УДК 531.36

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ КАК НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Александр Яковлевич КРАСИНСКИЙ родился в 1947 г. в городе Токмак Чуйской области Киргизской ССР. Профессор МАИ. Доктор физико-математических наук, доцент. Основные научные интересы — в области аналитической механики, нелинейной теории устойчивости и стабилизации, теории управления при неполной информации. Автор 95 научных работ.

Alexander Ya. KRASINSKY, D.Sci, was born in 1947, in Kirgizia. He is a Professor at the MAI. His research interests are in analytical mechanics, nonlinear stability theory, control theory for systems with incomplete information. He has published 95 technical papers.

Артур Анварович ХАЛИКОВ родился в 1984 г. в городе Ташкенте Узбекской ССР. Аспирант МГУПБ. Основные научные интересы — в области программного обеспечения систем управления мобильных роботов.

Arthur A. KHALIKOV, was born in 1984, in Tashkent. He is a Postgraduate Student at the Moscow State University for Applied Biotechnologies (MGU-PB). His research interests are in simulation of mobile robot dynamics.

Для неголономных систем при использовании нелинейных векторных уравнений движения обсуждаются возможные постановки задач устойчивости и стабилизации установившихся движений. Анализируются структура нелинейных уравнений возмущенного движения и достигаемый после стабилизации тип устойчивости при различных постановках задачи. Приводятся возможности разработанного программного продукта, позволяющего в символьной форме реализовать алгоритм определения коэффициентов стабилизирующего управления и системы оценивания. Рассматривается его применение к задаче стабилизации стационарного движения — качения по прямой модели одноколесного велосипеда [1]. В отличие от [1] здесь использованы переменные Лагранжа, а коэффициенты стабилизирующего управления определены решением методом Н.Н Красовского [2] задачи оптимальной стабилизации для выделенной [3] линейной управляемой подсистемы. Приведены графики переходного процесса для угла отклонения велосипеда от вертикали при действии найденного в данной работе управления и соответствующий график из [1].

Введение

Интенсивное развитие робототехники и мехатроники превратило исследование задач устойчивости и стабилизации движений неголономных систем из достаточно абстрактной академической проблемы аналитической механики и теории устойчивости в актуальную задачу технической практики, поскольку такие системы могут служить моделями многих типов мобильных роботов. Это привело к появлению большого количества работ ([1, 4, 5, 6] и др.) по динамике конкретных неголономных систем. Вместе с тем продолжаются исследования и по аналитической механике неголономных систем, в том числе и управляемых [7].

Неголономные механические системы — обширный класс механических систем, стесненных неинтегрируемыми связями, накладывающими ограничения на скорости, но не на положение системы (например, условия качения без проскальзывания). Системы этого класса обладают специфическими особенностями [8], которые приводят к очень большому разнообразию [8—25] возможных постановок задач устойчивости и стабилизации.

Одной из таких особенностей является неизолированность установившихся движений [9—11]. В частности, неголономные системы с однородными связями обладают многообразиями положений равновесия, размерности которых не меньше числа неголономных связей [9—10]. Наряду с традиционной задачей об устойчивости отдельного невозмущенного движения, для неизолированных установившихся движений, благодаря наличию многообразия, возможны постановки задач об устойчивости (и стабилизации) всего многообразия по отношению к переменным, описывающим отклонения системы от многообразия. Такие задачи рассматривались в работах школы проф. Н.А. Фуфаева [9—10,15,16, 19, 20, 23].

Отметим, что если для положений равновесия неголономных систем с однородными связями размерности многообразий не меньше числа неголономных связей [9—11, 23], то в более общей ситуации размерности многообразий установившихся движений могут быть напрямую не связаны с числом неинтегрируемых связей [8, 21]. При этом практически в каждой ситуации для отдельного установившегося движения можно рассматривать задачи о безусловной и условной устойчивости по отношению к соответствующим переменным. Поэтому даже для положений равновесия неголономных систем задачи устойчивости (и стабилизации) требуют гораздо большей, нежели в аналогичных задачах для голономных систем, строгости и полноты постановок. Следует точно и полно формулировать исследуемую задачу (устойчивость чего именно — конкретного положения равновесия или всего многообразия — рассматривается, какая именно устойчивость — условная или безусловная, по отношению к каким конкретно переменным). Если речь идет об устойчивости стационарных движений, задача усложняется еще больше — для неголономных систем известны [21] по крайней мере пять определений циклических координат.

Постановка задачи

Вследствие неизолированности исследуемых движений в большей части задач стабилизации в принципе невозможно обеспечение асимптотической устойчивости по первому приближению. В то же время возможно наличие дополнительных по сравнению с размерностями соответствующих многообразий корней характеристического уравнения на мнимой оси, причем сохраняется возможность достижения по этим переменным асимптотической устойчивости. Вместе с тем правомерен вопрос, имеет ли смысл это делать, если можно, анализируя нелинейные уравнения движения, доказать устойчивость и при первоначальном расположении соответствующих этим переменным корней характеристического уравнения и за счет этого уменьшить (по сравнению, например, с [6]) число исполнительных устройств и сократить объем измерительной информации (если информация о состоянии неполная). Естественно, при этом ситуация, как уже отмечалось, существенно усложняется по сравнению с рассматриваемыми в [6] случаями: возрастает трудоемкость проводимых для получения заключения об устойчивости преобразований, возникает необходимость анализа структуры нелинейных членов, и сама процедура анализа также является достаточно непростой задачей.

Основные известные результаты [1, 4, 6, 12—14, 24, 25] по стабилизации движений неголономных систем относятся к случаям, в которых число корней характеристического уравнения на мнимой оси после стабилизации наименьшее из возможных. При таком подходе число корней характеристического уравнения слева от мнимой оси в замкнутой стабилизирующим управлением системе оказывается максимально возможным. В таких ситуациях можно не анализировать (и даже не выписывать) нелинейные члены уравнений движения, но размерность стабилизирующего управления может оказаться неоправданно большой по сравнению с минимально необходимой.

Для исследования более сложных (по сравнению, например, с [6]) случаев устойчивости, когда, в частности, число корней характеристического уравнения с нулевыми действительными частями может быть больше размерности многообразия, на котором расположено исследуемое движение, информации только о расположении корней может оказаться недостаточно. Для рассмотрения подобных случаев достаточно давно [3, 26—28] применяется такая форма векторно-матричных уравнений, которая создает возможности не только для определения расположения корней характеристического уравнения, но и для анализа структуры нелинейных членов с точки зрения необходимости проведения замены Ляпунова—Каменкова [29, 30] для сведения задачи к соответствующему особенному случаю. Кроме того, такие уравнения позволяют решать важный для многих прикладных задач вопрос о возможности сохранения асимптотической по части переменных устойчивости после этой нелинейной замены.

