

Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176839>

ИДЕНТИФИКАЦИЯ УСИЛИЙ В ОПОРАХ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК

Виталий Тарасович Гришакин

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет,
МАДИ, Москва, Россия

grichacin@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются поперечные колебания консервативных механических систем в виде шарнирно опертых балок уточненной теории с деформируемыми промежуточными опорами. Деформационные процессы в балках возникают в результате приложения сосредоточенных безынерционных сил, движущихся с постоянной скоростью. Показаны возможности, открывающиеся в результате решения одной из обратных задач механики деформируемого твердого тела – задачи идентификации усилий в промежуточных упругих опорах по таким проявлениям, как вертикальные перемещения точки приложения подвижной силы (прогибам под силой). Представлены результаты идентификации усилий в опорах при изменении жесткости одной из них (второй), что может быть использовано, например, в строительной практике с целью выявления дефектов в опорах конструкций, воспринимающих подвижные нагрузки, без прекращения движения по

ним. Всю интересующую информацию о состоянии конструкций в этом случае можно получить с применением транспортного средства, оборудованного необходимыми датчиками. Непосредственное применение результатов исследования в авиационно-ракетно-космической технике возможно, например, при проектировании и диагностировании направляющих элементов конструкций ракетных установок. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: многопролетная балка, подвижная нагрузка, идентификация, регуляризация, перемещения, деформации

Для цитирования: Гришакин В.Т. Идентификация усилий в опорах многопролетных балок // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176839>

Original article

IDENTIFICATION OF FORCES IN THE SUPPORTS OF MULTI-SPAN BEAMS

Vitaly T. Grishakin

Moscow Automobile and Road Construction State Technical University, MADI,
Moscow, Russia

grichacin@yandex.ru

Abstract. The article considers transverse vibrations of conservative mechanical systems in the form of hinged beams of the refined S.P. Timoshenko theory with deformable intermediate supports. Deformation processes in beams resulted through the concentrated

inertial forces application moving at a constant speed. Solution of the direct problem (the problem of determining parameters of the stress-strain state of a beam from a given value of the moving force) was obtained in the form of expansion in Fourier series, followed by the application of operational calculus. The inverse problem of the deformable solid body mechanics, which consisted in identifying the forces in the supports according to the given deflections under the moving force, was considered on the example of the mechanical system under study as well. As long as the inverse problem posed in this way relates to the ill-posed ones (an insignificant change in the initial data corresponds to an arbitrarily large change in the calculation results), A.N. Tikhonov's regularizing algorithm was applied to obtain a stable solution. A technique for the regularization parameter α computing is presented. Both the results of the beam deflections computing at the point of the moving force application and the results of identifying the forces in the supports of a six-span continuous beam structure, obtained with the same stiffness values of all five elastic supports, and with a change in the stiffness of one of them (the second one) are presented. Such numerical experiment was performed to illustrate the possibility of employing the proposed method, which opens up as a result of the proposed technique application, for example, in construction practice to identify defects in the supports of structures that perceive moving loads without stopping movement along them. All relevant information on the state of structures can be obtained employing a vehicle equipped with the necessary sensors. For the said two computational cases, the time dependences of the forces in the supports, obtained both as the result of solving direct and inverse problems, are presented in the form of graphs of the corresponding functions. For the considered cases of the structure loading, the results of the largest displacements computing in the most loaded

span of the beam and the maximum elastic forces arising in the most loaded support are presented as well.

Keywords: multi-span beam, movable load, identification, regularization, displacement, deformation

For citation: Grishakin V.T. Identification of forces in the supports of multi-span beams. *Trudy MAI*, 2023, no. 132. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176839>

1. Введение. Анализ литературы

Исследования динамического действия движущегося груза по инженерным сооружениям начались в середине 19 столетия. Поводом для первых исследований динамического действия подвижных нагрузок послужило обрушение Честерского моста в 1847 г. В 1849 г. Ф. Виллис получил уравнение траектории силы, движущейся по свободно опертой невесомой призматической балке [1]. Первые исследования, учитывающие собственную массу конструкции, относятся к началу 20-го века. В 1905 г. А.К. Крылов изучил случай действия подвижной силы на балку постоянного сечения, обладающей инерцией [2]. Прогибы балки А.Н. Крылов искал в виде разложения в ряд по формам свободных колебаний, известных теперь как функции Крылова. В 1908 г. С.П. Тимошенко получил решение этой задачи для частного случая граничных условий путем введения обобщенных координат [3].

Первые решения задач, одновременно учитывающих инерционность балки и подвижной нагрузки, появились к тридцатым годам двадцатого столетия [4-6]. Первое решение, основанное на представлении упругой кривой прогибов рядами

Фурье, было получено С.Е. Инглисом [7]. Метод Инглиса в дальнейшем был развит В.В. Болотиным [8, 9], в работах которого подробно изучен вопрос динамического нагружения балочных элементов конструкций. Дальнейшее развитие метод Инглиса-Болотина получил в работах А.Б. Моргаевского, рассмотревшего ряд важных частных задач [10, 11].

Метод обобщенных координат для подвижной пульсирующей нагрузки применен в работах А.П. Филиппова [12, 13]. Современное состояние теории динамических деформаций неразрезных балок и конструкций от упомянутых видов нагружения освещено в обзорной статье А.С. Дмитриева [14]. Развитие теории влияния подвижных нагрузок на элементы конструкций было выполнено также в работах [15-17].

Обзор классических обратных задач динамики с предложениями о возможности их решения представлен в монографии [18]. Здесь также указываются некоторые варианты постановки обратных задач динамики и предлагается единая методика решения таких задач, основанная на построении уравнений движения с учетом заданных свойств их решений.

