УДК 533.95 : 532.517.4

Модель замыкания для процессов переноса заряженных частиц в турбулентной слабоионизованной плазме

Ульданов С.В.

Получена модель замыкания для динамики заряженных частиц в турбулентной слабоионизованной плазме. Доказано, что перенос, обусловленный корреляцией пульсаций концентраций и градиента пульсаций потенциала равен нулю. Предложена модель для практических расчетов процессов переноса в пограничном слое.

Исследование влияния турбулентности на процессы переноса обусловлено запросами ряда прикладных дисциплин и имеет научную значимость. Рассматривается динамика заряженных частиц в турбулентной слабоионизованной плазме, в области, где существенны разделение зарядов и наличие самосогласованного электрического поля (задача теории электрического зонда [1]).

Уравнения динамики ионов и электронов в приближении слабой ионизации, когда движение заряженных компонент не влияет на движение нейтрального газа, в отсутствие магнитного поля имеют вид [1]:

$\partial n_i/\partial t + \mathrm{div}(n_i (\mathbf{v}_o - D_i/n_i\nabla n_i - Zb_i\nabla\varphi)) = 0$, (1.1)

$\partial n_e/\partial t + \mathrm{div}(n_e (\mathbf{v}_o - D_e/n_e\nabla n_e + b_e\nabla\varphi)) = 0$, (1.2)

$\Delta\varphi = e(n_e - Zn_i)/\varepsilon_0$ (1.3),

где n - концентрация, v - скорость, D - коэффициент диффузии, b - коэффициент подвижности, индексы i,e,o относятся к ионам, электронам и нейтралам соответственно, φ - потенциал, e - модуль заряда электрона, Z - зарядовое число иона, ε_0 - электрическая постоянная, t - время.

Следуя методу Рейнольдса представим все величины в виде суммы осредненной (обозначаемой угловыми скобками) и пульсирующей величин (обозначаемой штрихом). Уравнение для ионов (1.1) примет вид:

$\partial(\langle n_i\rangle + n_i')/\partial t + \mathrm{div}((\langle n_i\rangle + n_i')(\langle \mathbf{v}_o\rangle + \mathbf{v}_o') - D_i\nabla(\langle n_i\rangle + n_i') - Zb_i(\langle n_i\rangle + n_i')\nabla(\langle \varphi\rangle + \varphi')) = 0$. (2)

Осредним уравнение (2). Тогда

$\partial\langle n_i\rangle /\partial t + \mathrm{div}(\langle n_i\rangle \langle \mathbf{v}_o\rangle + \langle n_i'\mathbf{v}_o'\rangle - D_i\nabla\langle n_i\rangle - Zb_i\langle n_i\rangle \nabla\langle \varphi\rangle - Zb_i\langle n_i'\nabla\varphi'\rangle) = 0$. (3)

В этом уравнении для средней концентрации присутствуют два слагаемых обусловленных турбулентностью. Задача замыкания выразить их через средние величины.

Первое из них - корреляции пульсаций концентрации и скорости можно выразить используя понятие длины смешения [2]:

$\langle n_i'\mathbf{v}_o'\rangle = -D_T\nabla\langle n_i\rangle$, (4)

где тензор турбулентной диффузии D_T можно определить через пульсации скорости v' и длину пути смешения l' [2]

$D_{Tik} = \delta_{ik}l'v_i'$ (5).

Для распределения в потоке этих величин можно использовать экспериментальные результаты либо модели, позволяющие вычислять l' и v' (например k-ε модель).

Рассмотрим второе слагаемое - корреляции пульсации концентрации и градиента пульсаций потенциала. Поля случайных величин - концентраций ионов и электронов и потенциала можно разложить на сумму плоских волн со случайными, некоррелированными между собой, амплитудами [3]:

$n_i'(\mathbf{r}) = \int \exp(i\mathbf{k}\cdot \mathbf{r})dS_i(\mathbf{k})$, (6.1)

$n_e'(\mathbf{r}) = \int \exp(i\mathbf{k}\cdot \mathbf{r})dS_e(\mathbf{k})$, (6.2)

$\varphi'(\mathbf{r}) = \int \exp(i\mathbf{k}\cdot \mathbf{r})dS_\varphi(\mathbf{k})$, (6.3)

где справедливы равенства [3]:

$\langle dS(\mathbf{k})\rangle = 0$, (7.1)

$\langle dS_i(\mathbf{k}_1)dS_i(\mathbf{k}_2)\rangle = \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)F(\mathbf{k}_1)d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2$, (7.2)

$\langle dS_i(\mathbf{k}_1)dS_e(\mathbf{k}_2)\rangle = \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_1)d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2$. (7.3)