Следует обратить внимание на то, что в реальном выполнении этой замены Ляпунова—Каменкова в конкретных задачах нет необходимости, достаточно проанализировать [3, 31, 32], по каким именно переменным она должна быть выполнена и каким образом может измениться характер устойчивости после замены. Условия [29, 30] существования соответствующих функций, как правило, обеспечиваются соответствующим расположением корней характеристического уравнения.

Итак, предлагается следующий подход к задачам стабилизации: при выборе конкретного невозмущенного движения, используя полученные векторно-матричные уравнения возмущенного движения с выделенным первым приближением и явным видом нелинейных членов, добиться (неасимптотической) по всем переменным устойчивости приложением линейного управления возможно меньшей размерности. Коэффициенты стабилизирующего управления (при неполной информации о состоянии — и коэффициенты идентификатора) однозначно определяются решением методом [2] соответствующих линейно-квадратичных задач стабилизации для выделяемых [3] подсистем возможно меньших размерностей. Устойчивость в полной замкнутой найденным управлением системе устанавливается применением принципа сведения [29, 30]. С точки зрения общей теории критических случаев задача сводится к особенному случаю при возможно меньшем (по сравнению, например, с [6]) числе корней характеристического уравнения с отрицательными действительными частями в замкнутой системе. Используемые форма уравнений и алгоритм формирования управления (за счет усложнения исследования) позволяют, в отличие от [6], не только сократить число исполнительных устройств и датчиков измерительной информации, но и выделить асимптотически устойчивые переменные.

Очевидно, что рассмотрение подобных задач связано с трудоемкими и громоздкими аналитическими преобразованиями. При выполнении преобразований такого рода выгодно использование современных программных средств для аналитических вычислений, одним из которых является программный пакет Maple [33]. Этот пакет, предоставляющий широкие возможности по символьному дифференцированию, упрощению выражений, работе с матрицами и др., в силу своей универсальности, не ориентирован на рассмотрение нелинейных динамических задач, в частности устойчивости и стабилизации.

Для проведения таких исследований на основе пакета Maple 9.5 разработана [34] библиотека программных модулей, которые при известной функции Лагранжа создают возможность анализа устойчивости и стабилизации установившихся движений голономных и неголономных механических систем в различных типах переменных (Лагранжа, Рауса, Гамильтона). В отличие от [6], связи, наложенные на систему, могут быть, как однородными, так и неоднородными, и, кроме потенциальных сил, могут действовать произвольные непотенциальные обобщенные силы, не нарушающие условий существования и единственности решений дифференциальных уравнений. Отметим также, что разработанный метод и его программная реализация позволяют, как частный случай общей ситуации, рассматривать задачи стабилизации для систем с дифференциальными интегрируемыми связями (т.е. с геометрическими связями в продифференцированном виде — для систем с избыточными координатами).

В настоящей работе рассматривается применение [34] к задачам стабилизации стационарных движений неголономных систем с однородными связями, в частности систем Чаплыгина, к которым относятся и модели колесных роботов. Метод решения задачи основывается на введении общей процедуры разбиения вектора обобщенных координат системы, использовании полученных для этого разбиения векторно-матричных [28] уравнений движения в форме Воронца [11], принципа сведения теории устойчивости [29, 30], общей теории управления и теории оценивания [35]. В данной работе использованы переменные Лагранжа, но программный продукт дает возможность рассмотрения задачи в переменных и Рауса, и Гамильтона, что может оказаться полезным [3, 28, 31, 32] в целях уменьшения размерностей управляемых подсистем и упрощения их структуры.

Несмотря на то, что в данной работе показано применение разрабатываемого достаточно универсального программного продукта к сравнительно несложной задаче — задаче стабилизации стационарных движений систем Чаплыгина, будут обсуждены некоторые проблемы получения уравнений движения и в более сложных системах.

Получение уравнений движения

Неголономная механическая система задается вектором обобщенных координат, неинтегрируемыми связями и функцией Лагранжа системы без учета связей. Предполагается также, что на систему действуют потенциальные и непотенциальные обобщенные силы. Для вывода векторно-матричных уравнений вектор обобщенных координат разбивается на некоторое число составляющих. Сначала производится очевидное разбиение на векторы координат, которым соответствуют зависимые в силу связей и независимые скорости. Далее, возможно разделение, во-первых, в соответствии с типом координат (координаты позиционные или в том или ином смысле циклические, циклические в смысле разных определений, соответствующие связям типа Чаплыгина и связям общего вида и др.). Во-вторых, в некоторых случаях требуется учитывать разную степень точности математической модели, по отношению к разным степеням свободы. В-третьих, вектор циклических координат приходится разбивать из-за наличия среди них управляемых и неуправляемых координат. В-четвертых, не всегда выгодно введение импульсов по всем циклическим координатам. При рассмотрении каждой системы разбиение вектора обобщенных координат проводится в соответствии с особенностями именно этой системы и конкретной постановки задачи устойчивости или стабилизации.

Процедура составления уравнений движения формально может обходиться без информации о типах координат введенного разбиения. Однако дальнейшее исследование, в частности анализ устойчивости стационарного движения системы, невозможно без учета особенностей конкретной системы. Достаточно произвольное разбиение фазового вектора на векторные составляющие приводит к необходимости разработки общей процедуры составления уравнений движения, которая должна содержать этапы получения матрицы коэффициентов кинетической энергии, матрицы коэффициентов в уравнениях связей, векторов обобщенных сил, вычисления членов неголономности, а затем составления уравнений движения в векторно-матричном виде.

Замечание. Далее в этой работе всюду речь будет идти только о решении задач стабилизации движений неголономных систем с однородными связями в переменных Лагранжа. Но возможности разрабатываемого программного продукта гораздо шире. Имеется опыт автоматического составления (применением стандартизированной процедуры) в символьном виде векторных уравнений возмущенного движения неголономной системы с неоднородными связями в переменных не только Лагранжа, но и Рауса и Гамильтона при разбиении вектора обобщенных координат на 6 составляющих (в рассмотренной конкретной системе не все они оказывались векторными). При этом процедура вычислений функций Рауса и Гамильтона по известной функции Лагранжа также реализована в символьной форме. Кроме того, автоматизирован и пересчет непотенциальных обобщенных сил при применении соответствующего типа переменных.

Исследование устойчивости и стабилизации

Наличие многообразия установившихся движений и другие отмеченные выше специфические особенности неголономных систем обуславливает множество различных постановок задач об устойчивости и стабилизации.

В данной работе рассматривается общая постановка задачи о стабилизации стационарного движения системы до неасимптотической (условной) устойчивости по отношению, в частности, ко всем скоростям и координатам, соответствующим независимым скоростям, приложением управления возможно меньшей размерности и наиболее простой структуры.

