УДК 519.21

Простейшая прогнозная модель временного ряда и ее реакция на линейное и параболическое входные воздействия

Семаков С.Л.*, Семаков И.С.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: slsemakov@yandex.ru*

***e-mail: champione7@yandex.ru*

Аннотация

Исследуется простейшая прогнозная модель временного ряда. Выведены формулы для прогноза по данной модели в случаях, когда исходный временной ряд представляет собой одиночный импульс, линейное воздействие или параболическое воздействие. Показано, что только в случае одиночного импульса модель дает удовлетворительные результаты в смысле адекватности прогноза.

Ключевые слова: временной ряд, прогноз, параметр сглаживания.

1. Введение

Прогнозированию временных рядов посвящена обширная литература (см., например, [1-5]). Оно используется при решении различных прикладных задач, в том числе, и в аэрокосмической области (см., например, [6]). Под временным рядом понимается множество наблюдений какой-либо физической величины, получаемых последовательно через равные промежутки (шаги) времени. Пусть x_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$,

N, − исходный временной ряд. Обозначим через L_t, $t = 0, 1, 2, \ldots, N$, некоторый сглаженный (усредненный, выровненный) ряд, полученный из x_t. В литературе ряд L_t называют уровнем исходного ряда; он играет центральную роль при разработке различных способов прогнозирования значений исследуемого ряда x_t для $t>N$. Одним из распространенных приемов построения ряда L_t является так называемое экспоненциальное сглаживание (см., например, [7-15]), которое задается рекуррентной формулой

$$L_t = \alpha x_t + (1-\alpha)L_{t-1}, \tag{1}$$

где $\alpha \in (0;1)$ – параметр сглаживания. Формулу (1) можно переписать в виде

$$L_t = L_{t-1} + \alpha(x_t - L_{t-1}), \tag{2}$$

а также в виде

$$L_t = \alpha x_t + (1-\alpha)L_{t-1} = \alpha x_t + (1-\alpha)(\alpha x_{t-1} + (1-\alpha)L_{t-2}) = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + (1-\alpha)^2 L_{t-2} = \ldots =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{N-1} (1-\alpha)^i x_{t-i} + (1-\alpha)^N L_0, \tag{3}$$

где $N = t$ – количество членов ряда, L_0 – величина, необходимая для первого применения формулы (1); обычно полагают $L_0 = \alpha x_0$.

В качестве примера запишем формулу (3) при $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$L_t = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{4}x_{t-1} + \frac{1}{8}x_{t-2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n x_{t-(n-1)} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^N L_0.$$

Смысл постоянной α можно охарактеризовать так: чем больше α, тем с большим весом учитывается последняя предыстория (слагаемое αx_t в формуле (3)). Нежелательный момент при выборе больших значений α состоит в том, что если значение x_t оказалось нетипичным, т. е. произошел выброс, то и «плохим» (в смысле операции сглаживания) окажется значение L_t.

Простейшая прогнозная модель имеет вид

$$\hat{x}_\tau(t) = L_t, \tag{4}$$

где $\hat{x}_\tau(t)$ – прогноз, сделанный в момент t на τ единиц времени (шагов) вперед. В настоящей работе подробно исследуются и доказываются результаты применения простейшей прогнозной модели к некоторым конкретным исходным временным рядам x_t. Без вывода эти результаты приведены, в частности, в [16].

2. Реакция на одиночный импульс

Выясним, какой вид будет иметь ряд L_t, если исходный ряд x_t представляет собой одиночный импульс в виде всплеска (подобие ограниченной дельта-функции):

$$x_t = 1 \text{ при } t = 0, \quad x_t = 0 \text{ при } t > 0. \tag{5}$$

По формуле (3) при $L_0 = \alpha x_0$ получим

$$L_t = \alpha(1-\alpha)^t. \tag{6}$$

Непрерывную функцию переменного t, заданную правой частью равенства (6), будем рассматривать как непрерывную аппроксимация временного ряда (5). Тогда если рассмотреть правую часть равенства (6) при двух значениях $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, то при большей постоянной сглаживания $\alpha = \alpha_2$ получим лучшую аппроксимацию исходного ряда (5).

