УДК 531.36: 62-50

О частных случаях одной задачи оптимального управления угловым движением симметричного космического аппарата стабилизированного вращением

Сиротин А.Н.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

e- mail: asirotin2@yandex.ru

Аннотация

Исследуется задача оптимального управления угловым движением космического аппарата (КА), который представляет собой абсолютно твердое тело стабилизированное вращением. Основная цель управления - минимизация энергозатрат, характеризуемые интегрально-квадратичного функционалом. Используя принцип максимума Понтрягина (ПМП), получено семейство нетривиальных первых интегралов для нормальных экстремалей. Получены дифференциальные уравнения для экстремалей, не зависящие от сопряженных переменных и определяемые исключительно вектором угловой скорости. Представлены частные случаи аналитических решений для решаемой задачи оптимального управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, переориентация, симметричное твердое тело, энергозатраты, принцип максимума.

1. Введение

Стабилизация вращением и стабилизация КА относительно трех осей являются основными методами, которые используются для поддержания точной ориентации твердого тела. Идея стабилизации вращением основана на использовании гироскопического эффекта. Преимущество такого метода, по сравнению с другими подходами, основано на простоте и отсутствии продолжительного активного периода вращения для сохранения ориентации в определенном направлении. Стабилизация вращением использовалась для большого числа применявшихся иностранных и советских/российских КА. Проблемы динамики и задачи управления изучались в [1-8].

Использование стабилизации вращением для пассивного управления актуально для КА с ограниченными ресурсами. Однако, недостатки метода пассивной стабилизации также хорошо известны и связаны, в основном, с проблемой точной переориентации космических антенн и оптики. Таким образом, часто используемые маневры для углового движения приводят к необходимости прибегать к решению задач управления точной переориентации в трехмерном пространстве.

В статье изучается задача оптимального управления угловым движением твердого тела стабилизированным вращением. Критерием эффективности служит минимум энергозатрат. По сравнению с общей проблемой управлении переориентации и вращением задача для тел с стабилизированным вращением с математической точки зрения несколько проще. Это объясняется понижением размерности и сложности соответствующих нелинейных уравнений системы. Тем не менее, задача управления совместной переориентации и вращения остается сложной и нелинейной. Это, в свою очередь, не позволяет получить в данное время требуемый аналитический результат. Поэтому целью данной статьи является получение характеризации экстремальных траекторий. Удается подробно изучить проблему нулевой стабилизации вращением, когда проекция угловой скорости на одну из осей равна тождественно нулю. Схожая задача оптимального управления возникла в [9] в связи с другой механической системой.

2. Формулировки задачи

Рассматривается вращение КА как абсолютно твердого сферически симметричного тела относительно неподвижной точки, совпадающей с центром масс. Главный момент внешних сил, приложенных к телу, считается управлением. Предполагается, что все используемые векторы определяются своими декартовыми прямоугольными координатами в связанной системе отсчета *OXYZ*, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции тела. Без потери общности тензор инерции считается единичным. Считается, что в инерциальном пространстве выбрана ось чувствительности, определяемой вектором $r=\left(r_1,r_2,r_3\right)^T$ единичной длины.

Отличие рассматриваемой задачи от исследуемых ранее работ состоит в требовании сохранения постоянной проекции угловой скорости на некоторую главную ось инерции связанной системы координат – требования стабилизации вращением.

Уравнения углового движения (кинематические для орта оси чувствительности и динамические уравнения Эйлера для вектора угловой скорости) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{r}_1 = r_2\omega_3 - r_3\omega_2 \\
&\dot{r}_2 = r_3\omega_1 - r_1\omega_3 \\
&\dot{r}_3 = r_1\omega_2 - r_2\omega_1 \\
&\dot{\omega}_1 = u_1 \\
&\dot{\omega}_2 = u_2 \\
&\omega_3 = v, \qquad t \in (0, T)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$-вектор угловой скорости, u_1, u_2-вектор управления, $v = const$-неизменная проекция.