В соответствии с выбранной постановкой задачи для заданного стационарного движения в символьном виде составляются уравнения возмущенного движения в нормальной форме с выделенным в окрестности исследуемого движения линейным приближением и явной формой нелинейных членов. Достаточные условия устойчивости замкнутой системы определены [3, 27, 28, 32] сведением к соответствующему особенному случаю [29, 30].

Решение задачи стабилизации при конкретных числовых значениях параметров осуществляется проверкой достаточного условия управляемости и наблюдаемости, определением коэффициентов оптимального стабилизирующего управления методом Н.Н. Красовского [2] и численным интегрированием замкнутой нелинейной системы при конкретных [1] числовых параметрах системы и начальных возмущениях.

Уравнения движения

Неголономная механическая система задается вектором обобщенных координат, неоднородными (в общем случае) неинтегрируемыми связями и функцией кинетической энергии системы без учета связей:

$$q' = (q_1 \ldots q_n); \tag{1}$$

$$\dot{q}_\mu = B_{\mu\rho}(q)\,\dot{q}_\rho; \tag{2}$$

$$T^{(0)} = T_2^{(0)} + T_1^{(0)} + T_0^{(0)}; \tag{3}$$

$$T_2^{(0)} = \frac{1}{2} a_{ij}^0(q)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j; \quad T_1^{(0)} = b_i^0(q)\,\dot{q}_i; \quad T_0^{(0)} = c^0(q). \tag{4}$$

Предполагается также, что на систему действуют потенциальные силы с энергией $\Pi(q)$ и непотенциальные обобщенные силы $Q(q,\dot{q})$.

Здесь и далее штрих означает транспонирование, причем, если элементы транспонируемого объекта матричные, транспонирование ведется и по этим элементам. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Индексы изменяются следующим образом:

$$i, j = 1 \ldots n; \;\; \nu, \rho = 1 \ldots n-m; \;\; \mu, \sigma = n-m+1 \ldots n.$$

Введем разделение вектора обобщенных координат:

$$q = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \;\; r = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{M_r} \end{pmatrix}, \;\; s = \begin{pmatrix} \alpha_{M-M_s+1} \\ \vdots \\ \alpha_M \end{pmatrix};$$

$$\alpha_\xi = \begin{pmatrix} q_{N_{\xi-1}+1} \\ \vdots \\ q_{N_\xi} \end{pmatrix}, \;\; \alpha_\zeta = \begin{pmatrix} q_{N_{\zeta-1}+1} \\ \vdots \\ q_{N_\zeta} \end{pmatrix}, \;\; N = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_M \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$M = M_r + M_s;$$

$$\xi, \kappa, \eta = 1 \ldots M_r, \;\; \zeta, \lambda, \gamma = M - M_s + 1 \ldots M;$$

$$\tau, \vartheta = 1 \ldots M, \;\; \Delta_\tau = N_{\tau-1} + 1 \ldots N_\tau, \;\; N_0 = 0,$$

где r, s — векторы координат, соответствующих зависимым и независимым координатам.

Наиболее удобны для исследования устойчивости и стабилизации уравнения Воронца [15]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}-B_{\mu\nu}\frac{\partial T}{\partial q_\mu}=\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \dot{q}_\mu}\right)_{\dot{q}_\mu\to\dot{q}_\rho}\times\\&\times\Omega_{\mu\nu\rho}\,\dot{q}_\rho-\frac{\partial \Pi}{\partial q_\nu}-B_{\mu\nu}\frac{\partial \Pi}{\partial q_\mu}+Q_\nu+B_{\mu\nu}Q_\mu,\\&\dot{q}_\mu=B_{\mu\rho}\,\dot{q}_\rho,\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

где

$$\Omega_{\mu\nu\rho}=\frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial q_\rho}-\frac{\partial B_{\mu\rho}}{\partial q_\nu}+\frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial q_\sigma}B_{\sigma\rho}-\frac{\partial B_{\mu\rho}}{\partial q_\sigma}B_{\sigma\nu}. \quad (7)$$

Для представления данного уравнения в векторно-матричном виде необходимо получить матрицы коэффициентов кинетической энергии, коэффициентов в уравнениях связей и выражения векторов обобщенных сил.

Получение матриц коэффициентов функции кинетической энергии и уравнений связей

В соответствии с (5) получим:

$$\dot{\alpha}\zeta=B_{\zeta k}\,\dot{\alpha}k; \quad (8)$$

$$\begin{aligned}&T_2^{(0)}=\frac{1}{2}\dot{\alpha}'_\xi\,a^0_{\xi\kappa}\,\dot{\alpha}_\kappa+\dot{\alpha}'_\xi\,a^0_{\xi\zeta}\,\dot{\alpha}_\zeta+\frac{1}{2}\dot{\alpha}'_\zeta\,a^0_{\zeta\lambda}\,\dot{\alpha}_\lambda;\\&T_1^{(0)}=d^{0\prime}_\xi\,\dot{\alpha}\xi+d^{0\prime}_\zeta\,\dot{\alpha}\zeta,\ T_0^{(0)}=c^0,\end{aligned} \quad (9)$$

где

$$a^0_{\xi\kappa}=\left\|a^0_{\Delta_\xi\Delta_\kappa}(q)\right\|,\ a^0_{\xi\zeta}=\left\|a^0_{\Delta_\xi\Delta_\zeta}(q)\right\|,\ a^0_{\zeta\lambda}=\left\|a^0_{\Delta_\zeta\Delta_\lambda}(q)\right\|,$$

$$d^0_\xi=\left\|a^0_{\Delta_\xi}(q)\right\|,\ d^0_\zeta=\left\|a^0_{\Delta_\zeta}(q)\right\|,\ B_{\zeta k}=\left\|B_{\Delta_\zeta\Delta_\kappa}\right\|,\ a^{0\,\prime}_{\tau\nu}=a^0_{\nu\tau}.$$

Подставив (8) в (9), получим выражение для кинетической энергии с учетом связей:

$$T=T_2+T_1+T_0, \quad (10)$$

где

$$T_2=\frac{1}{2}\dot{\alpha}'_\xi\,a_{\xi\kappa}\,\dot{\alpha}_\kappa,\quad T_1=d'_\xi\,\dot{\alpha}\xi,\quad T_0=c^0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}&a_{\xi\kappa}=a^0_{\xi\kappa}+a^0_{\xi\zeta}B_{\zeta\kappa}+B'_{\zeta\xi}(a^0_{\zeta\kappa}+a^0_{\zeta\lambda}\,B_{\lambda\kappa}),\\&\qquad d'_k=d^{0\prime}_k+d^{0\prime}_\zeta B_{\zeta k}.\end{aligned} \quad (12)$$