Обратные задачи теории упругости, связанные с идентификацией дефектов либо неоднородностей, рассмотрены в работе [19].

2. Постановка задачи

Задача о колебаниях многопролетных шарнирно опертых балок при действии подвижной силы рассматривалась на основе модели С. П. Тимошенко [3]:

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k' GF \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \\ k' GF \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t), \end{cases} \quad (1)$$

где EI – изгибная жесткость, F – площадь поперечного сечения балки, G – модуль сдвига, k' – коэффициент формы поперечного сечения, ρ – плотность материала балки, q – интенсивность поперечной нагрузки.

Функции перемещений и углов поворота поперечных сечений балки искались в виде разложений в ряды Фурье, а именно

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin \lambda_k x; \\ \psi(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \cos \lambda_k x, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda_k = k\pi / l$. Расчетная схема рассмотренной задачи приведена на рис. 1.

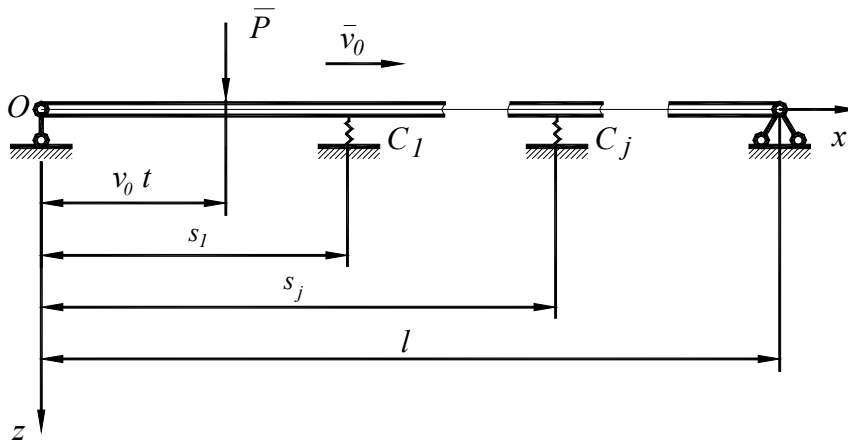


Рис. 1. Расчетная схема многопролетной балки

Реакции упругих опор, расположенных в произвольных точках балки, заменялись сосредоточенными в этих точках силами $P_{sj}(t)$, линейно зависящими от

прогибов точек их расположения на балке. Поперечная нагрузка, отражающая реакции $P_{sj}(t)$ упругих опор и условие подвижности нагрузки, записывалась в виде

$$q(x, t) = P(t)\delta(x - v_0 t) - \sum_{j=1}^J P_{sj}(t)\delta(x - s_j),$$

где J – количество промежуточных упругих опор рассматриваемой балки, v_0 – скорость движения силы P . В рассматриваемом случае скорость v_0 принималась постоянной.

3. Определение параметров НДС многопролетной балки

Решение системы дифференциальных уравнений (1) находим при нулевых начальных условиях, заданных в момент входа силы P на балку, и граничных условиях, соответствующих шарнирному опиранию балки (рис. 1). Решение поставленной задачи может быть найдено с применением операционного исчисления [20], согласно которого исследуемые функции (2) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left(P(\tau) \sin(\lambda_k v_0 \tau) - \sum_{j=1}^J P_{sj}(\tau) \sin(\lambda_k s_j) \right) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (t - \tau) d\tau \sin \lambda_k x; \\ \psi(x, t) &= \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^2 \lambda_k}{D_k} \int_0^t \left(P(\tau) \sin(\lambda_k v_0 \tau) - \sum_{j=1}^J P_{sj}(\tau) \sin(\lambda_k s_j) \right) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\sin \omega_{ik} (t - \tau)}{\omega_{ik}} d\tau \cos \lambda_k x, \end{aligned} \quad (2)$$

где $a = \sqrt{G'/\rho}$, $b = \sqrt{G'F/\rho I}$, $c = \sqrt{E/\rho}$, $C_{ik} = (-1)^i \frac{b^2 + c^2 \lambda_k^2 - \omega_{ik}^2}{\omega_{ik} D_k}$,

$$\omega_{ik}^2 = \frac{(a^2 + c^2) \lambda_k^2 + b^2 \pm D_k}{2}, \quad D_k = \sqrt{\left[(a^2 + c^2) \lambda_k^2 + b^2 \right]^2 - 4a^2 c^2 \lambda_k^4}.$$

Деформации балки ε_x могут быть вычислены на основе формулы уточненной теории изгиба стержней.