Имеем

$\langle \mathrm{div}(n_i'\nabla\varphi')\rangle = \langle \nabla n_i'\cdot \nabla\varphi'\rangle + \langle n_i'\Delta\varphi'\rangle = \langle \nabla n_i'\cdot \nabla\varphi'\rangle + \langle n_i'(n_e' - Zn_i')\rangle e/\varepsilon_0$, (8)

где использовано уравнение для пульсаций потенциала, полученное вычитанием из исходного уравнения Пуассона (1.3) осредненного:

$\Delta\varphi' = (n_e' - Zn_i')e/\varepsilon_0$. (9)

Согласно определению производной случайного поля [3] можно интегрировать по координате под интегралом по волновому вектору. Тогда легко получить уравнение для спектральных амплитуд:

$dS_\varphi(\mathbf{k}) = e/(k^2\varepsilon_0)(dS_e(\mathbf{k}) - ZdS_i(\mathbf{k}))$. (10)

Далее

$\nabla n_i'\cdot \nabla\varphi' = \int \exp(i\mathbf{k}_1\cdot \mathbf{r})i\mathbf{k}_1dS_i(\mathbf{k}_1) \cdot \int \exp(i\mathbf{k}_2\cdot \mathbf{r})i\mathbf{k}_2e/(k^2\varepsilon_0)(dS_e(\mathbf{k}_2) - ZdS_i(\mathbf{k}_2)) =$

$= \int\int \exp(i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot \mathbf{r})(\mathbf{k}_1\cdot \mathbf{k}_2)\, e/(k^2\varepsilon_0)dS_i(\mathbf{k}_1)(ZdS_i(\mathbf{k}_2) - dS_e(\mathbf{k}_2))$. (11)

Осредняя и учитывая (7.1-7.3) получим

$\langle \nabla n_i'\cdot \nabla\varphi'\rangle = \int\int \exp(i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot \mathbf{r})(\mathbf{k}_1\cdot \mathbf{k}_2)\, e/(k^2\varepsilon_0) \langle dS_i(\mathbf{k}_1)(ZdS_i(\mathbf{k}_2) - dS_e(\mathbf{k}_2))\rangle$

$= \int \exp(i2\mathbf{k}\cdot \mathbf{r})e/\varepsilon_0(ZF(\mathbf{k}) - B(\mathbf{k}))d\mathbf{k}$. (12)

Аналогично

$n_i'(n_e' - Zn_i')e/\varepsilon_0 = \int \exp(i\mathbf{k}_1\cdot \mathbf{r})dS_i(\mathbf{k}_1) \int \exp(i\mathbf{k}_2\cdot \mathbf{r})e/\varepsilon_0(dS_e(\mathbf{k}_2) - ZdS_i(\mathbf{k}_2)) =$

$= \int\int \exp(i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot \mathbf{r})e/\varepsilon_0 dS_i(\mathbf{k}_1)(dS_e(\mathbf{k}_2) - ZdS_i(\mathbf{k}_2))$. (13)

Осредняя получим

$\langle n_i'(n_e' - Zn_i')e/\varepsilon_0\rangle = \int\int \exp(i2\mathbf{k}\cdot \mathbf{r})e/\varepsilon_0(B(\mathbf{k}) - ZF(\mathbf{k}))d\mathbf{k}$. (14)

Складывая (12) и (14) получаем

$\mathrm{div}\langle -Zb_i n_i'\nabla\varphi'\rangle = 0$. (15.1)

Аналогичный результат получается для электронов

$\mathrm{div}\langle -b_e n_e'\nabla\varphi'\rangle = 0$. (15.2)

Таким образом получаем систему уравнений для расчета средних величин (угловые скобки опущены)

$\partial n_i/\partial t + \mathrm{div}(n_i (\mathbf{v}_o - D_i(1/n_i\nabla n_i + Ze/(kT_i)\nabla\varphi) - D_T/n_i\nabla n_i) = 0$, (16.1)

$\partial n_e/\partial t + \mathrm{div}(n_e (\mathbf{v}_o - D_e(1/n_e\nabla n_e - e/(kT_e)\nabla\varphi) - D_T/n_e\nabla n_e) = 0$, (16.2)

$\Delta\varphi = (n_e - Zn_i)e/\varepsilon_0$. (16.3)

где использованы соотношения Энштейна между коэффициентами диффузии и подвижности.

Для определения тензора турбулентной диффузии необходимо воспользоваться экспериментальными данными о длине пути смешения и пульсационной скорости.

Для расчета процессов переноса в пограничном слое можно предложить следующую модель. Рассмотрим движущуюся в полупространстве над плоской стенкой слабоионизованную плазму.