Силы, действующие на систему

Представим в векторно-матричном виде силы, действующие на систему:

$$\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \Pi}{\partial r}\\[2mm]\dfrac{\partial \Pi}{\partial s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_r\\L_s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_{rr}&C_{rs}\\C_{sr}&C_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_r\\\alpha_s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Pi^{*2}_r\\\Pi^{*2}_s\end{pmatrix};$$

$$L_r=\|L_\xi\|;\ L_\xi=\left(\Pi_{[\alpha_\xi]}\right)_0;\ L_s=\|L_\lambda\|;\ L_\lambda=\left(\Pi_{[\alpha_\lambda]}\right)_0;$$

$$C_{rr}=\|C_{\xi\kappa}\|;\ C_{rs}=\|C_{\xi\lambda}\|;\ C_{sr}=\|C_{\lambda\kappa}\|;$$

$$C_{ss}=\|C_{\lambda\gamma}\|;\ C_{\tau\upsilon}=\left\|C_{\Delta_\tau\Delta_\vartheta}\right\|;C_{\Delta_\tau\Delta_\vartheta}=\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{\Delta_\tau}\partial \alpha_{\Delta_\vartheta}}\right)_0;$$

$$\Pi^{*2}_r=\|\Pi^{*2}_\xi\|;\ \Pi^{*2}_s=\|\Pi^{*2}_\lambda\|;$$

$$Q(q,\dot{q})=S(q)+F(q,\dot{q});\quad F(q,\,0)\equiv 0;$$

$$S(q)=\begin{pmatrix}S_r\\S_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S^0_r\\S^0_s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}S_{rr}&S_{rs}\\S_{sr}&S_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_r\\\alpha_s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}S^2_r\\S^2_s\end{pmatrix};$$

$$S^0_r=\|S^0_\xi\|;\ S^0_s=\|S^0_\lambda\|;\ S^0_\xi=\left\|S^0_{\Delta_\xi}\right\|;\ S^0_\lambda=\left\|S^0_{\Delta_\lambda}\right\|;$$

$$S^0_{\Delta_\xi}=\left(S_{[\alpha_{\Delta_\xi}]}\right)_0;\ S^0_{\Delta_\lambda}=\left(S_{[\alpha_{\Delta_\lambda}]}\right)_0;$$

$$S_{rr}=\|S_{\xi\kappa}\|;\ S_{rs}=\|S_{\xi\lambda}\|;\ S_{sr}=\|S_{\lambda\kappa}\|;$$

$$S_{ss}=\|S_{\lambda\gamma}\|;\ S_{\tau\vartheta}=\left\|S_{\Delta_\tau\Delta_\vartheta}\right\|;$$

$$S_{\Delta_\tau\Delta_\vartheta}=\left(\frac{\partial S_{\Delta_\tau}}{\partial \alpha_{\Delta_\vartheta}}\right)_0;\ S^2_r=\|S^2_\xi\|;\ S^2_s=\|S^2_\lambda\|;$$

$$F(q,\dot{r},\dot{s})=\begin{pmatrix}F_{rr}\\F_{sr}\end{pmatrix}\cdot\dot{r}+\begin{pmatrix}F^2_r\\F^2_s\end{pmatrix};$$

$$F_{rr}=\|F_{\xi\kappa}\|;\ F_{sr}=\|F_{\lambda\xi}\|;\ F^2_r=\|F^2_\xi\|;\ F^2_s=\|F^2_\lambda\|;$$

$$F_{\tau\vartheta}=\left\|F_{\Delta_\tau\Delta_\vartheta}\right\|;\ F_{\Delta_\tau\Delta_\vartheta}=F_{\Delta_\tau\Delta_\vartheta}(0,\,0).$$

Члены неголономности уравнений движения

Обозначим члены неголономности уравнений (6):

$$Nh_\nu=\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \dot{q}_\mu}\right)_{\dot{q}_\mu\to\dot{q}_\rho}\Omega_{\mu\nu\rho}\,\dot{q}_\rho. \quad (13)$$

Запишем выражение (13) в векторно-матричном виде:

$$\Omega_{\xi}=\left\|\Omega_{\zeta\xi\kappa}\right\|=\begin{pmatrix}\Omega_{1\,\xi\,1} & \cdots & \Omega_{1\,\xi\,M_r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Omega_{M_s\,\xi\,1} & \cdots & \Omega_{M_s\,\xi\,M_r}\end{pmatrix},$$

$$\Omega_{\zeta\xi\kappa}=\begin{pmatrix}\Omega_{\zeta\Delta_{(N_{\xi-1}+1)}\kappa}\\ \vdots\\ \Omega_{\zeta\Delta_{N_{\xi}}\kappa}\end{pmatrix},\quad \Omega_{\zeta\Delta_{\xi}\kappa}=\left\|\Omega_{\Delta_{\zeta}\Delta_{\xi}\Delta_{\kappa}}\right\|; \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \dot{q}_{\mu}}\right)_{\dot{q}_{\mu}\to\dot{q}_{\rho}}=\left\|\Theta_{\zeta\xi}\,\dot{\alpha}_{\xi}+d_{\zeta}^{0}\right\|,\ \Theta_{\zeta\xi}=a_{\zeta\xi}^{0}+a_{\zeta\lambda}^{0}B_{\lambda\xi}; \tag{15}$$

$$Nh_{\xi}^{2}=\dot{r}'\,\Theta_{\zeta\xi}'\,\Omega_{\xi}\,\dot{r},\quad Nh_{\xi}^{1}=d^{0\prime}\Omega_{\xi}\,\dot{r}. \tag{16}$$

Векторно-матричный вид уравнений движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\nu}}\right)=\frac{d}{dt}\left(a_{\xi\kappa}\,\dot{\alpha}_{\kappa}+d_{\xi}\right)=$$

$$=a_{\xi\kappa}\,\ddot{\alpha}_{\kappa}+\dot{\alpha}_{\kappa}'\left(a_{\xi\kappa(\alpha_{\eta})}'\,\dot{\alpha}_{\eta}+a_{\xi\kappa(\alpha_{\lambda})}'B_{\lambda\eta}\right)\dot{\alpha}_{\eta}+ \tag{17}$$

$$+d_{\xi(\alpha_{\eta})}'\,\dot{\alpha}_{\eta}+d_{\xi(\alpha_{\lambda})}'B_{\lambda\eta}\,\dot{\alpha}_{\eta}.$$