Для определения параметров НДС произвольной точки балки необходимо определить неизвестные величины $P_{sj}(t)$. С этой целью составлялась и решалась следующая система интегральных уравнений Вольтерра II-го рода:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left(P(\tau) \sin(\lambda_k v_0 \tau) - \sum_{j=1}^J P_{sj}(\tau) \sin(\lambda_k s_j) \right) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (t - \tau) d\tau \sin \lambda_k s_1 &= \frac{P_{s1}(t)}{C_1}; \\
 \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left(P(\tau) \sin(\lambda_k v_0 \tau) - \sum_{j=1}^J P_{sj}(\tau) \sin(\lambda_k s_j) \right) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (t - \tau) d\tau \sin \lambda_k s_2 &= \frac{P_{s2}(t)}{C_2}; \\
 &\vdots \\
 \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left(P(\tau) \sin(\lambda_k v_0 \tau) - \sum_{j=1}^J P_{sj}(\tau) \sin(\lambda_k s_j) \right) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (t - \tau) d\tau \sin \lambda_k s_J &= \frac{P_{sJ}(t)}{C_J}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Переходя к дискретному времени $t_m = m\Delta t$, $m \in 1 \dots M$, и применяя методику решения интегральных уравнений, ядра которых представляют собой осциллирующие функции, запишем систему уравнений (4) в матричном виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{I}}{C_1} \mathbf{P}_s \mathbf{1}_m + \sum_{j=1}^J \mathbf{B1j}_{m,p} \cdot \mathbf{P}_s \mathbf{j}_m &= \mathbf{A1}_{m,p} \cdot \mathbf{q}_m; \\
 \frac{\mathbf{I}}{C_2} \mathbf{P}_s \mathbf{2}_m + \sum_{j=1}^J \mathbf{B2j}_{m,p} \cdot \mathbf{P}_s \mathbf{j}_m &= \mathbf{A2}_{m,p} \cdot \mathbf{q}_m; \\
 &\vdots \\
 \frac{\mathbf{I}}{C_J} \mathbf{P}_s \mathbf{j}_m + \sum_{j=1}^J \mathbf{BJj}_{m,p} \cdot \mathbf{P}_s \mathbf{j}_m &= \mathbf{AJ}_{m,p} \cdot \mathbf{q}_m,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $\mathbf{Aj}_{m,p} = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \sin(\lambda_k v_0 \tau) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (m\Delta t - \tau) d\tau \sin \lambda_k s_j$,

$$\mathbf{Bjj}_{m,p} = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \sin(\lambda_k s_j) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (m\Delta t - \tau) d\tau \sin \lambda_k s_j, \quad p \in 1 \dots m,$$

\mathbf{I} – единичная матрица, $\mathbf{q}_m = P_m \cdot H(M - m)$ – вектор воздействующей на балку подвижной нагрузки, $H(m)$ – функция Хевисайда.

После решения системы (5) (определения векторов усилий в опорах $\mathbf{P}_s \mathbf{j}$) возможен дальнейший расчет параметров НДС балки по формулам (3).

При необходимости определить величины прогибов балки под движущейся со скоростью v_0 силой $P(t)$, первую формулу в (3) следует представить в виде зависимости $w(v_0 t, t)$ и использовать совместно с функциями $P_{sj}(t)$, найденными в результате решения системы (5). Матричная форма записи полученного таким образом уравнения примет вид:

$$\mathbf{wv}_m = \mathbf{Av}_{m,p} \cdot \mathbf{q}_m - \sum_{j=1}^J \mathbf{Bvj}_{m,p} \cdot \mathbf{P}_s \mathbf{j}_m; \quad (6)$$

$$\text{где } \mathbf{Av}_{m,p} = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \sin(\lambda_k v_0 \tau) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (m\Delta t - \tau) d\tau \sin \lambda_k m\Delta t,$$

$$\mathbf{Bvj}_{m,p} = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \sin(\lambda_k s_j) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (m\Delta t - \tau) d\tau \sin \lambda_k m\Delta t, \quad p \in 1 \dots m.$$

Определение зависимости $\psi(v_0 t, t)$, а затем и деформации балки в точке приложения подвижной силы, возможно аналогичным приведенному выше способом.

4. Идентификация внешней нагрузки и усилий в опорах

Задача идентификации внешней подвижной нагрузки заключается в отыскании зависимости внешнего динамического нагружения во времени при условии, что известна скорость движения силы и зависимость прогиба в некоторой

точке балки от времени, либо известна функция $w(v_0 t, t)$. В последнем случае предполагается, что в качестве исходных данных обратной задачи выступают результаты измерений, полученные с движущегося по изучаемой конструкции со скоростью v_0 регистратора перемещений (или ускорений) – так называемого дефектометра. Поскольку поставленная таким образом обратная задача механики деформируемого твердого тела относится к некорректным по Адамару [21], для её успешного решения необходимо применение регуляризирующей процедуры, в качестве которой использовался регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова [21].

Применение регуляризирующего алгоритма заключается во введении сглаживающего параметрического функционала

$$M^\alpha [q] = \|w^\delta - A \cdot q\|_{L_2}^2 + \alpha \|q\|^2, \quad (7)$$

где w^δ – исходные данные (в данном случае перемещения балки, регистрируемые в точке приложения подвижной силы с некоторой погрешностью δ); q – искомая функция (например, подвижная сила); A – математический оператор, такой что $A \cdot q = w$; α – параметр регуляризации.

После выполнения указанных действий задача сводится к решению регуляризированной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая в рассматриваемом случае примет вид:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{w}, \quad (8)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{Idm,p} - \sum_{j=1}^J \mathbf{B}_{Idj_{m,p}} \cdot \Delta^{-1} \cdot \Delta \mathbf{j}$ – нижнетреугольная матрица, вычисленная на основании показаний идентифицирующего датчика (Id); \mathbf{C} – симметричная

трехдиагональная матрица, представленная в монографии [20], \mathbf{q} – неизвестный вектор, соответствующий q .

Параметр регуляризации α , входящий в уравнение (7), выбирается на основании принципа невязки – оценки разности исходных данных и произведения матрицы \mathbf{A} на регуляризованное решение \mathbf{p}^α . При этом квадраты погрешности полученного решения и погрешности задания исходных данных должны быть одинаковыми, т.е. $\|\mathbf{w}^\delta - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^\alpha\|^2 = \delta^2$.

Расчет значения параметра регуляризации проводится итерационным методом, согласно которому первоначальное значение α выбирается так, что $\|\mathbf{w}^\delta - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^\alpha\|^2 > \delta^2$, а каждое последующее значение параметра α меньше предыдущего. Итерационный процесс прекращается при выполнении условия $\|\mathbf{w}^\delta - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^\alpha\|^2 \leq \delta^2$.