Для векторов угловой скорости ω, управления u и орта r построим подвекторы

$$\bar{r} = (r_1, r_2)^T, \bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2)^T, \bar{u} = (u_1, u_2)^T$$

Соответствующие уравнения изменяются следующим образом

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{r}} = -r_3 S\bar{\omega} + vS\bar{r} \\
&\dot{r}_3 = \bar{r} \wedge \bar{\omega} \\
&\dot{\bar{\omega}} = \bar{u}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^{2\times 2}, \qquad S^2 = -I, \qquad \bar{r} \wedge \bar{\omega} = \begin{vmatrix} r_1 & \omega_1 \\ r_2 & \omega_2 \end{vmatrix} = \bar{r}^T S \bar{\omega}$$

здесь I - единичная матрица.

Исследуется ситуация нулевой стабилизации вращением, когда проекция угловой скорости на ось OZ равна тождественно нулю. Таким образом, в последующих рассуждениях используется предположение

$$v = 0 \tag{2.3}$$

Следовательно, уравнения приводятся к виду

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= -r_3 S \bar{\omega} \\ \dot{r}_3 &= \bar{r} \wedge \bar{\omega} \\ \dot{\bar{\omega}} &= \bar{u} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Рассмотрим теперь угловое движение осесимметричного тела. Основные обозначения совпадают с предыдущей задачей. Пусть $\Lambda_i > 0, i = 1, 2, 3$- главные центральные моменты инерции. Далее для определенности будем полагать

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \neq \Lambda_3$$

Определим величины

$$\lambda_1 = \frac{\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1}, \lambda_2 = \frac{\Lambda_3 - \Lambda_1}{\Lambda_2}, \lambda_3 = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_3}$$

тогда для рассматриваемого случая симметрии получаем

$$\lambda_1 = -\lambda_2, \lambda_3 = 0$$

Тогда уравнения углового движения в рассматриваемой ситуации для задачи стабилизации вращением можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= -r_3 S \bar{\omega} + v S \bar{r} \\ \dot{r}_3 &= \bar{r} \wedge \bar{\omega} \\ \dot{\bar{\omega}} &= v \lambda_1 S \bar{\omega} + \bar{u} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Следовательно, уравнения осесимметричного тела для задачи нулевой стабилизации относительно оси Oz (здесь $\nu = 0$) также сводятся к формулам (2.4).

Задача оптимального управления имеет следующий вид. Считается, что заданы краевые условия

$$r(0), r(T), \bar{\omega}(0), \bar{\omega}(T) \tag{2.6}$$

определяющие требуемый маневр. Время T окончания процесса фиксировано, а в качестве критерия эффективности маневра выбран интегрально-квадратичный функционал, который характеризует суммарные энергозатраты. Таким образом, рассматривается задача оптимального управления

$$\min \frac{1}{2} \int\limits_{[0,T]} \bar{u}(t) \cdot \bar{u}(t) dt$$

где минимум ищется по всем допустимым управлениям и траекториям, удовлетворяющим дифференциальным уравнениям (2.4) и краевым условиям (2.6). предполагается, что решение (управление) сформулированной задачи существует в классе кусочно- непрерывных функций времени.

3. Формализм ПМП и семейство первых интегралов для нормальных экстремальных траекторий

Задача оптимального управления исследуется с помощью необходимых условий ПМП. Гамильтониан имеет вид

$$H_0(r, \psi, \bar{\omega}, \bar{\gamma}, \bar{u}) = -r_3\psi_1\omega_2 + r_3\psi_2\omega_1 + \psi_3(r_1\omega_2 - r_2\omega_1) + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \frac{1}{2}\psi_0(u_1^2 + u_2^2) \tag{3.1}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T = (\bar{\psi}^T, \psi_3)^T, \bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)^T$ - векторы сопряженных переменных; $\psi_0 \le 0$- сопряженная переменная (константа) соответствует целевому функционалу.