Здесь и далее запись $A_{(q)}$, $A_{[q]}$ для матрицы $A(q)=\left\|a_{ij}(q)\right\|$ означает [9] «вектор» с матричными компонентами $\left\|\frac{\partial a_{i\nu}}{\partial q_{j}}\right\|$, $\left\|\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_{\nu}}\right\|$, где ν — номер компоненты, причем $A_{(q)}'=\left\|\frac{\partial a_{j\nu}}{\partial q_{i}}\right\|$, $A_{[q]}'=\left\|\frac{\partial a_{ji}}{\partial q_{\nu}}\right\|$;

$$\frac{\partial T}{\partial q_{\nu}}=\frac{1}{2}\dot{\alpha}_{\kappa}'\,a_{k\eta[\alpha_{\xi}]}\,\dot{\alpha}_{\eta}+d_{\kappa[\alpha_{\xi}]}'\,\dot{\alpha}_{\kappa}+c^{0}{}_{[\alpha_{\xi}]};$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_{\mu}}=\frac{1}{2}\dot{\alpha}_{\kappa}'\,a_{k\eta[\alpha_{\zeta}]}\,\dot{\alpha}_{\eta}+d_{\kappa[\alpha_{\zeta}]}'\,\dot{\alpha}_{\kappa}+c^{0}{}_{[\alpha_{\zeta}]};$$

$$B_{\mu\nu}\frac{\partial T}{\partial q_{\mu}}=\frac{1}{2}\dot{\alpha}_{\kappa}'\left(B_{\zeta\xi}'\,a_{k\eta[\alpha_{\zeta}]}\right)\dot{\alpha}_{\eta}+B_{\zeta\xi}'d_{\kappa[\alpha_{\zeta}]}'\,\dot{\alpha}_{\kappa}+B_{\zeta\xi}'c^{0}{}_{[\alpha_{\zeta}]};$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial q_{\nu}}=\Pi_{[\alpha_{\xi}]},\ \frac{\partial\Pi}{\partial q_{\mu}}=\Pi_{[\alpha_{\zeta}]},\ B_{\mu\nu}\frac{\partial\Pi}{\partial q_{\mu}}=B_{\zeta\xi}'\,\Pi_{[\alpha_{\zeta}]};$$

$$Q_{\nu}=\left\|Q_{\xi}\right\|,\quad Q_{\xi}=\left\|Q_{\Delta_{\xi}}\right\|,\quad Q_{\mu}=\left\|Q_{\zeta}\right\|,$$

$$Q_{\zeta}=\left\|Q_{\Delta_{\zeta}}\right\|,\quad B_{\mu\nu}Q_{\mu}=\left\|B_{\zeta\xi}Q_{\zeta}\right\|.$$

С учетом этого, уравнения (6) можно представить в форме:

$$\left.\begin{aligned}&a_{\xi\kappa}\,\ddot{\alpha}_{\kappa}=\Psi_{\xi[\lambda\kappa\eta]}^{2}+\Psi_{\xi[\lambda\eta]}^{1}+\Psi_{\xi[\lambda]}^{0},\\ &\dot{\alpha}_{\zeta}=B_{\zeta k}\,\dot{\alpha}_{k},\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где

$$\Psi_{\xi[\lambda\kappa\eta]}^{2}=\dot{\alpha}_{\kappa}'\left(\frac{1}{2}a_{\kappa\eta[\alpha_{\xi}]}+\frac{1}{2}B_{\zeta\xi}'\,a_{\kappa\eta[\alpha_{\zeta}]}-\right.$$

$$\left.-a_{\xi\kappa(\alpha_{\lambda})}'B_{\lambda\eta}-a_{\xi\kappa(\alpha_{\eta})}'\right)\dot{\alpha}_{\eta}+Nh_{\xi}^{2};$$

$$\Psi_{\xi[\lambda\eta]}^{1}=$$

$$=\left(d_{\eta[\alpha_{\xi}]}'+B_{\lambda\xi}'d_{\eta[\alpha_{\lambda}]}'-d_{\xi(\alpha_{\eta})}'-d_{\xi(\alpha_{\lambda})}'B_{\lambda\eta}\right)\dot{\alpha}_{\eta}+Nh_{\xi}^{1};$$

$$\Psi_{\xi[\lambda]}^{0}=$$

$$=c^{0}{}_{[\alpha_{\xi}]}+B_{\lambda\xi}'c^{0}{}_{[\alpha_{\lambda}]}-\Pi_{[\alpha_{\xi}]}-B_{\lambda\xi}'\,\Pi_{[\alpha_{\lambda}]}+Q_{\xi}+B_{\lambda\xi}Q_{\lambda},$$

причем $\Psi_{\xi[\lambda\kappa\eta]}^{n}$ означает член порядка n с номером ξ и суммированием по индексам λ,κ,η.

Стационарное движение системы

В каждом конкретном случае определение типа циклических координат может быть свое. Здесь будет использовано определение, обеспечивающее существование стационарных движений [11].

$(\alpha_{1}...\alpha_{M_p})$ — векторы, соответствующие позиционным координатам;

$(\alpha_{M_r-M_c+1}...\alpha_{M_r})$ — векторы, соответствующие циклическим координатам;

$(\alpha_{M_r+1}...\alpha_{M_r+M_{ch}})$ — координаты, соответствующие связям типа Чаплыгина;

$(\alpha_{M_r+M_{ch}+1}...\alpha_{M})$ — остальные координаты, соответствующие зависимым скоростям.

Введем соответствующие индексы:

$$i_p,j_p,k_p=1...M_p,\ i_c,j_c,k_c=M_r-M_c+1...M_r,$$

$$i_{ch},j_{ch},k_{ch}=M_r+1...M_r+M_{ch},$$

$$i_{ss},j_{ss},k_{ss}=M_r+M_{ch}+1...M,$$

$$M_p+M_c=M_r;\quad M_{ch}+M_{ss}=M_s.$$

Тогда стационарное движение системы (19) определяется из уравнений (20):

$$\alpha_p=\alpha_p^0=\text{const},\ \dot{\alpha}_c=\alpha_c^0=\text{const},\ \alpha_{ss}=\alpha_{ss}^0=\text{const};$$
$$\alpha_p=\left\| \alpha_{i_p} \right\|;\ \alpha_c=\left\| \alpha_{i_c} \right\|;\ \alpha_{ss}=\left\| \alpha_{i_{ss}} \right\|; \tag{19}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \dot{\alpha}'_{k_c}\left(\frac{1}{2}a_{k_c j_c[\alpha_{i_c}]}+\frac{1}{2}B'_{i_{ss}i_c}a_{k_c j_c[\alpha_{i_{ss}}]}-\right.\\ \left.-a'_{i_c k_c(\alpha_{i_{ss}})}B_{i_{ss}j_c}\right)\dot{\alpha}_{j_c}-\left(B'_{i_{ss}i_c}d'_{k_c[\alpha_{i_{ss}}]}-\right.\\ \left.-d'_{i_c(\alpha_{i_{ss}})}B_{i_{ss}k_c}-d'_{k_c[\alpha_{i_c}]}\right)\dot{\alpha}_{k_c}+\\ +Nh_{i_c}+c_{[\alpha_{i_c}]}+B'_{i_{ss}i_c}c_{[\alpha_{i_{ss}}]}-\Pi_{[\alpha_{i_{ss}}]}-\\ -B'_{i_{ss}i_c}\Pi_{[\alpha_{i_{ss}}]}+Q_{i_c}+B_{i_{ss}i_c}Q_{i_{ss}} \end{array}\right]_0=0;\\ B^0_{i_{ss}i_c}\dot{\alpha}_{i_c}=0. \end{array}\right\} \tag{20}$$

В общем случае проблема отыскания всех стационарных движений неголономных систем — очень сложная задача, поскольку изначально количество уравнений меньше числа параметров, которые следует определить. В конкретных задачах среди этих уравнений зачастую [11] оказываются зависимые — размерность многообразия тем самым увеличивается.