Применяя вышеуказанную методику решения обратных задач к формуле (6), получим уравнения для определения неизвестных усилий в опорах балки, находящейся под действием подвижной силы:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Bv1}_{m,p}^\top \cdot \mathbf{Bv1}_{m,p} + \alpha_1 \cdot \mathbf{C}) \mathbf{P}_S \mathbf{1}_m &= \mathbf{Bv1}_{m,p}^\top \left(\mathbf{Av}_{m,p} \cdot \mathbf{q}_m - \mathbf{wv}_m - \sum_{j=2}^J \mathbf{Bvj}_{m,p} \cdot \Delta^{-1} \cdot \Delta \mathbf{j} \cdot \mathbf{q}_m \right); \\ (\mathbf{Bv2}_{m,p}^\top \cdot \mathbf{Bv2}_{m,p} + \alpha_2 \cdot \mathbf{C}) \mathbf{P}_S \mathbf{2}_m &= \mathbf{Bv2}_{m,p}^\top \left(\mathbf{Av}_{m,p} \cdot \mathbf{q}_m - \mathbf{wv}_m - \sum_{j=1,3}^J \mathbf{Bvj}_{m,p} \cdot \Delta^{-1} \cdot \Delta \mathbf{j} \cdot \mathbf{q}_m \right); \\ &\vdots \\ (\mathbf{BvJ}_{m,p}^\top \cdot \mathbf{BvJ}_{m,p} + \alpha_J \cdot \mathbf{C}) \mathbf{P}_S \mathbf{J}_m &= \mathbf{BvJ}_{m,p}^\top \left(\mathbf{Av}_{m,p} \cdot \mathbf{q}_m - \mathbf{wv}_m - \sum_{j=1}^{J-1} \mathbf{Bvj}_{m,p} \cdot \Delta^{-1} \cdot \Delta \mathbf{j} \cdot \mathbf{q}_m \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где α_j – параметр регуляризации, соответствующий j -му уравнению системы (9).

5. Результаты численного эксперимента

Численный эксперимент проводился на основе данных о геометрических размерах и механических характеристиках балки в виде рельса Р75 ГОСТ 51685-2013, изготовленного из стали 76Ф. Рассматривалась шарнирно закрепленная по торцам балка длиной $l=10$ м, которая имела 5 дополнительных упругих опор одинаковой жесткости $C_j = 2 \cdot 10^5$ Н/м, равномерно распределенных по длине балки (рис. 1). Считалось, что воздействующая на балку внешняя подвижная сила \bar{P} абсолютной величины 1 кН двигалась с постоянной скоростью $v_0 = 15$ м/с.