Сопряженная система в рассматриваемой задаче имеет вид

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}_1 &= -\partial H_0 / \partial r_1 = -\psi_3 \omega_2 \\
\dot{\psi}_2 &= -\partial H_0 / \partial r_2 = \psi_3 \omega_1 \\
\dot{\psi}_3 &= -\partial H_0 / \partial r_3 = \psi_1 \omega_2 - \psi_2 \omega_1 \\
\dot{\gamma}_1 &= -\partial H_0 / \partial \omega_1 = -r_3 \psi_2 + r_2 \psi_3 \\
\dot{\gamma}_2 &= -\partial H_0 / \partial \omega_2 = r_3 \psi_1 - r_1 \psi_3
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&\dot{\bar{\psi}} = -\psi_3 S \bar{\omega},\ \dot{\psi}_3 = \bar{\psi} \wedge \bar{\omega} \\
&\dot{\bar{\gamma}} = -\bar{s}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Здесь используются обозначения:

$$
s = (s_1, s_2, s_3)^T, \qquad \bar{s} = (s_1, s_2)^T, \qquad s = \psi \times r \tag{3.4}
$$

Кроме того, справедливы равенства

$$
\dot{\bar{s}} = -s_3 S \bar{\omega}, \quad \dot{s}_3 = \bar{s} \wedge \bar{\omega} \tag{3.5}
$$

Рассмотрим сначала анормальные экстремальные траектории, т.е. при $\psi_0 = 0$. Гамильтониан (3.1) в этом случае имеет вид

$$
H_0 = \bar{s} \cdot \bar{\omega} + \bar{\gamma} \cdot \bar{u} = \text{const} \tag{3.6}
$$

и достигает максимума по $\bar{u}$ только в случае, когда верно равенство

$$
\bar{\gamma} \cdot \bar{u} = 0 \tag{3.7}
$$

Следовательно, верно и равенство

$$
\bar{s} \cdot \bar{\omega} = \text{const} \tag{3.8}
$$

Дифференцируя (3.8) и учитывая уравнения (3.5) и (2.4), приходим к выводу

$$\bar{s} \cdot \bar{u} = 0 \tag{3.9}$$

Поскольку используемые вектор-функции принадлежат R^2, из (3.7) и (3.9) следует, что $\bar{s}(t)$ и $\bar{\gamma}(t)$ в каждый момент времени коллинеарны. В свою очередь это означает, что имеется некоторая скалярная функция x, такая что

$$\bar{s} = x\bar{\gamma} \tag{3.10}$$

Подстановка (3.10) в (3.3) приводит к уравнению

$$\dot{\bar{\gamma}} = -x\bar{\gamma} \tag{3.11}$$

и поэтому

$$\bar{\gamma}(t) = fe^{-\int_0^t x(\tau)dr} \tag{3.12}$$

где $f \in \mathrm{R}^2$ - постоянный вектор. Таким образом, из соотношений (3.10) и (3.12) приходим к выводу, что $\bar{s}(t)$ и $\bar{\gamma}(t)$ коллинеарны неподвижному вектору f. Далее для удобства положим

$$\bar{s} = yf, \qquad \bar{\gamma} = zf$$

где y, z - некоторые скалярные функции.

Из (3.5) тогда имеем

$$\dot{y}f = -s_3 S\bar{\varpi}$$

и, следовательно, $\bar{\varpi}(t)$ коллинеарен вектору Sf. Из (3.7) и (3.9) получаем аналогичные выводы для $\bar{\gamma}$. Таким образом, вектор-функции $\bar{\varpi}(t)$ и $\bar{u}(t)$ коллинеарны неподвижному вектору Sf.

Сделанные наблюдения означают, что для $\psi_0 = 0$ экстремальная траектория соответствует вращению орта r относительно неподвижной (одновременно в связанной и инерционной системе отсчета) оси, отвечающее вектору угловой скорости $\omega = \left(\omega_1, \omega_2, 0\right)^T \perp Sf$. Семейство анормальных экстремальных траекторий в исследуемой задаче оптимального управления допустимо не для всех граничных условий (2.6).

