij}^N dx, \quad b_{ss,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{ss,ij}^N dx, \quad b_{ns,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{ns,ij}^N dx,$$

$$b_{ss,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{ss,ij}^k dx, \quad b_{ns,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{ns,ij}^k dx, \quad a_{ss,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{ss,ij}^k dx, \quad a_{ns,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{ns,ij}^k dx,$$

$$a_{sn,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{sn,ij}^N dx, \quad a_{nn,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{nn,ij}^N dx, \quad b_{ss,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{sn,ij}^N dx, \quad b_{nn,ij}^N = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{nn,ij}^N dx,$$

$$b_{sn,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{sn,ij}^k dx, \quad b_{nn,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} U_{nn,ij}^k dx, \quad a_{sn,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{sn,ij}^k dx, \quad a_{nn,ij}^k = \int_{-0.5\Delta_j}^{0.5\Delta_j} \Sigma_{nn,ij}^k dx,$$

$$\Sigma_{ss,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} \sigma'_{s1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt, \quad \Sigma_{ns,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} \sigma'_{n1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt,$$

$$U_{ss,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} u'_{s1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt, \quad U_{ns,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} u'_{n1,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt,$$

$$\Sigma_{sn,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} \sigma'_{s2,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt, \quad \Sigma_{nn,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} \sigma'_{n2,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt,$$

$$U_{sn,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} u'_{s2,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt, \quad U_{nn,ij}^N = \int_{\tau-\Delta t}^{\tau} u'_{n2,ij}(x-c_{ij}, -d_{ij}, \tau-t) m_1(t) dt,$$

$$\begin{aligned}
U_{ss,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_{s1,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_1(t)dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u'_{s1,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_2(t)dt, \\
U_{ns,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_{n1,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_1(t)dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u'_{n1,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_2(t)dt, \\
\Sigma_{ss,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_{s1,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_1(t)dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sigma'_{s1,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_2(t)dt, \\
\Sigma_{ns,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_{n1,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_1(t)dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sigma'_{n1,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_2(t)dt, \\
U_{sn,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_{s2,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_1(t)dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u'_{s2,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_2(t)dt, \\
U_{nn,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} u'_{n2,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_1(t)dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u'_{n2,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_2(t)dt, \\
\Sigma_{sn,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_{s2,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_1(t)dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sigma'_{s2,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_2(t)dt, \\
\Sigma_{nn,ij}^k &= \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sigma'_{n2,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_1(t)dt + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \sigma'_{n2,ij}(x-c_{ij},-d_{ij},\tau-t)m_2(t)dt.
\end{aligned}$$

Отметим, что коэффициенты систем уравнений (35), (36), представляющие собой соответствующие интегралы от функций влияния упругой плоскости, могут содержать особенности порядка $x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. В случае, когда $\alpha \leq 1/2$ соответствующая особенность будет слабой, в том смысле, что интеграл от функции с такой особенностью существует как несобственный интеграл второго рода. В случае же когда $\alpha > 1/2$, особенность является сильной, а соответствующий интеграл является сингулярным и понимается в смысле главного значения:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{x^\alpha} = \int_{-a}^a \frac{f(x) - f(0)}{x^\alpha} dx, \alpha=1;$$

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{x^\alpha} = \int_{-a}^a \frac{f(x) - f(0) - \sum_{m=1}^{[\alpha]} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m}{x^\alpha} dx + \sum_{m=1}^{[\alpha]} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \int_{-a}^a \frac{dx}{x^{\alpha-m}}, \alpha > 0,$$

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{x^{\alpha-m}} = -\frac{a^{m-\alpha-1}}{\alpha-m+1} \left[1 + (-1)^{m-\alpha-1} \right].$$

где $[\alpha]$ означает целую часть числа α .