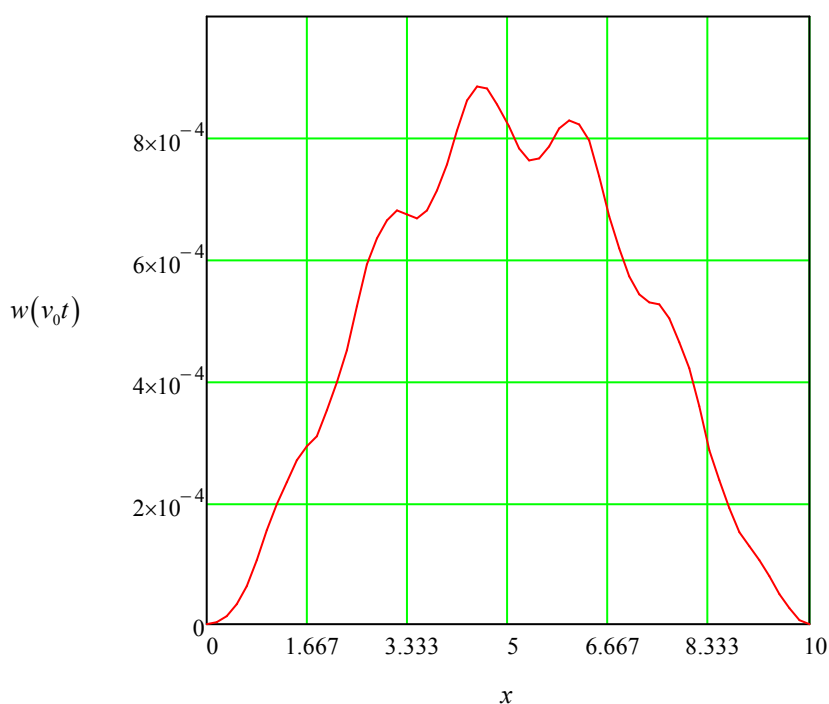
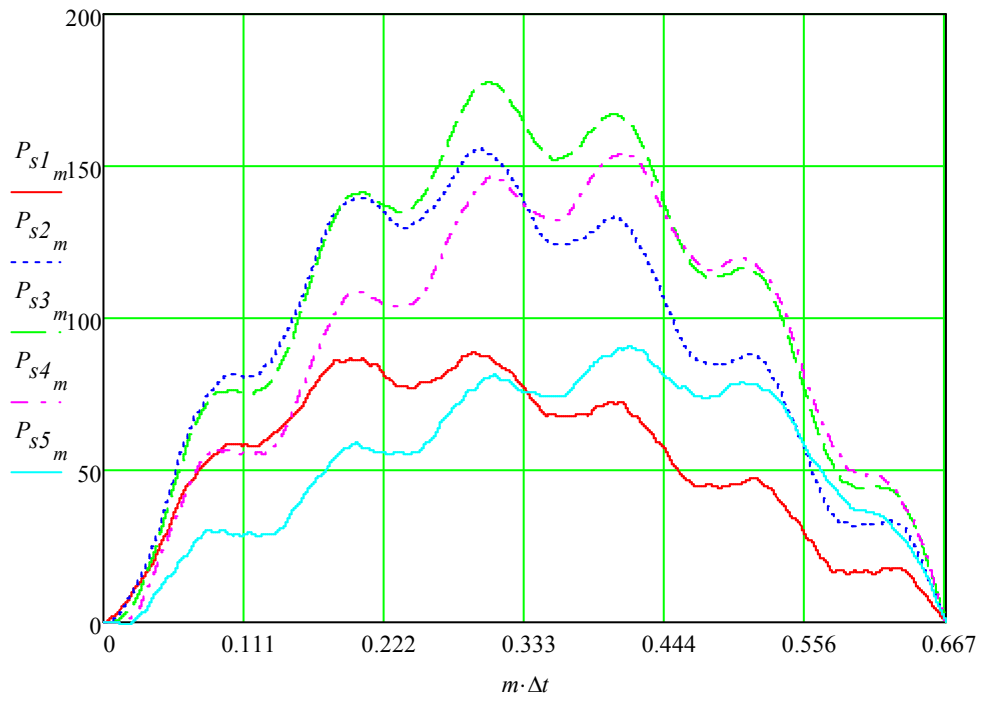
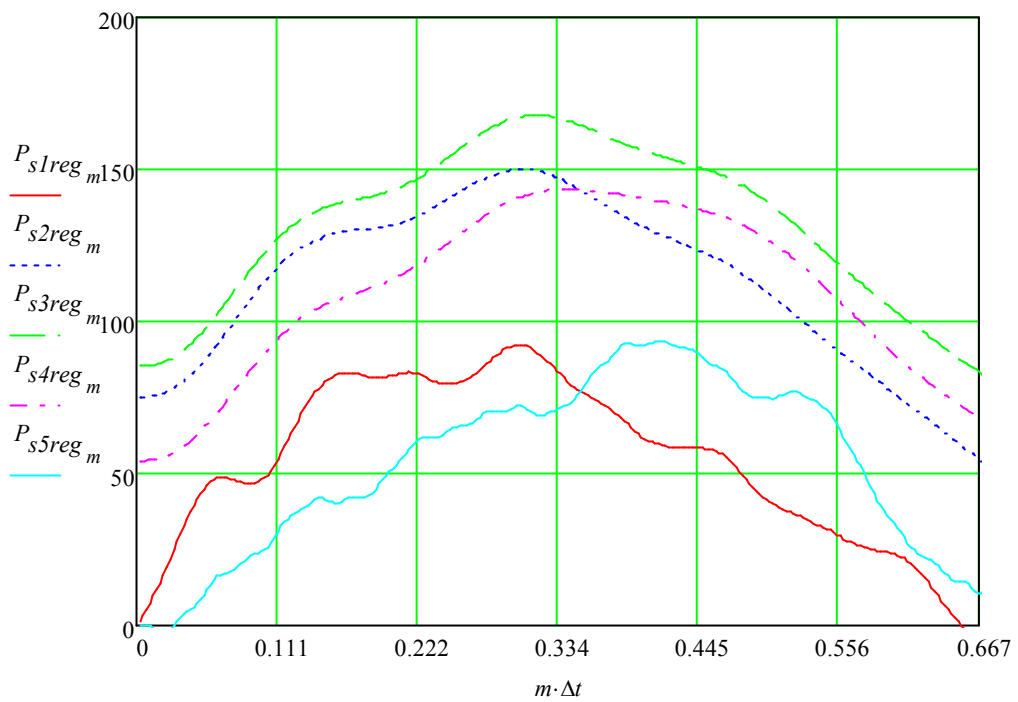


Рис. 2. Прогибы балки в точке приложения подвижной силы \bar{P} .

На рис. 2 показан график зависимости $w(v_0 t)$ вертикальных перемещений точки приложения силы от её положения на балке (прогибы под силой), представленный как функция координаты x (рис. 1).



а)



б)

Рис. 3. Усилия в упругих опорах при $C_j = 2 \cdot 10^5$ Н/м:

а) вычисленные по формулам (5); б) идентифицированные по формулам (9).

Из приведенного на рис. 2 графика хорошо видно, что уменьшения перемещений происходят в тех точках балки, в которых расположены дополнительные упругие опоры (1,667 м, 3,333 м, 5 м, 6,667 м и 8,333 м). Максимального значения, соответствующего величине 0,886 мм, исследуемая функция достигает при прохождении силой третьего пролета балки.

Далее, на рис. 3, а), показаны графики зависимостей $P_{sj}(t)$ усилий в упругих опорах, построенные в результате решения системы уравнений (5). Поскольку жесткости всех дополнительных упругих опор были приняты одинаковыми, приведенные на рис. 3, а) графики соответствуют графикам перемещений точек расположения дополнительных опор, которые могут быть получены из рис. 3, а) простым масштабированием. Отметим, что максимальное усилие $P_{s3}(0,305)=177,57$ Н возникает в центральной опоре, что обусловлено конструкцией изучаемой механической системы.

На рис. 3, б) показаны результаты решения обратной задачи: графики зависимостей усилий в упругих опорах, вычисленные с применением регуляризирующего алгоритма А.Н. Тихонова по формулам (9). В качестве исходных данных для решения задачи идентификации неизвестных усилий $P_{sj\text{ reg}}(t)$ использовались прогибы под силой $w(v_0 t)$, приведенные на рис. 2. Из приведенных на рис. 3 графиков видно, что регуляризованные функции более сглаженные (особенно в случае с опорами №2, 3 и 4), что не мешает определять наибольшие их значения с достаточной точностью. Такой результат можно объяснить несколько завышенным в сравнении с получаемым по невязке значением параметра

регуляризации ($\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=10^{-13}$), принятым при идентификации усилий в опорах №2, 3 и 4, что продиктовано необходимостью получения устойчивых решений в широком диапазоне изменения исследуемых величин неизвестных усилий $P_{sj\ reg}(t)$.