Рассмотрим нормальные экстремали в случае $\psi_0 < 0$, поэтому сопряженная переменная, соответствующая целевому функционалу в силу однородности уравнений, считается $\psi_0 = -1$. Таким образом, гамильтониан H_0 принимает вид

$$H_0 = \left(\psi_2 r_3 - \psi_3 r_2\right)\omega_1 + \left(\psi_3 r_1 - \psi_1 r_3\right)\omega_2 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 - \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right)$$

и достигает максимума по u_1, u_2 при

$$u_1 = \gamma_1, \qquad u_2 = \gamma_2 \tag{3.13}$$

Гамильтониан на экстремальной траектории равен

$$H_0 = \overline{s} \cdot \overline{\omega} + \frac{1}{2}\overline{\gamma} \cdot \overline{\gamma} \tag{3.14}$$

Прямая и сопряженная системы уравнений ПМП, описывающие экстремали в рассматриваемой задаче, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{\overline{r}} &= -r_3 S\overline{\omega}, & \dot{\overline{\psi}} &= -\psi_3 S\overline{\omega} \\ \dot{r}_3 &= \overline{r} \wedge \overline{\omega}, & \dot{\psi}_3 &= \overline{\psi} \wedge \overline{\omega} \\ \dot{\overline{\omega}} &= \overline{\gamma}, & \dot{\overline{\gamma}} &= -\overline{s} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Система (3.15) представляет собой гамильтонову каноническую систему

$$\dot{\bar{r}} = \partial H_0 / \partial \bar{\psi}, \quad \dot{\bar{\psi}} = -\partial H_0 / \partial \bar{r}$$
$$\dot{r}_3 = \partial H_0 / \partial \psi_3, \quad \dot{\psi}_3 = -\partial H_0 / \partial r_3$$
$$\dot{\bar{\omega}} = \partial H_0 / \partial \bar{\gamma}, \quad \dot{\bar{\gamma}} = -\partial H_0 / \partial \bar{\omega}$$

с гамильтонианом (3.14).

Структура дифференциальных уравнений (3.15) и (3.5) указывает на возможность перехода к исследованию негамильтоновой системы уравнений меньшей размерности

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{s}} = -s_3 S \bar{\omega} \\ &\dot{s}_3 = \bar{s} \wedge \bar{\omega} \\ &\dot{\bar{\omega}} = \bar{\gamma} \\ &\dot{\bar{\gamma}} = -\bar{s} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Опишем семейство первых интегралов системы (3.16). Для этого введем функции

$$H_1 \equiv H_1(\bar{s}, s_3, \bar{\omega}, \bar{\gamma}) = s_3 + \bar{\gamma} \wedge \bar{\omega} \tag{3.17}$$

$$H_2 \equiv H_2(\bar{s}, s_3, \bar{\omega}, \bar{\gamma}) = \bar{s} \cdot \bar{s} + s_3^2 \tag{3.18}$$

Тогда для произвольных постоянных $h_i, i = 0,1,2$ справедливы равенства

$$H_i = h_i, i = 0,1,2 \tag{3.19}$$

и, следовательно, соотношения (3.19) образуют некоторое семейство первых интегралов системы (3.16).

Первый интеграл $H_0 = \mathrm{const}$ является следствием независимости гамильтониана (3.14) относительно времени. Остальные равенства проверяются в результате непосредственного дифференцирования. Будем считать далее, что $h_2 > 0$

(в противном случае из $h_2 = 0$ следует появление очевидного тривиального первого интеграла (3.18) с последующим простым решением системы (3.15) $\ddot{\bar{\omega}} = 0$).

Негамильтонова система (3.16) позволяет опустить промежуточные переменные $(\bar{s}, s_3, \bar{\gamma})$ и перейти непосредственно к нелинейным дифференциальным уравнениям относительно только вектора $\bar{\omega}$ угловой скорости. Действительно, из соотношений (3.16) получаем

$$\bar{s} = -\ddot{\bar{\omega}}, \qquad \bar{\gamma} = \dot{\bar{\omega}} \tag{3.20}$$

Поэтому из первого уравнения системы (3.16) имеем

$$\dddot{\bar{\omega}} = s_3 S \bar{\omega}$$

Наконец, воспользовавшись интегралом H_1, из полученного уравнения следует

$$\dddot{\bar{\omega}} = \left(h_1 + \bar{\omega} \wedge \dot{\bar{\omega}}\right) S \bar{\omega} \tag{3.21}$$

Таким образом, в исследуемой задаче оптимального управления все нормальные экстремали могут быть вполне описаны с помощью двумерного нелинейного дифференциального уравнения (3.20) относительно вектор-функции $\bar{\omega}$. Поэтому последующие исследования в статье основаны на анализе уравнения (3.21).