Заключение

Приведена постановка и разработан метод решения новых плоских нестационарных контактных задач для абсолютно жестких штампов и упругого полупространства, содержащего заглубленную полость с гладкой границей произвольной геометрии. Построено разрешающее граничное интегральное уравнение и предложен его дискретный аналог. С использованием функций Грина для упругой полуплоскости задача сведена к решению системы алгебраических уравнений относительно узловых граничных значений искомых функций на каждом шаге по времени.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ,
проект 20-08-00707 А.*

Библиографический список

1. Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries // Journal of Mathematical Sciences, 2009, vol. 162, no. 2, pp. 246 – 253. DOI: [10.1007/s10958-009-9635-4](https://doi.org/10.1007/s10958-009-9635-4)

2. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) // *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 239 – 247. DOI: [10.3103/S0025654411020129](https://doi.org/10.3103/S0025654411020129).
3. Tarlakovskii and G.V. Fedotenkov Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145 – 152. DOI: [10.3103/S1052618814010178](https://doi.org/10.3103/S1052618814010178).
4. Gregory V. Fedotenkov, Elena Yu. Mikhailova, Elena L. Kuznetsova, Lev N. Rabinskiy Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2016, vol. 111, no. 2, pp. 331 - 342. DOI: [10.12732/ijpam.v111i2.16](https://doi.org/10.12732/ijpam.v111i2.16).
5. Fedotenkov G.V., Suворov Ye.M., Tarlakovskii D.V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 511 - 518. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015>
6. Rabinskiy L.N., Tushavina O.V., Fedotenkov G.V. Plain non-stationary problem of the effect of a surface load on an elastic-porous half-space // *Asia Life Sciences*, 2019, vol. 28, no. 1, pp. 149 - 162.
7. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space // *Shell Structures: Theory and Applications*, 2017, vol. 4, pp. 301 - 304. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315166605-67>

8. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall // *Shell Structures: Theory and Applications*, 2017, vol. 4, pp 305 - 308. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315166605-68>
9. Fedotenkov G.V., Kalinchuk V.V., Mitin A.Y. Three-Dimensional Non-stationary Motion of Timoshenko-Type Circular Cylindrical Shell // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 3, pp. 311 – 320. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080219030107>
10. Митин А.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт цилиндрической оболочки и абсолютно твердого эллиптического параболоида // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=107884>
11. Лурье С.А., Соляев Ю.О., Нгуен К., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Исследование локальных эффектов в распределении температурных напряжений на контактных границах слоистых сред // Труды МАИ. 2013. № 71. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=47084>
12. Ляпин А.А., Селезнёв М.Г., Селезнёв Н.М. Динамическая контактная задача для трехслойного полупространства с цилиндрической полостью // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. 2008. № 4. С. 70 - 75.
13. Aleksandrov V.M., Mark A.V. Quasistatic periodic contact problem for a viscoelastic layer, a cylinder, and a space with a cylindrical cavity // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2009, vol. 50, no. 5, pp. 866 - 871. DOI: [10.1007/s10808-009-0117-8](https://doi.org/10.1007/s10808-009-0117-8)

14. Божкова Л.В., Норицина Г.И., Рябов В.Г. Контактная задача для кольцевого упругого покрытия цилиндрической полости в твердом теле // Известия московского государственного технического университета МАМИ. 2015. Т. 4. № 4 (26). С. 9 - 13.
15. Pozharskii D.A., Pozharskaya E.D. Contact problems for an elastic inhomogeneous body with a cylindrical cavity // PNRPU Mechanics Bulletin, 2018, no. 4, pp. 200 - 208. DOI: [10.15593/perm.mech/2018.4.18](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.4.18)
16. Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Бабешко В.А. Метод интегрального уравнения в теории слоев с множественными полостями или штольнями // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. 2017. Т. 14. № 4-1. С. 30 - 39.
17. Рожкова Е.В., Абдукадыров Ф.Э., Рузиева Н.Б. Алгоритм решения задачи о взаимодействии плоской упругой волны сжатия с цилиндрической подкрепленной полостью в упругой среде // Приложение математики в экономических и технических исследованиях. 2019. Т. 1. № 9. С. 125 - 129.
18. Kalentev E.A. Stress-strain state of an elastic half-space with a cavity of arbitrary shape // International Journal of Mechanical and Materials Engineering, 2018, vol. 13, no. 8, DOI: <https://doi.org/10.1186/s40712-018-0094-x>
19. Пуцин Р.В., Пыхалов А.А. Анализ напряжений замковой части рабочих лопаток авиационных двигателей с конечно-элементным решением контактной задачи теории упругости // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112862>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-11](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-11).