Полученная таким образом математическая модель позволяет решать задачу обнаружения требующей замены упругой опоры по результатам измерения вертикальных перемещений транспортного средства, движущегося по неразрезной многопролетной конструкции балочного типа. С целью иллюстрации указанной возможности далее рассматривается процесс упругого деформирования балки, характеристики которой приняты такими же, как и в предыдущем случае, за исключением вдвое уменьшенной жесткости второй упругой опоры.

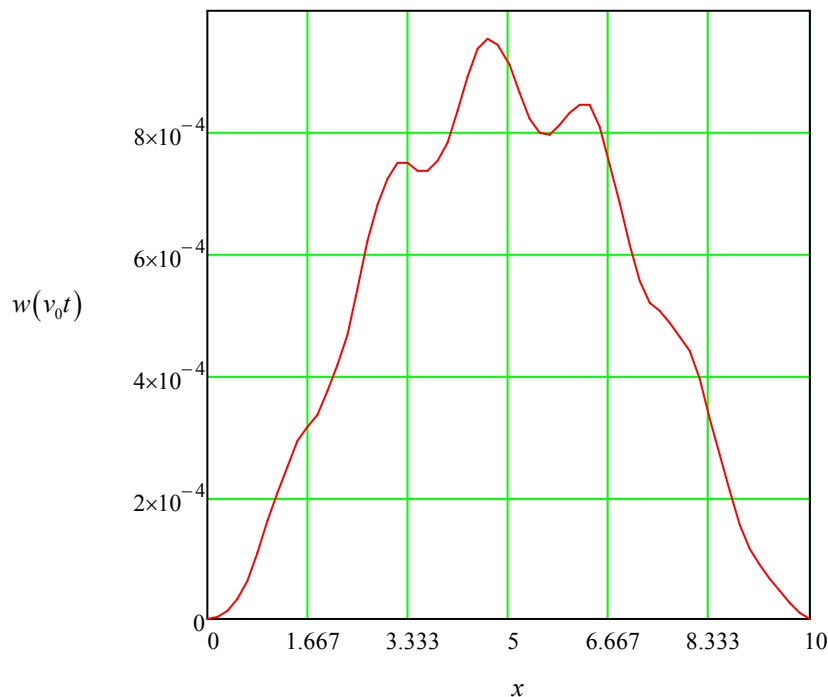
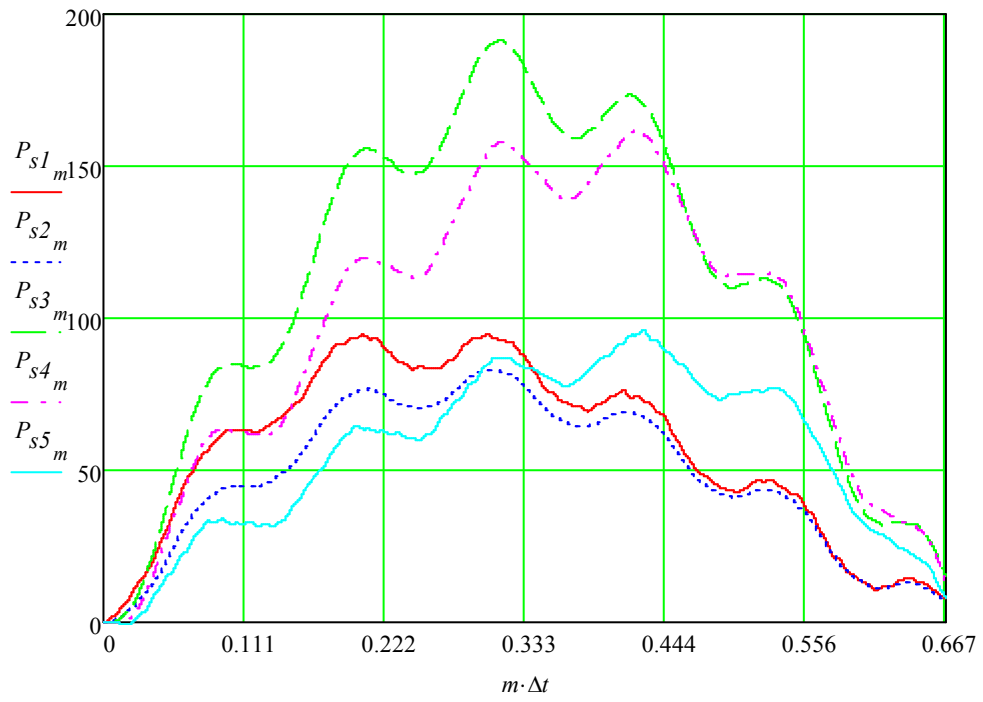
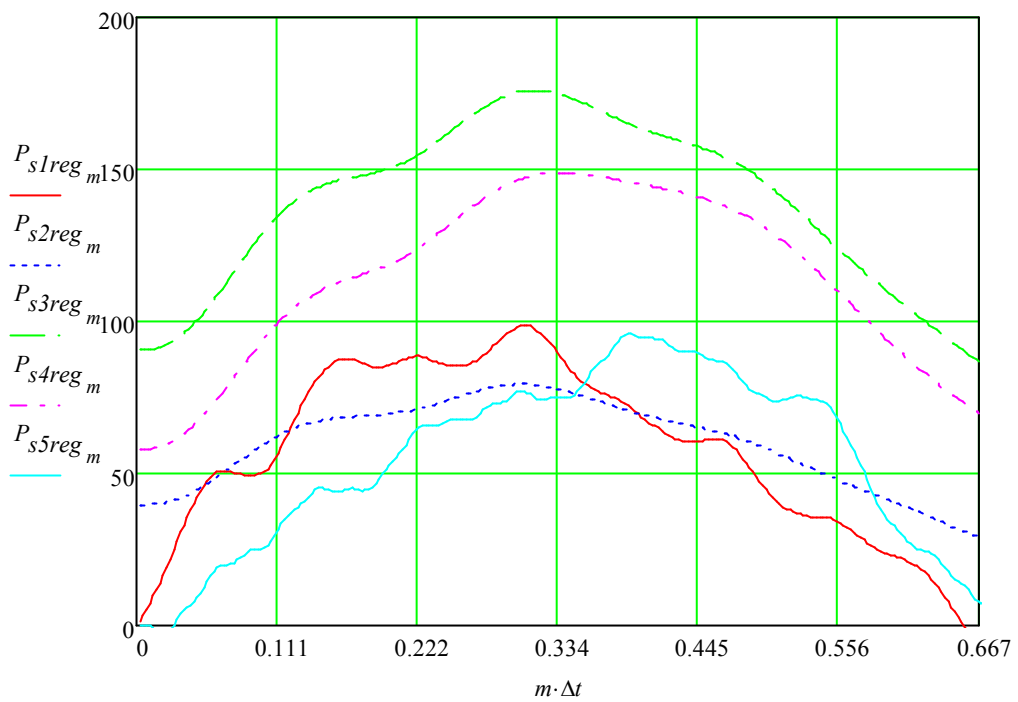