Полученные первые интегралы (3.19) удобно также представить с помощью функций только функции $\bar{\omega}$ и соответствующих производных. Следует заметить, что интеграл H_1 в уравнении (3.21) уже использован и поэтому семейство первых интегралов преобразуется к двум интегралам. Используя соотношения (3.20), из (3.14) и (3.18) получаем

$$H_0\left(\bar{\omega}, \dot{\bar{\omega}}, \ddot{\bar{\omega}}\right) = -\bar{\omega} \cdot \ddot{\bar{\omega}} + \frac{1}{2} \dot{\bar{\omega}} \cdot \dot{\bar{\omega}} \tag{3.22}$$

$$H_2\left(\bar{\omega},\dot{\bar{\omega}},\ddot{\bar{\omega}}\right)=\dddot{\bar{\omega}}\cdot\dddot{\bar{\omega}}+\left(\bar{\omega}\wedge\dot{\bar{\omega}}+h_1\right)^2 \qquad (3.23)$$

и требуемую систему первых интегралов

$$H_0=h_0 \qquad (3.24)$$

$$H_2=h_2 \qquad (3.25)$$

4. Переход к полярным координатам в системе уравнений

Поскольку система (3.21) записана относительно двумерной вектор-функции $\bar{\omega}$, то имеется возможность использовать полярные координаты для упрощения преобразований. Положим

$$\omega_1=\rho\cos\varphi,\omega_2=\rho\sin\varphi \qquad (4.1)$$

и перейдем к необходимым непосредственным выкладкам:

$$\dot{\omega}_1=\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$\ddot{\omega}_1=\ddot{\rho}\cos\varphi-2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\varphi-\rho\ddot{\varphi}\sin\varphi-\rho\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$
$$\dddot{\omega}_1=\dddot{\rho}\cos\varphi-3\ddot{\rho}\dot{\varphi}\sin\varphi-3\dot{\rho}\ddot{\varphi}\sin\varphi-3\dot{\rho}\dot{\varphi}^2\cos\varphi-$$
$$-3\rho\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\cos\varphi+\rho\dot{\varphi}^3\sin\varphi-\rho\dddot{\varphi}\sin\varphi$$
$$\dot{\omega}_2=\dot{\rho}\sin\varphi+\rho\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\ddot{\omega}_2=\ddot{\rho}\sin\varphi+2\dot{\rho}\dot{\varphi}\cos\varphi+\rho\ddot{\varphi}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$
$$\dddot{\omega}_2=\dddot{\rho}\sin\varphi+3\ddot{\rho}\dot{\varphi}\cos\varphi+3\dot{\rho}\ddot{\varphi}\cos\varphi-3\dot{\rho}\dot{\varphi}^2\sin\varphi-$$
$$-3\rho\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin\varphi-\rho\dot{\varphi}^3\cos\varphi+\rho\dddot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\bar{\omega}\wedge\dot{\bar{\omega}}=\omega_1\dot{\omega}_2-\omega_2\dot{\omega}_1=\rho^2\dot{\varphi}$$

Подставляя данные соотношения в уравнения (3.21) и группируя, окончательно приходим к формулам

$$\dddot{\rho}-3\dot{\rho}\dot{\varphi}^2-3\rho\dot{\varphi}\ddot{\varphi}=0 \qquad (4.2)$$

$$3\ddot{\rho}\dot{\varphi}+3\dot{\rho}\ddot{\varphi}-\rho\dot{\varphi}^3+\rho\dddot{\varphi}+\rho^3\dot{\varphi}+h_1\rho=0 \tag{4.3}$$

Уравнения (4.2) и (4.3) представляют собой два нелинейных взаимосвязанных одномерных дифференциальных уравнений относительно переменных ρ и φ. Система уравнений (4.2), (4.3) относительно ρ и φ равносильна системе (3.21) относительно переменных ω_1,ω_2.