Пусть теперь исходный ряд представляет собой функцию Хевисайда (ступеньку):

$$x_t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad x_t = 1 \quad \text{при} \quad t > 0.$$

По формуле (3) получим

$$L_t = \alpha(1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \ldots + (1-\alpha)^{t-1}) = \alpha \frac{1-(1-\alpha)^t}{1-(1-\alpha)} = 1-(1-\alpha)^t.$$

Как видно, и в этом случае ситуация аналогичная: модель с большей постоянной сглаживания $\alpha = \alpha_2$ реагирует на импульс в виде ступенчатого воздействия более адекватно, чем модель с меньшей постоянной $\alpha = \alpha_1$.

Отметим, что необходимым условием адекватности отклика L_t на импульсное воздействие x_t является стремление к нулю ошибки $(x_t - L_t)$ при $t \to \infty$, т. е. условие

$$\lim_{t \to \infty}(x_t - L_t) = 0. \tag{7}$$

В обоих рассмотренных случаях это условие выполняется.

3. Реакция на линейное воздействие

Выберем теперь в качестве исходного временного ряда линейный рост:

$$x_t = t, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Для L_t по формуле (3) получим:

$$L_t = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i (t-i) = \alpha(t + (1-\alpha)(t-1) + (1-\alpha)^2 (t-2) + \ldots + (1-\alpha)^{t-1}(t-(t-1))) =$$

$$= \alpha(t + (1-\alpha)t + (1-\alpha)^2 t + \ldots + (1-\alpha)^{t-1} t - \left[(1-\alpha)\cdot 1 + (1-\alpha)^2 \cdot 2 + \ldots + (1-\alpha)^{t-1}(t-1)\right]) =$$

$$= \alpha t(1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \ldots + (1-\alpha)^{t-1}) - \alpha(1-\alpha)(1 + 2(1-\alpha) + 3(1-\alpha)^2 + \ldots + (t-1)(1-\alpha)^{t-2}). \tag{9}$$

Упростим сумму $1+2(1-\alpha)+3(1-\alpha)^2+...+(t-1)(1-\alpha)^{t-2}$. Обозначим для краткости $\beta=1-\alpha$. Тогда

$$1+2\beta+3\beta^2+...+(t-1)\beta^{t-2}=\frac{d}{d\beta}(\beta+\beta^2+...+\beta^{t-1})=\frac{d}{d\beta}(\beta\frac{1-\beta^{t-1}}{1-\beta})=\frac{d}{d\beta}\frac{\beta-\beta^t}{1-\beta}=$$

$$=\frac{1-t\beta^{t-1}+t\beta^t-\beta^t}{(1-\beta)^2},$$

так что

$$1+2(1-\alpha)+3(1-\alpha)^2+...+(t-1)(1-\alpha)^{t-2}=\frac{1-t(1-\alpha)^{t-1}+t(1-\alpha)^t-(1-\alpha)^t}{\alpha^2}. \qquad (10)$$

С учетом этого из (9) найдем:

$$L_t=\alpha t\frac{1-(1-\alpha)^t}{1-(1-\alpha)}-\alpha(1-\alpha)\frac{1-t(1-\alpha)^{t-1}+t(1-\alpha)^t-(1-\alpha)^t}{\alpha^2}=$$

$$=t-\frac{t(1-\alpha)^t\alpha}{\alpha}-\frac{(1-\alpha)-t(1-\alpha)^t+t(1-\alpha)^{t+1}-(1-\alpha)^{t+1}}{\alpha}=$$

$$=t-\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(t(1-\alpha)^{t-1}\alpha+1-t(1-\alpha)^{t-1}+t(1-\alpha)^t-(1-\alpha)^t\right)=t-\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-(1-\alpha)^t\right).$$

Видим, что

$$\lim_{t\to\infty}(x_t-L_t)=\frac{1-\alpha}{\alpha},$$

и условие (7) в случае исходного ряда (8) нарушается.