Рис. 4. Прогибы балки в точке приложения подвижной силы \bar{P}

при $C_2 = 0,5C_j = 10^5$ Н/м.



а)



б)

Рис. 5. Усилия в упругих опорах при $C_2 = 0,5C_j = 10^5$ Н/м:

а) вычисленные по формулам (5); б) идентифицированные по формулам (9).

Результаты решения поставленной таким образом прямой задачи приведены на рис. 4. Внешний вид графика функции $w(v_0t)$ изменился не значительно: максимальные прогибы под силой в этом случае составляют 0,955 мм, что на 7,2% больше предыдущего случая, а максимальные перемещения точки расположения «аварийной» опоры составляют 0,83 мм, что соответствует приросту в 6,2%.

Необходимые для построения графика рис. 4 значения усилий $P_{sj}(t)$, соответствующие второму расчетному случаю, приведены на рис. 5, а) в виде графиков, внешний вид которых близок к изображенным на рис. 3, а) кривым за исключением графика функции $P_{s2}(t)$ (синяя пунктирная кривая). Максимальная амплитуда указанной зависимости уменьшилась со 155,7 Н до 83 Н (46,7%). При этом нагрузка на соседние с «аварийной» опоры выросла. Сопоставляя результаты решения прямой задачи (рис. 3, а и рис. 5, а) можно сделать вывод, что наибольшее увеличение усилия происходит в центральной опоре балки: максимальное значение $P_{s3}(t)$ увеличилось на 34 Н (191,38 Н против прежних 177,57 Н), что в относительных величинах составляет 17,8%.

Увеличение нагрузки на третью опору (зеленая пунктирная кривая) можно обнаружить и путем сравнения соответствующих графиков на рис. 3, б и рис. 5, б). Более показательным на указанных рисунках можно считать изменение графика функции $P_{s2}(t)$. Обнаружение подобного несоответствия в идентифицированных величинах усилий может свидетельствовать прежде всего о снижении жесткости в исследуемой опоре, что должно повлечь за собой более детальное изучение конструкции в точке расположения опоры с выявленным дефектом.

Выводы

Рассмотренные прямая и обратная задачи механики деформируемого твердого тела на примере многопролетной шарнирно опертой балки позволяют сделать вывод о возможности получения с требуемой точностью устойчивого решения некорректной обратной задачи идентификации неизвестных усилий в опорах по таким косвенным проявлениям изучаемого процесса, как вертикальные перемещения движущейся по балке безынерционной нагрузки. Применение полученных результатов возможно, например, в разработке и совершенствовании неразрушающих методов контроля состояния многопролетных дорожных конструкций.

Список источников

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. - М.: Наука, 1967. – 419 с.
2. Крылов А.Н. Вибрации судов. - М.: ОНТИ. Главная редакция судостроительной литературы, 1936. – 404 с.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Физматгиз, 1967. – 444 с.
4. Бондарь Н.Г., Казей И.И., Лесохин Б.Ф., Козьмин Ю.Г. Динамика железнодорожных мостов. – М.: Транспорт, 1965. – 412 с.
5. Земляничин В.Д. К исследованию динамической работы пролетных строений мостов под воздействием большегрузных автомобилей // Труды Сибирского автомобильно-дорожного института. 1975. № 54. С. 154-159.