Переход в системе дифференциальных уравнений от первоначальных декартовых прямоугольных координат к полярным координатам вызывает определенные перестроения. Действительно, константа h_1 зависит от каждого уравнения (3.21). Однако в равносильной системе (4.2), (4.3) константа h_1 определяется только вторым уравнением (4.3) и не зависит от числа h_1.

Перейдем теперь к полярным координатам в функциях H_i первых интегралов. Из соотношений (3.22), (3.23) и выражений (4.1) получаем

$$H_0\left(\rho,\varphi\right)\equiv H_0=-\frac{1}{2}\left(\rho^2\right)^{\cdot\cdot}+\frac{3}{2}\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2\right) \tag{4.4}$$

$$H_2=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)^2+\left(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)^2+\left(\rho^2\dot{\varphi}+h_1\right)^2 \tag{4.5}$$

Таким образом, для системы уравнений (4.2), (4.3) получаем два первых интеграла

$$\left(\rho^2\right)^{\cdot\cdot}-3\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2\right)=-2h_0 \tag{4.6}$$

$$\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)^2+\left(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)^2+\left(\rho^2\dot{\varphi}+h_1\right)^2=h_2 \tag{4.7}$$

Построенная совокупность уравнений (4.2), (4.3), (4.6), (4.7) (два дифференциальных уравнения для экстремали в полярных координатах и два первых интеграла), как будет показано, не являются функционально независимой. Следовательно, можно понизить порядок уравнений для построенной системы.

Действительно, дифференцируя первый интеграл (4.6), получаем после преобразований

$$0=\left[\left(\rho^2\right)^{\cdot\cdot}-3\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2\right)\right]^{\cdot}=2\rho\left(\dddot\rho-3\dot\rho\dot\varphi^2-3\rho\dot\varphi\ddot\varphi\right)$$

Исследуя нетривиальное решение $\rho>0$, приходим к выводу, что уравнение (4.2) функционально зависит относительно первого интеграла (4.6).

Таким образом, для анализа достаточно изучать дифференциальные уравнения (4.3), (4.6), (4.7), которые порождают решение экстремали первоначальной задачи оптимального управления.

Рассмотрим подробнее нетривиальное решение $\rho>0$. Из (4.6) имеем

$$3\dot\varphi^2=\frac{\left(\rho^2\right)^{\cdot\cdot}}{\rho^2}-3\frac{\dot\rho^2}{\rho^2}+2\frac{h_0}{\rho^2} \tag{4.8}$$

Поскольку справедливы равенства

$$\left(\rho^2\right)^{\cdot}=2\rho\dot\rho,\left(\rho^2\right)^{\cdot\cdot}=2\dot\rho^2+2\rho\ddot\rho,\qquad \left(\frac{\dot\rho}{\rho}\right)=\frac{\ddot\rho}{\rho}-\left(\frac{\dot\rho}{\rho}\right)^2$$

то из (4.8) можно после преобразований получить соотношение

$$\frac{3}{2}\dot\varphi^2=\left(\frac{\dot\rho}{\rho}\right)^{\cdot}+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot\rho}{\rho}\right)^2+\frac{h_0}{\rho} \tag{4.9}$$

Полученное скалярное дифференциальное уравнение приводит к разделению переменных φ и ρ. Следовательно, далее можно, в принципе, подставить формулу (4.9) в (4.3) и получить одно уравнение относительно переменной ρ.

Обозначим

$$\xi(\rho) \equiv \xi = \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^{\cdot} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^{2} + \frac{h_0}{\rho} \geq 0 \qquad (4.10)$$

Тогда

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{3}\xi} \qquad (4.11)$$

Подстановка (4.11) в (4.3) приводит к уравнениям

$$\left(3\ddot{\rho} + \rho^{3}\right)\sqrt{\frac{2}{3}\xi} + 3\dot{\rho}\left(\sqrt{\frac{2}{3}\xi}\right)^{\cdot} - \rho\left(\sqrt{\frac{2}{3}\xi}\right)^{3} - \rho\left(\sqrt{\frac{2}{3}\xi}\right)^{\cdot\cdot} + h_1\rho = 0 \qquad (4.12)$$

Таким образом, описание экстремальной траектории в полярных координатах для изучаемой задачи оптимального управления сводится к решению уравнения (4.12) относительно переменной ρ и последовательному решению задачи (4.9) относительно переменной $\dot{\varphi}$. К сожалению, в данное время аналитическое решение уравнений (4.12) и (4.9) неизвестно.