4. Реакция на параболическое воздействие

Пусть теперь входным воздействием является параболический рост:

$$x_t=t^2, \quad t\ge 0.$$

Для отклика L_t в соответствии с (3) получим

$$L_t = \alpha\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i x_{t-i} = \alpha\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i (t-i)^2 = \alpha\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i (t^2-2ti+i^2) =$$

$$= \alpha t^2\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i - 2\alpha t\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i i + \alpha\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i i^2 \,. \qquad (11)$$

Вычислим последовательно все суммы в правой части равенства (11) . Первая сумма равна

$$\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i = 1+(1-\alpha)+(1-\alpha)^2+\ldots+(1-\alpha)^{t-1} = \frac{1-(1-\alpha)^t}{1-(1-\alpha)} = \frac{1-(1-\alpha)^t}{\alpha}\,. \qquad (12)$$

Вторая сумма с учетом (10) равна

$$\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i i = (1-\alpha)+2(1-\alpha)^2+3(1-\alpha)^3+\ldots+(t-1)(1-\alpha)^{t-1} =$$

$$= (1-\alpha)\left[1+2(1-\alpha)+3(1-\alpha)^2+\ldots+(t-1)(1-\alpha)^{t-2}\right] = (1-\alpha)\frac{1-t(1-\alpha)^{t-1}+t(1-\alpha)^t-(1-\alpha)^t}{\alpha^2}\,. \quad (13)$$

Обозначив для краткости $\beta = 1-\alpha$ и $m = t-1$, для третьей суммы имеем

$$\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i i^2 = \beta+4\beta^2+9\beta^3+\ldots+m^2\beta^m = \beta(1+4\beta+9\beta^2+\ldots+m^2\beta^{m-1})\,.$$

Заметим, что

$$1+2\beta+3\beta^2+\ldots+m\beta^{m-1} = \frac{d}{d\beta}\left(\beta+\beta^2+\ldots+\beta^m\right) = \frac{d}{d\beta}\frac{\beta-\beta^{m+1}}{1-\beta} = \frac{1-m\beta^m-\beta^m+m\beta^{m+1}}{(1-\beta)^2},$$

$$\beta(1+2\beta+3\beta^2+\ldots+m\beta^{m-1}) = \beta+2\beta^2+3\beta^3+\ldots+m\beta^m = \frac{\beta-m\beta^{m+1}-\beta^{m+1}+m\beta^{m+2}}{(1-\beta)^2},$$

$$\frac{d}{d\beta}\left(\beta+2\beta^2+3\beta^3+\ldots+m\beta^m\right) = \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\beta-m\beta^{m+1}-\beta^{m+1}+m\beta^{m+2}}{(1-\beta)^2}\right),$$

$$1+4\beta+9\beta^2+\ldots+m^2\beta^{m-1} = \frac{\left(1-(m+1)^2\beta^m+m(m+2)\beta^{m+1}\right)(1-\beta)+2\left(\beta-(m+1)\beta^{m+1}+m\beta^{m+2}\right)}{(1-\beta)^3},$$

$$\beta+4\beta^2+9\beta^3+\ldots+m^2\beta^m = \beta\frac{\left(1-(m+1)^2\beta^m+m(m+2)\beta^{m+1}\right)(1-\beta)+2\left(\beta-(m+1)\beta^{m+1}+m\beta^{m+2}\right)}{(1-\beta)^3}.$$

Поменяв β на $1-\alpha$, а m на $t-1$, получим

$$\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i i^2 = (1-\alpha)\frac{\left(1-t^2(1-\alpha)^{t-1}+(t^2-1)(1-\alpha)^t\right)\alpha + 2\left(1-\alpha-t(1-\alpha)^t+(t-1)(1-\alpha)^{t+1}\right)}{\alpha^3}. \qquad (14)$$