6. Китаев К.Е. Изгибно-крутильные колебания пролетных строений железнодорожных мостов // Труды МИИТ. 1952. № 76. С. 123-124.
7. Licari I.S., Wilson E.N. Dynamic response of a beam subjected to a moving forcing system // Proc. 4-th US National Congress of Applied Mechanics, Berkeley, 1962, vol. 1, pp. 419-425.
8. Болотин В.В. О воздействии подвижной нагрузки на мосты // Труды МИИТ. 1950. № 74. С. 269-296.
9. Болотин В.В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1961. № 4. С. 109-115.
10. Вольпер Д.Б., Моргаевский А.Б. О динамическом воздействии подвижной нагрузки при больших скоростях движения // Исследования по теории сооружений. 1965. № 14. С. 73-91.
11. Моргаевский А.Б. О влиянии рессор на величину динамического эффекта от подвижной нагрузки // Исследования по теории сооружений. 1965. № 14. С. 67-72.
12. Филиппов А.П. Динамическое действие на балку с шарнирно-опертыми концами груза и гармонической силы, движущихся с постоянной скоростью // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 120-125.
13. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. - М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
14. Дмитриев А.С. Вопросы взаимодействия балочных конструкций с движущейся сосредоточенной нагрузкой // Проблемы машиностроения. 1986. № 25. С. 43-50.
15. Кохманюк С.С., Дмитриев А.С., Шелудько Г.А. и др. Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок. – Киев: Наукова думка, 1989. – 304 с.

16. Кохманюк С.С., Ольшанский В.П. Исследование взаимодействия между движущимися телами с учетом местных деформаций в зоне контакта // Исследования по теории сооружений. 1975. № 21. С. 157-160.
17. Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232 с.
18. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. – М.: Наука, 1981. – 144 с.
19. Groetsch C.W. Inverse Problems in the Mathematical Sciences, Department of Mathematical Sciences, University of Cincinnati, Cincinnati, USA, 1993, 154 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-322-99202-4>
20. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М.: GIFML, 1961. – 524 с.
21. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач – М.: Наука, 1986. – 288 с.
22. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины при гармоническом воздействии // Труды МАИ. 2023. № 128. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=171384>. DOI: [10.34759/trd-2023-128-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-03)
23. Левицкий Д.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарное деформированное состояние пластины Тимошенко // Труды МАИ. 2022. № 125. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168157>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)
24. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=98866>

References

1. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Ustoichivost' i kolebaniya uprugikh sistem* (Stability and oscillations of elastic systems), Moscow, Nauka, 1967, 419 p.
2. Krylov A.N. *Vibratsii sudov* (Vibrations of ships), Moscow, ONTI. Glavnaya redaktsiya sudostroitel'noi literatury, 1936, 404 p.
3. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* (Fluctuations in engineering), Moscow, Fizmatgiz, 1967, 444 p.
4. Bondar' N.G., Kazei I.I., Lesokhin B.F., Koz'min Yu.G. *Dinamika zheleznodorozhnykh mostov* (Dynamics of railway bridges), Moscow, Transport, 1965, 412 p.
5. Zemlyanitsyn V.D. *Trudy Sibirskogo avtomobil'no-dorozhnogo instituta*, 1975, no. 54, pp. 154-159.
6. Kitaev K.E. *Trudy MIIT*, 1952, no. 76, pp. 123-124.
7. Licari I.S., Wilson E.N. Dynamic response of a beam subjected to a moving forcing system, *Proc. 4-th US National Congress of Applied Mechanics*, Berkeley, 1962, vol. 1, pp. 419-425.
8. Bolotin V.V. *Trudy MIIT*, 1950, no. 74, pp. 269-296.
9. Bolotin V.V. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika i mashinostroenie*, 1961, no. 4, pp. 109-115.
10. Vol'per D.B., Morgaevskii A.B. *Issledovaniya po teorii sooruzhenii*, 1965, no. 14, pp. 73-91.
11. Morgaevskii A.B. *Issledovaniya po teorii sooruzhenii*, 1965, no. 14, pp. 67-72.

12. Filippov A.P. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika i mashinostroenie*, 1964, no. 4, pp. 120-125.
13. Filippov A.P. *Kolebaniya deformiruemykh sistem* (Vibrations of deformable systems), Moscow, Mashinostroenie, 1970, 736 p.
14. Dmitriev A.S. *Problemy mashinostroeniya*, 1986, no. 25, pp. 43-50.
15. Kokhmanyuk S.S., Dmitriev A.S., Shelud'ko G.A. et al. *Dinamika konstruktсии pri vozdeistvii kratkovremennykh nagruzok* (Dynamics of structures under the influence of short-term loads), Kiev, Naukova dumka, 1989, 304 p.
16. Kokhmanyuk S.S., Ol'shanskii V.P. *Issledovaniya po teorii sooruzhenii*, 1975, no. 21, pp. 157-160.
17. Kokhmanyuk S.S., Yanyutin E.G., Romanenko L.G. *Kolebaniya deformiruemykh sistem pri impul'snykh i podvizhnykh nagruzkakh* (Vibrations of deformable systems under pulsed and mobile loads), Kiev, Naukova dumka, 1980, 232 p.
18. Galiullin A.S. *Obratnye zadachi dinamiki* (Inverse problems of dynamics), Moscow, Nauka, 1981, 144 p.
19. Groetsch C.W. *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Department of Mathematical Sciences, University of Cincinnati, Cincinnati, USA, 1993, 154 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-322-99202-4>
20. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie* (Integral transformations and operational calculus), Moscow, GIFML, 1961, 524 p.
21. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Methods of solving incorrect problems), Moscow, Nauka, 1986, 288 p.

22. Borshevetskii S.A. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=171384>. DOI: [10.34759/trd-2023-128-03](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-03)
23. Levitskii D.Yu., Fedotenkov G.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 125. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168157>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)
24. Firsanov V.V., Vo A.Kh. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98866>

Статья поступила в редакцию 29.06.2023

Одобрена после рецензирования 12.07.2023

Принята к публикации 27.10.2023

The article was submitted on 29.06.2023; approved after reviewing on 12.07.2023; accepted for publication on 27.10.2023