Необходимо заметить одно свойство инвариантности экстремалей в задаче оптимального управления, порожденных уравнениями (4.3), (4.6), (4.7) относительно полярных координат. Действительно, из (4.3), (4.6), (4.7) следует, что эти уравнения зависят исключительно от переменных $\rho, \dot{\rho}, \ldots$ и $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \ldots$, и, следовательно, не зависят от переменной φ. Это означает, что если пара функций (ρ, φ) удовлетворяет уравнениям (4.3), (4.6), (4.7), то для произвольного числа c пара $(\rho, \varphi + c)$ также есть решение системы (4.3), (4.6), (4.7).

5. Частные решения

Ни система уравнений (3.21), (3.24), (3.25) (совместно с первыми интегралами), ни система (4.3), (4.6), (4.7), порождающие нормальные экстремали в рассматриваемой задаче оптимального управления, не позволяют в данное время дать полное описание явных решений соответствующих дифференциальных уравнений. Поэтому целью данного раздела является построение некоторого семейства аналитических частных решений.

Тригонометрические экстремали. Будем изучать уравнение (3.21) и предположим, что имеются решения вида

$$\omega_1 \equiv \omega_1(t) = a\cos(bt+c), \qquad \omega_2 \equiv \omega_2(t) = a\sin(bt+c) \tag{5.1}$$

где a,b,c - некоторые постоянные, которые будут определены далее.

Непосредственные вычисления дают

$$\begin{gathered}
\dot{\omega}_1 = -ab\sin(bt+c), \qquad \dot{\omega}_2 = ab\cos(bt+c) \\
\ddot{\omega}_1 = -ab^2\cos(bt+c), \quad \ddot{\omega}_2 = -ab^2\sin(bt+c) \\
\dddot{\omega}_1 = ab^3\sin(bt+c) \qquad \dddot{\omega}_2 = -ab^3\cos(bt+c) \\
\omega_1\dot{\omega}_2 - \omega_2\dot{\omega}_1 = a^2 b
\end{gathered}$$

Следовательно, покоординатная запись уравнений (3.21) приводит к двум соотношениям

$$\begin{gathered}
ab^3\sin(bt+c) = \left(a^2b+h_1\right)a\sin(bt+c) \\
-ab^3\cos(bt+c) = -\left(a^2b+h_1\right)a\cos(bt+c)
\end{gathered}$$

откуда (исключая тривиальное решение $a=0$)

$$b^3 = a^2b + h_1 \tag{5.2}$$

Таким образом, тригонометрические решения (5.1) для постоянных (5.2) удовлетворяют уравнениям (3.21). Непосредственно проверяется справедливость равенств (3.24), (3.25) для решений (5.1).

Расширить класс тригонометрических решений (5.1) для задачи (3.21) не удается. Действительно, положим x - скалярная функция; b,c - постоянные и рассмотрим вопрос о существовании решения вида

$$\omega_1(t)=x(t)\cos(bt+c),\quad \omega_2(t)=x(t)\sin(bt+c) \qquad (5.3)$$

Выполним непосредственные преобразования

$$\begin{aligned}
&\dot\omega_1=\dot x\cos(bt+c)-bx\sin(bt+c)\\
&\ddot\omega_1=\ddot x\cos(bt+c)-2\dot xb\sin(bt+c)-b^2x\cos(bt+c)\\
&\dddot\omega_1=\dddot x\cos(bt+c)-3\ddot xb\sin(bt+c)-3\dot xb\cos(bt+c)+xb^3\sin(bt+c)\\
&\dot\omega_2=\dot x\sin(bt+c)+xb\cos(bt+c)\\
&\ddot\omega_2=\ddot x\sin(bt+c)+2\dot xb\cos(bt+c)-xb^3\sin(bt+c)\\
&\dddot\omega_2=\dddot x\sin(bt+c)+3\ddot xb\cos(bt+c)-3\dot xb^3\sin(bt+c)-xb^3\cos(bt+c)\\
&\omega_1\dot\omega_2-\omega_2\dot\omega_1=x^2b
\end{aligned}$$