В данной работе исследуемое стационарное движение системы задается.

Уравнения возмущенного движения и нелинейные члены

Введем возмущения

$$\alpha_p=\alpha_p^0+x_p;\ \dot{\alpha}_c=\alpha_c^0+x_c;\ \alpha_{ss}=\alpha_{ss}^0+x_{ss};$$
$$x_p=\left\| x_{i_p} \right\|;\ x_c=\left\| x_{i_c} \right\|;\ x_{ss}=\left\| x_{i_{ss}} \right\| \tag{21}$$

и составим уравнения возмущенного движения, в нормальной форме, линеаризованные в окрестности стационарного движения (21):

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_p=x_p^1,\\ \dot{x}_p^1=\mathrm{A}_p^1x_p^1+\mathrm{A}_p^2x_c+\mathrm{A}_p^3x_p+\mathrm{A}_p^4x_{ss}+\Phi_p^{*2},\\ \dot{x}_c=\mathrm{A}_c^1x_p^1+\mathrm{A}_c^2x_c+\mathrm{A}_c^3x_p+\mathrm{A}_c^4x_{ss}+\Phi_c^{*2},\\ \dot{x}_{ss}=\mathrm{A}_{ss}^1x_p^1+\mathrm{A}_{ss}^2x_c+\mathrm{A}_{ss}^3x_p+\mathrm{A}_{ss}^4x_{ss}+\Phi_{ss}^{*2}, \end{array}\right\} \tag{22}$$

где $\mathrm{A}_p^\delta,\ \mathrm{A}_c^\delta,\ \mathrm{A}_{ss}^\delta,\ \delta=1...4$ — матрицы соответствующих размерностей, получающиеся при линеаризации и умножении уравнений (18) на обратную матрицу $\left(a_{ij}^{(-1)}\right)_0$ коэффициентов функции кинетической энергии; $\Phi_p^{*2},\ \Phi_c^{*2},\ \Phi_{ss}^{*2}$ — нелинейные члены (их явный вид [27, 28, 31] не приводится из-за громоздкости).

Управляемость и наблюдаемость

Систему (22) с управлением, приложенным, например, по всем циклическим координатам, можно записать в векторном виде:

$$\dot{x}=\mathrm{A}x+\mathrm{B}u, \tag{23}$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{E} & 0 & 0\\ \mathrm{A}_p^1 & \mathrm{A}_p^2 & \mathrm{A}_p^3 & \mathrm{A}_p^4\\ \mathrm{A}_c^1 & \mathrm{A}_c^2 & \mathrm{A}_c^3 & \mathrm{A}_c^4\\ \mathrm{A}_{ss}^1 & \mathrm{A}_{ss}^2 & \mathrm{A}_{ss}^3 & \mathrm{A}_{ss}^4 \end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \mathrm{E}\\ 0 \end{pmatrix}.$$

Условие управляемости для данной системы:

$$rank\left\{\mathrm{B},\ \mathrm{AB},\ldots,\mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B}\right\}=n. \tag{24}$$

Условие наблюдаемости системы по измерению

$$\sigma=Cx\quad rank\left\{C',AC',\ldots,(A')^{n-1}C'\right\}=n. \tag{25}$$

Определение коэффициентов оптимального управления

Определение коэффициентов оптимального стабилизирующего управления осуществляется методом Н.Н. Красовского [2]. При этом для заданного квадратичного критерия качества с положительно определенными матрицами

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\omega(x,u)dt=\int_{t_0}^{\infty}\left(x'\alpha x+u'\beta u\right)dt \tag{26}$$

рассматривается [2] уравнение Ляпунова—Беллмана—Риккати:

$$\min_u\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)'(\mathrm{A}x+\mathrm{B}u)+x'\alpha x+u'\beta u\right)=0,$$

где u — искомое управляющее воздействие; V — функция Ляпунова системы, квадратичная форма, которая подлежит определению.

Путем численного решения методом Рунге—Кутта соответствующей системы нелинейных неоднородных дифференциальных уравнений [2] с нулевыми начальными условиями определяются коэффициенты функции Ляпунова, а затем и искомое управление. Проинтегрировав численно систему

(23) с конкретными числовыми параметрами и найденным управлением, получаем графики переходных процессов для координат системы.

Отметим, что в настоящей работе разрабатываемый программный продукт применяется к задаче [1] с полной информацией о фазовом состоянии объекта, и поэтому не реализуется имеющаяся в [34] процедура определения коэффициентов идентификатора решением соответствующей дуальной линейно-квадратичной задачи. Отметим, что эта процедура полностью аналогична процедуре отыскания коэффициентов стабилизирующего управления.

Компьютерная реализация

Программная реализация рассматриваемого метода исследования устойчивости и стабилизации стационарных движений неголономных систем осуществляется на платформе системы аналитических вычислений Maple 9.5. Данная версия пакета включает поддержку объектно-ориентированного подхода к построению пользовательских библиотек, возможности создания пользовательского интерфейса, многочисленные встроенные библиотеки. Пакет универсален и не имеет стандартных средств для решения рассматриваемой в данной работе задачи, но использование встроенного языка программирования, библиотек символьных и матричных операций, позволяет создавать программные библиотеки и модули, позволяющие решать и данный класс задач.

Работа с модулем состоит из нескольких основных этапов:

1. Инициализация входных данных. Процедура принимает в качестве входных параметров:

· вектор обобщенных координат;

· разбиение вектора обобщенных координат — массив, элементами которого являются массивы номеров координат;

· количество разбиений;

· функция кинетической энергии без учета связей в скалярном виде;

· функция потенциальной энергии системы в скалярном виде и уравнения связей;

· номера разбиений, которым соответствуют координаты, скорости которых зависимы.

2. Формирование внутреннего представления входных данных.

3. Формирование матриц и векторов коэффициентов уравнений связей (8), функции кинетической энергии (9), (10), (11). Выделение соответствующих линейных и нелинейных частей.

4. Получение членов неголономности (14), (15), (16).

5. Составление уравнений движения (18) в символьной форме.