20. Туранов Р.А., Пыхалов А.А. Анализ работы конструкции соединения типа «ухо-вилка» с применением метода конечных элементов и решением контактной задачи теории упругости // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102119>
21. Alielahi H., Kamalian M. Adampira M. A BEM investigation on the influence of underground cavities on the seismic response of canyons // Acta Geotechnica, 2016, vol. 11, pp. 391 – 413. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11440-015-0387-7>
22. Alielahi H., Adampira M. Seismic Effects of Two-Dimensional Subsurface Cavity on the Ground Motion by BEM: Amplification Patterns and Engineering Applications // International Journal of Civil Engineering, 2016, vol. 14, pp. 233 – 251. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40999-016-0020-7>
22. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Petrov A.N. A numerical study of wave propagation on poroelastic half-space with cavities by use the BEM and Runge-Kutta method // Materials Physics and Mechanics, 2016, vol. 28, no. 1-2, pp. 96 - 100.
23. Игумнов Л.А., Марков И.П. Моделирование динамики трехмерных линейных электроупругих тел с отверстиями с помощью метода граничных элементов // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т. 79. № 3. С. 348 - 356. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-348-356>
24. Zhao J., Vollebregt E.A., Oosterlee, C.W. Extending the BEM for Elastic Contact Problems Beyond the Half-Space Approach // Mathematical Modelling and Analysis, 2016, vol. 21, no. 1, pp. 119 - 141. DOI: <https://doi.org/10.3846/13926292.2016.1138418>

25. Schanz M., Rüberg T., Kielhorn L. Time-domain BEM: Numerical Aspects of Collocation and Galerkin Formulations // Recent Advances in Boundary Element Methods: A Volume to Honor Professor Dimitri Beskos, 2009, vol. 1, pp. 415 - 432. DOI:[10.1007/978-1-4020-9710-2_27](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9710-2_27)
26. Carrer J.A.M., Pereira W., Mansur W.J. Two-dimensional elastodynamics by the time-domain boundary element method: Lagrange interpolation strategy in time integration // Engineering Analysis With Boundary Elements, 2012, vol. 36, pp. 1164 - 1172. DOI:[10.1016/J.ENGANABOUND.2012.01.004](https://doi.org/10.1016/J.ENGANABOUND.2012.01.004)
27. Weidong Lei, Duofa Ji, Guopeng Zhu. Time-domain boundary element method with von Mises model for solving 2-D elastoplastic dynamic problems // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2019, vol. 41, pp. 1 - 13. DOI:[10.1007/s40430-019-1770-3](https://doi.org/10.1007/s40430-019-1770-3)
28. Delfim Soares. Dynamic analysis of elastoplastic models considering combined formulations of the time-domain boundary element method // Engineering Analysis With Boundary Elements, 2015, vol. 55, pp. 28 - 39. DOI:[10.1016/J.ENGANABOUND.2014.11.014](https://doi.org/10.1016/J.ENGANABOUND.2014.11.014)
29. Schanz M., Antes H. Application of ‘Operational Quadrature Methods’ in Time Domain Boundary Element Methods // Meccanica, 1997, vol. 32, pp. 179 – 186. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1004258205435>
30. Kielhorn L., Schanz M. Convolution Quadrature Method based symmetric Galerkin Boundary Element Method for 3-d elastodynamics // International Journal for Numerical

Methods in Engineering, 2008, vol. 76, no. 11, pp. 1724 – 1746. DOI:

<http://dx.doi.org/10.1002/nme.2381>

31. Schanz M., Ye W., Xiao J. Comparison of the convolution quadrature method and enhanced inverse FFT with application in elastodynamic boundary element method //

Computational Mechanics, 2016, vol. 57, pp. 523 – 536. DOI:

<https://doi.org/10.1007/s00466-015-1237-z>

32. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: учебник для вузов. - М.: Наука, 2000. - 214 с.

33. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах: учебное пособие. – М.: Физматлит, 2004. – 472 с.

34. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Общие соотношения и вариационные принципы теории упругости: учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. – 144

с.