Тогда, используя данные выражения в (5.3) и (3.21), получаем уравнения

$$\begin{aligned}
&\left(\dddot x-3\dot xb^2\right)\cos(bt+c)+\left(-3\ddot xb+xb^3-x^3b-h_1\right)\sin(bt+c)=0\\
&\left(3\ddot xb-xb^3+x^3b-h_1\right)\cos(bt+c)+\left(\dddot x-3\dot xb\right)\sin(bt+c)=0
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливы равенства

$$\dddot x-3\dot xb^3=0 \qquad (5.4)$$

$$\left(3\ddot x-xb^2+x^3-h_1\right)b=0 \qquad (5.5)$$

Возможны варианты:

$$3\ddot{x} - xb^3 + x^3 = \frac{h_1}{b}, b \neq 0 \tag{5.6}$$

$$b = 0 \tag{5.7}$$

В первом случае из (5.6) имеем

$$3\dddot{x} = \dot{x}b^2 - 3x^2\dot{x}$$

и поэтому из (5.4) после преобразований следует

$$\left(8b^2 + 3x^2\right)\dot{x} = 0$$

Это возможно только, если $x(t) = \text{const}$.

Во втором случае из (5.7) и (5.4) получаем

$$\dddot{x} = 0 \tag{5.8}$$

т.е. $x(t)$- многочлен второй степени по переменной t.

Таким образом, расширить тригонометрические решения (5.1) до (5.3) не удается.

Тем не менее, имеются *полиномиальные экстремали* - обобщение тригонометрических решений (5.3) которые в частном случае (5.7) и (5.8) позволяют прийти к новому типу решений, аналог которого имеет вид «*плоского поворота*». Частные решения уравнения (3.21) могут быть записаны в виде многочленов второй степени по переменной времени, т.е.

$$\begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix} = \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

где a_i, α, β - некоторые постоянные.

Заключение.

Установлено, что в задаче оптимального управления переориентацией симметричного КА стабилизированного вращением с минимальными энергозатратами имеется семейство аналитических экстремальных угловых скоростей. В отличие от предшествующих работ не используются дополнительные упрощения и предположения. Соответствующие координаты класса экстремальных траекторий выражаются явным образом исключительно через тригонометрические функции времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (17-01-00538).

Библиографический список

1. Hall C.D., Rand R.H. Spinup dynamic of axial dual-spin spacecraft // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1994. Vol. 17, no. 1, pp. 30-37.

2. Meehan P.A., Asokanthan S.F. Control of chaotic motion in a dual – spin spacecraft with nutational damping // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2002. Vol. 25, no. 2, pp. 209-214.

3. Bao G.W., Pascal M. Stability of spinning liquid-filled spacecraft // Applied Mechanics. 1997. Vol. 67, pp. 407-421.

4. Tsiotras P., Longuski J.M. Spin-axis stabilization of symmetric spacecraft with two control torques // Systems and Control Letters. 1994. Vol. 23, pp. 395-402.

5. Biggs J.D., Horri N. Optimal geometric motion planning for a spin-stabilized spacecraft // Systems and Control Letters. 2012. Vol. 61. pp. 609-619.

6. Сиротин А.Н. Об экстремалях в задаче оптимального управления вращением несимметричного космического аппарата, допускающих аналитическое описание // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т.17. №4. С. 58-63.

7. Акуленко Л.Д., Николаев Н.В. Переориентация оси динамической симметрии вращающегося космического аппарата // Космические исследования. 1991. Т. 29, № 6. С. 849 – 857.

8. Левский М. В.Управление пространственной ориентацией космического аппарата с минимальным расходом топлива // Вестник Московского авиационного института. 2008. Т.15. № 3. С. 129-140.

9. Бесчастный И.Ю. Об оптимальном качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания // Математический сборник. 2014. Т. 205. № 2. С. 2-38.