6. Составление уравнений возмущенного движения (22).

7. Формирование системы с числовыми параметрами при их задании.

8. Проверка условий управляемости и наблюдаемости системы.

9. Определение коэффициентов оптимального управления и идентификатора методом Н.Н.Красовского.

10. Численное интегрирование замкнутой нелинейной системы с найденным управлением.

11. Получение графиков переходных процессов системы.

В общем случае должны быть введены также, естественно при их наличии, и векторы непотенциальных обобщенных сил. Кроме того, в случае неоднородных связей изменяются и выражения для самих уравнений связей и для членов неголономности и пр. Все соответствующие процедуры в продукте содержатся.

Пример. Рассмотрим модель одноколесного велосипеда (рис. 1), предложенную в [1]. Данная система представляет собой модель одноколёсного велосипеда, состоящего из однородного диска с двойным маятником, представляющим тело и конечность велосипедиста. Верхний маятник (конечность — название достаточно условное, поскольку при выборе численных значений соответствующих параметров в [1] масса «конечности» сопоставима с массой тела «велосипедиста») свободно движется в плоскости, ортогональной к диску, в то время как нижний маятник остаётся «вертикальным» в плоскости диска. Положение системы определяется следующими обобщёнными координатами:

$$q' = (\theta, \chi, \phi, \psi, x, y).$$

Условие качения без проскальзывания приводит к уравнениям связей:

$$\dot{x} = -\dot{\phi} R\cos\psi, \;\; \dot{y} = -\dot{\phi} R\sin\psi.$$

Функция Лагранжа системы без учёта связей:

$$L = \frac{1}{2}\left[A\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\cos^2\theta\right) + B\left(\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\phi}\right)^2\right] +$$

$$+\frac{M}{2}\left[\left[R^2\dot{\theta}^2 + 2R\left(\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi\right)\dot{\theta}\cos\theta +\right.\right.$$

$$\left. +\left(\dot{x} - R\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi\right)^2 + \left(\dot{y} - R\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi\right)^2\right] +$$

$$+\frac{m}{2}\left[(R+l)^2\dot{\theta}^2+2(R+l)\left(\dot{y}\cos\psi-\dot{x}\sin\psi\right)\dot{\theta}\times\right.$$

$$\times\cos\theta(R+l)^2\dot{\theta}^2+2(R+l)\left(\dot{y}\cos\psi-\dot{x}\sin\psi\right)\dot{\theta}\cos\theta+$$

$$\left.+\left(\dot{x}-(R+l)\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi\right)^2+\left(\dot{y}-(R+l)\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\right)^2\right]+$$

$$+\frac{\mu}{2}\left[(R+r)^2\dot{\theta}^2+\rho^2\left(\dot{\chi}-\dot{\theta}\right)^2+2\rho(R+r)\left(\dot{\chi}-\dot{\theta}\right)\dot{\theta}\cos\chi+\right.$$

$$+2\left((R+r)\dot{\theta}\cos\theta+\rho\left(\dot{\chi}-\dot{\theta}\right)\cos(\chi-\theta)\right)\times$$

$$\left.\times\left(\dot{y}\cos\psi-\dot{x}\sin\psi\right)\right]+$$

$$+\frac{\mu}{2}\left[\left(\dot{x}-\dot{\psi}\cos\psi\left((R+r)\sin\theta+\rho\sin(\chi-\theta)\right)\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\dot{y}-\dot{\psi}\sin\psi\left((R+r)\sin\theta+\rho\sin(\chi-\theta)\right)\right)^2\right]-$$

$$-MgR\cos\theta-mg(R+r)\cos\theta-$$

$$-\mu g\left((R+r)\cos\theta-\rho\cos(\chi-\theta)\right).$$

Здесь θ — угол отклонения плоскости диска от вертикали; ψ — угол между линией пересечения плоскости диска и плоскости качения диска и осью Ox неподвижной системы $Oxyz$ (оси Ox и Oy расположены в плоскости качения, ось Oz направлена вертикально вверх); ϕ — угол собственного вращения диска; χ — угол отклонения конечности от плоскости диска; x, y — координаты точки касания диска и плоскости; M — масса диска; R — радиус диска; m — масса велосипедиста; μ — масса конечности; A, B — моменты инерции диска; r — расстояние от центра диска до верхнего сустава конечности (руки); l — расстояние от центра диска до массы m; g — ускорение свободного падения; ρ — длина конечности.

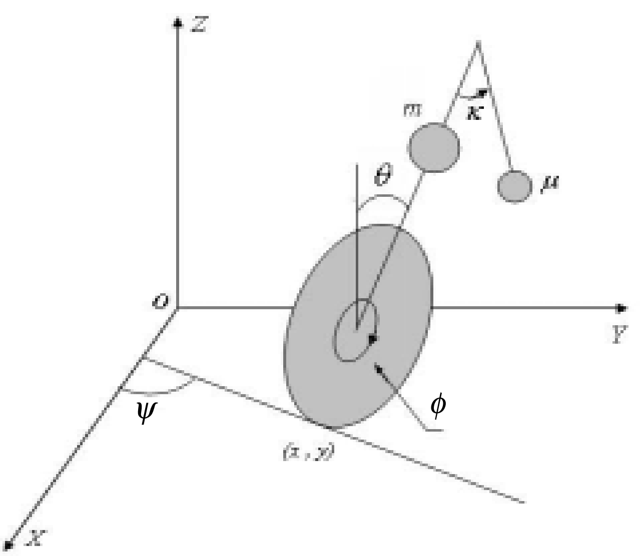

Рис. 1. Модель одноколесного велосипеда

В работе [1] для этой модели исследована задача стабилизации качения с постоянной скоростью по прямой при помощи управления, создаваемого за счёт отклонения верхнего маятника (конечности) от вертикали. При этом рассмотрение проводилось в переменных Рауса с существенным использованием групповой симметрии. Возможность стабилизации определена проверкой критерия Рауса—Гурвица для сокращённой системы четвёртого порядка и сведением получающегося критического случая к теореме Ляпунова—Малкина. Способ определения коэффициентов стабилизирующего управления для частного случая в [1] не приводится и не обсуждается. В настоящей работе с использованием [34] дано решение этой задачи с позиции общей теории управления.

При числовых значениях параметров системы из [1] после интегрирования замкнутой найденным управлением системы уравнений возмущенного движения получим график переходного процесса для отклонения рамы модели от вертикали. Наложим его для наглядности на соответствующий график из [1] (рис. 2).