Переписывая теперь правую часть равенства (11) с учетом равенств (12) – (14), находим

$$L_t = t^2\left(1-(1-\alpha)^t\right) - 2t\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-t(1-\alpha)^{t-1}+t(1-\alpha)^t-(1-\alpha)^t\right)+$$

$$+\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\left[\left(1-t^2(1-\alpha)^{t-1}+(t^2-1)(1-\alpha)^t\right)\alpha+2\left(1-\alpha-t(1-\alpha)^t+(t-1)(1-\alpha)^{t+1}\right)\right]=$$

$$=t^2\left[1+\frac{2(1-\alpha)^t}{\alpha}-\frac{2}{\alpha}(1-\alpha)^{t+1}-(1-\alpha)^t-\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)^t+\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)^{t+1}\right]+$$

$$+t\left[-\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}+\frac{2}{\alpha}(1-\alpha)^{t+1}-\frac{2}{\alpha^2}(1-\alpha)^{t+1}+\frac{2}{\alpha^2}(1-\alpha)^{t+2}\right]+$$

$$+\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}-\frac{(1-\alpha)^{t+1}}{\alpha}+\frac{2(1-\alpha)^2}{\alpha^2}-\frac{2(1-\alpha)^{t+2}}{\alpha^2}\right].$$

В результате, приводя подобные слагаемые в правой части последнего равенства, получим

$$L_t = t^2 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}t + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}\left(1-(1-\alpha)^t\right),$$

так что при $t\to\infty$

$$x_t - L_t \sim \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}t - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}\left(1-(1-\alpha)^t\right).$$

Таким образом, и в случае параболического воздействия (как и в случае рассмотренного выше линейного воздействия) условие (7) нарушается: при больших значениях t отклик L_t дает неправильное представление о входном воздействии x_t, и простейшая прогнозная модель (4) не может быть использована.

5. Заключение

В настоящей работе проведено подробное исследование простейшей прогнозной модели в случаях, когда исходный временной ряд представляет собой а) одиночный импульс, б) линейное воздействие, в) параболическое воздействие. Показано, что с точки зрения адекватности прогноза простейшая модель дает удовлетворительный результат только в случае а).

Библиографический список

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление. - М.: Мир, 1974. - 406 с.
2. Brown R.G. Smoothing forecasting and prediction of discrete time series. N.Y., Prentice-Hall, 1963, 468 p.
3. Кильдишев Г.С., Френкель А.А. Анализ временных рядов и прогнозирование. - М.: Статистика, 1973. - 104 с.
4. Хенан Э. Анализ временных рядов. - М.: Наука, 1964. - 217 с.
5. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. - М.: Статистика, 1979. - 256 с.
6. Тузикова Е.С. Отраслевые особенности построения прогноза динамики котировок фондового рынка на примере аэрокосмической отрасли // Труды МАИ. 2012. № 52. URL http://trudymai.ru/published.php?ID=29584
7. Batty M. Monitoring an exponential smoothing forecasting system // Journal of The Operational Research Society, 1969, vol. 20, no. 3, pp. 319 - 325.

8. Brown R.G., Meyer R.F. The fundamental theorem of exponential smoothing // Journal of The Operational Research Society, 1961, vol. 9, no. 5, pp. 673 - 687.

9. Chow W.M. Adaptive control of exponential smoothing constant // Journal of Industial Engineering, 1965, vol. 16, no. 5, pp. 314 - 317.

10. Cogger K.O. The optimality of general-order exponential smoothing // Journal of The Operational Research Society, 1974, vol. 22, no. 4, pp. 858 - 867.

11. Cohen G.D. A note on exponential smoothing and autocorrelated inputs // Journal of The Operational Research Society, 1963, vol. 11, no. 3, pp. 361 - 367.

12. Cox D.R. Prediction by exponentially weighted moving averages and related methods // Journal of the Royal Statistical Society, 1961, vol. 23, no. 2, pp. 414 - 422.

13. Harrison P.J. Exponential smoothing and short-term sales forecasting // Management Science, 1967, vol. 13, no. 11, pp. 821 - 842.

14. Winters P.R. Forecasting sales by exponentially weighted moving averages // Management Science, 1960, vol. 6, no. 3, pp. 324 - 342.

15. Taylor C.J. A simple graphical method of exponential smoothing with a linear trend // Journal of The Operational Research Society, 1967, vol. 18, no. 1, pp. 61 - 63.

16. Семаков С.Л., Семаков А.С. Прогнозирование и управление продажами в торговых сетях. - М.: Физматлит, 2012. - 144 с.