Направим ось x вдоль потока, ось y по нормали от стенки. Распределение средней скорости по нормали к стенке в логарифмическом подслое ($40\nu/u_\tau < y < 10^3$) имеет вид [2]:

$\langle v\rangle = u_\tau/\kappa \ln(yu_\tau/\nu) + 5.1u_\tau$, , (17.1)

где $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ - характерная скорость, τ_w - напряжение трения на стенке. В вязком подслое ($y < 40\nu/u_\tau$) распределение средней скорости по нормали к стенке имеет вид:

$\langle v\rangle = yu_\tau^2/\nu$, (17.2)

формула Ван-Дриста для l' приближенно справедлива во всем пограничном слое

$l' = \kappa y(1 - \exp(-yu_\tau/(A^+\nu)))$. (18)

Константы имеют значения

$\kappa = 0.4$, $A^+ = 26$ (19).

Распределение пульсаций можно приближенно задать по результатам Клебанова и Лауфера, приведенными в [2].

Выберем в качестве масштабов следующие:

$M_v = u_\tau$,

$M_L = \nu/u_\tau$,

$M_t = M_L/M_v$,

$M_\varphi = (kT_i)/(Ze)$,

$M_{ni} = M_n = n_\infty$,

$M_{ne} = ZM_n$,

$r_D = ((\varepsilon_0 kT_i)/(n_\infty(Ze)^2))^{1/2}$.

Обезразмеривая получим систему уравнений для расчетов процессов переноса в пограничном слое:

$\partial n_i/\partial t + \mathrm{div}(n_i (\mathbf{v}_o - Sc_i^{-1}(1/n_i \nabla n_i + Ze/(kT_i)\nabla\varphi) - D_T/n_i \nabla n_i) = 0$, (20.1)

$\partial n_e/\partial t + \mathrm{div}(n_e (\mathbf{v}_o - Sc_i^{-1}(1/n_e \nabla n_e - e/(kT_e)\nabla\varphi) - D_T/n_e \nabla n_e) = 0$, (20.2)

$\Delta\varphi = (M_L/r_D)^2(n_e - Zn_i)$, (20.3)

$D_{Tik} = \delta_{ik} l' v_i'$, (20.4)

$l' = 0.4\, y(1 - \exp(-y/26)$, (20.5)

$\mathbf{v}_o = (0, 2.5 \ln y + 5.1, 0)$, при $y > 40$, (20.6)

$\mathbf{v}_o = (0, y, 0)$, при $y < 40$, (20.7)

$v_x' = f_x(y)$, $f_x(y > 60) \approx 2.3$, (20.8)

$v_y' = f_y(y)$, $f_y(y > 40) \approx 0.9$, (20.9)

$v_z' = f_z(y)$, $f_z(y > 80) \approx 1.7$. (20.10)

Граничные и начальные условия, методика расчета приведены в [1].

Основная величина - напряжение трения может быть оценена следующим образом [4]:

$c_f \equiv \tau_w/(1/2\rho v_o^2) = 0.075\, Re^{-1/4}$. (21)

Для типичных параметров потока горячего нейтрального газа

$Re = 10^4$, $\rho = 1$ кг/м^3, $v_o = 100$ м/с, $\nu = 5\cdot 10^{-5}$ м^2/с

имеем

$u_\tau = 6$ м/с, $M_L = 0.82\cdot 10^{-4}$ м, $r_D = 10^{-7}\div 10^{-4}$ м.

Оценим порядок величин на безразмерном расстоянии ~ 200:

$Sc_i \sim 1$, $Sc_e = Sc_i ((m_i T_e)/(m_e T_i))^{1/2} \sim 80$, $\nabla\varphi \sim 5$, $l'v' \sim 80$.

Отсюда видно, что влияние турбулентности на процессы переноса значительно - диффузия ионов определяется в основном турбулентной диффузией, суммарный коэффициент диффузии электронов в 2-3 раза больше. Однако при приближении к стенке турбулентная диффузия уменьшается до нуля и требуются расчеты чтобы определить влияние турбулентности на процессы переноса вблизи стенки.

1. Алексеев Б.В., Котельников В.А. Зондовый метод диагностики плазмы. - М.:Энергоатомиздат, 1988.- 236 с.

2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика.- М.:Наука, 1965, т.1.- 640 с.

3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика.- М.:Наука, 1967, т.2.- 720 с.

4. Турбулентность /под ред. Брэдшоу П.- М.:Машиностроение, 1980.- 343 с., пер. с англ.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ульданов Сергей Владимирович, аспирант кафедры прикладной физики Московского государственного авиационного института (технического университета).