Выводы

В работе проанализированы особенности задач устойчивости и стабилизации движений неголо-

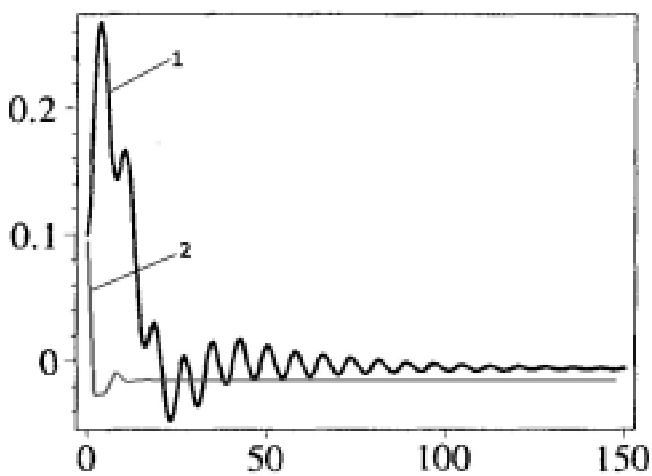

Рис. 2.
1 — график в [1]; *2* — график, полученный авторами

номных систем, приводящие к разнообразию возможных постановок таких задач. Обсуждаются необходимость составления, метод получения уравнений возмущенного движения с явным видом нелинейных членов и возможности программной реализации этого метода. Применение соответствующего оригинального программного продукта иллюстрируется решением конкретной задачи стабилизации.

Summary

Some possible statements are discussed for stability and stabilization problems related to steady motions of nonholonomic systems. A structure of nonlinear vector equations is analyzed to describe perturbed motions as well as a type of stability achievable after stabilization for various statement of the problem. A software product is described to realize in some symbolic form an algorithm to generate coefficients for stabilizing control and estimation systems. An application of the product is discussed to solve the stabilization problem for steady-state motion of unicycle model. Lagrange variables are used in the problem and stabilizing coefficients are calculated by the Krasovsky method for optimal stabilization problem associated with assigned linear controlled subsystem. As an example a transient process (unicycle tilt angle subject to time) is demonstrated for the unicycle motion under the action of the synthesized control.

Библиографический список

1. *Zenkov D.V., Bloch A.M., Marsden J.E.* The Lyapunov-Malkin Theorem and Stabilization of the Unicycle with Rider // Systems and Control Letters. 2002. Vol. 46. P. 293-300.

2. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1967. С. 475-514.

3. *Красинский А.Я.* Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем // Избранные труды VIII Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, Институт проблем управления им. В.А.Трепезникова РАН. 2-4 июня 2004 г. Электронное издание. С. 97-103. http://www.ipu.ru/semin/arhiv/stab04.

4. *Каленова В.И., Морозов В.М., Шевелёва Е.Н.* Устойчивость и стабилизация движения одноколёсного велосипеда // Изв.РАН.. МТТ. 2001. №4. С. 49—58.

5. *Мартыненко Ю.Г. , Орлов И.В.* Влияние переходных процессов в электроприводе на устойчивость движения колесного робота // Мобильные роботы и мехатронные системы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. С. 135-149.

6. *Каленова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А.* Неголономные механические системы и стабилизация движения // Фундаментальная и прикладная математика М.:Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы». 2005. Т.11. №7 С. 117-158.

7. *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. — М.: Физматлит, 2005. — 270 с.

8. *Румянцев Б.В., Карапетян А.В.* Устойчивость движения неголономных систем // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Общая механика. 1976. Т.3. С. 5-42.

9. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Устойчивость состояний равновесия неголономных систем // ПММ. 1965. Т.29. Вып. 1. С.46-53.

10. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Об устойчивости состояний равновесия неголономных систем // ДАН СССР. 1965. Т.160. №4. С.781-784.

11. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967. — 520 с.

12. *Шелементьев Г.С.* О стабилизации неголономной системы // ПММ. 1966. Т.30. Вып. 6. С. 993-999.

13. *Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С.* О влиянии неголономной связи на стабилизируемость механической системы // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 744-747.

14. *Бакша А.* О оптималноj стабилизациjи стациопарних кретанња нехолономних систем // Матем. Весник. Београд, 1973. С. 241-247.

15. *Емельянова И.С., Фуфаев Н.А.* Об устойчивости стационарных движений // Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1974. С. 3-9.

16. *Емельянова И.С.* Об устойчивости стационарных движений и состояний равновесия неголономных систем // Вопр. прикл. мат. и мех. Вып. 4. Чебоксары, 1975. С. 149-158

17. *Николенко И.В.* Динамика управляемых неголономных систем. — Киев: Выща шк., 1985.

18. *Карапетян А.В.* Об устойчивости стационарных движений систем Чаплыгина // ПММ 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 801-607.

19. *Дикарев Е.Д., Дикарева С.Б., Фуфаев Н.А.* Влияние наклона рулевой оси и выноса переднего

колеса на устойчивость движения велосипеда // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. №1. С. 69-73.

20. *Любимцев Я.К., Фуфаев Н.А.* О торможении трехколесного экипажа // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №4. С.36-40.

21. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т.6. М.: ВИНИТИ. 1983. С. 3-128.

22. *Фуфаев Н.А.* Катание тяжелого однородного шара по шероховатой сфере, вращающейся вокруг вертикальной оси // Прикл. механика. 1987. Т. 23. №17. С. 98-101.

23. *Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А.* Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1991. — 256 с.

24. *Ларин В.Б.* О стабилизации движения системы с неголономными связями // Прикл. механика. 1998. 34. №6. С. 90-97.

25. *Тертычный В.Ю.* Интегральное оценивание и адаптивная стабилизация управляемых неголономных систем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 976-984.

26. *Красинская—Тюменева Э.М., Красинский А.Я.* О влиянии структуры сил на устойчивость равновесия неголономных систем // Вопросы вычисл. и прикл. матем. Ташкент. 1977. Вып. 45. С. 172-186.

27. *Красинский А.Я.* Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем // ПММ. 1988. Т. 52. Выпуск 2. С.194-202.

28. *Красинский А.Я.* Об уравнениях движения в задаче об устойчивости состояний равновесия неголономных систем // Известия вузов Узбекистана. 2003. № 1-2. С. 9-24.

29. *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений. Т.2. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

30. *Каменков Г.В.* Избранные труды. — Т.2. — М.: Наука, 1972.

31. *Красинский А.Я., Красинская Э.М.* Анализ структуры членов неголономности в задачах устойчивости положений равновесия и стационарных движений // Известия вузов Узбекистана. 2004. № 1-2. С.31-37.

32. *Красинский А.Я., Атажанов Б.* О задаче стабилизации установившихся движений неголономных систем С.А.Чаплыгина// Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. 2007. Т.13. №2(28). С. 74-96.

33. URL: http://www.maplesoft.com/

34. *Красинский А.Я.* Модуль по автоматизации исследования устойчивости нелинейных систем. Государственное патентное ведомство Республики Узбекистан. Решение об официальной регистрации программ для ЭВМ DGU 20050097.

35. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 15.12.2007