

УДК 539.3

Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки на основе уточненной теории

Фирсанов В.В. *, Фам В.Т.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

** e-mail: k906@mai.ru*

*** e-mail: pvthien88@gmail.com*

Статья поступила 21.03.2019

Аннотация

Предлагается вариант уточненной теории расчета напряженно-деформированного состояния изотропных сферических оболочек. Математическая модель построена на основе трехмерных уравнений теории упругости. Задача сведения трехмерных уравнений к двумерным осуществляется путем представления искомых перемещений полиномами по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории. С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами. Решение указанной системы проводится методами конечных разностей и матричной прогонки. В результате получены перемещения в узлах сетки, для аппроксимации которых используются сплайны. Деформации оболочки находится с помощью геометрических соотношений, тангенциальные напряжения определяются из соотношений закона

Гука и поперечные напряжения получаются непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

В качестве примера рассматривается полусферическая оболочка жестко заземленная по нижнему контуру основания. Проведено сравнение результатов расчета, полученных в данной работе и по классической теории.

Ключевые слова: сферическая оболочка; вариант уточненной теории, вариационный принцип Лагранжа, напряженно-деформированное состояние «погранслоя», метод конечных разностей; метод матричной прогонки, поперечные нормальные напряжения.

Введение

Сферические оболочки в качестве элементов конструкций часто применяются в объектах машиностроения, в том числе, авиационной и ракетной-космической отрасли. С помощью гипотез Кирхгофа – Лява построена классическая теория сферической оболочки, результаты которой приведены в [1-7]. Однако, при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкций в зонах крепления, действия локальных и быстро изменяющихся нагрузок, а также выполненных из неоднородных материалов, классическая теория не дает удовлетворительного соответствия с практикой. Для описания объемного НДС, в настоящее время применяется ряд подходов при построении уточненных теорий пластин и оболочек.

Один из подходов построения математически обоснованной теории состоит в применении метода прямого асимптотического разложения компонентов НДС в ряды по малому параметру – относительной толщине трехмерного тела и последующем интегрировании уравнений трехмерной теории упругости [2]. С помощью вариационного метода Власова – Канторовича соответствующие результаты расчетов пластин и оболочек по уточненной теории [12,13] позволили установить, что вблизи жестко защемленного края поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, оказываются одного порядка с максимальными напряжениями основного внутреннего НДС, определяемыми по классической теории.

В работе [20] предложена теория пластин и оболочек третьего порядка Reddy J.N. при исследовании слоистых композитных пластин и оболочек. Перемещения оболочки аппроксимируются в виде

$$\begin{aligned}U_1 &= u_0 + \gamma\phi_\alpha + \gamma^2\theta_\alpha + \gamma^3\theta_\alpha, \\U_2 &= v_0 + \gamma\phi_\beta + \gamma^2\theta_\beta + \gamma^3\theta_\beta, \\U_3 &= w_0.\end{aligned}$$

где $\phi_\alpha, \theta_\alpha, \lambda_\alpha, \phi_\beta, \theta_\beta, \lambda_\beta$ представляют собой искомые функции. Следовательно, в соответствии с этой работой поперечные нормальные деформации принимаются равными нулю.

Другой подход к построению уточненной теории предлагается в [8]. При этом искомые перемещения раскладываются в полиномиальные ряды по нормальной координате и формулируются условия согласованности перемещений, которые связывают между собой количество слагаемых в этих разложениях по

тангенциальным и поперечному направлениям. На основе энергетически согласованного подхода в работах [14-17] построена уточненная теория расчета НДС на случай произвольных ортотропных оболочек, а также подкрепленных цилиндрических оболочек.

Следует отметить также работы [18,19], в которых рассматриваются другие методы уточненного расчета изотропной пластин и полосы из композиционного материала.

В данной работе в рамках подхода, представленного в [8, 14-17] исследуется НДС сферической оболочки жестко защемленной по нижнему контуру основания под действием осесимметричной нагрузки. Искомые перемещения разлагаются по нормальной к срединной плоскости пластины координате в полиномы на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява. Применение вариационного принципа Лагранжа к уточненному значению функционала полной энергии оболочки позволяет сформулировать уточненную краевую задачу.

Уравнения теории сферической оболочки

Рассматривается сферическая оболочка постоянной толщины $2h$ из изотропного материала, отнесенная к ортогональной системе координат θ, φ, ξ (рис. 1).

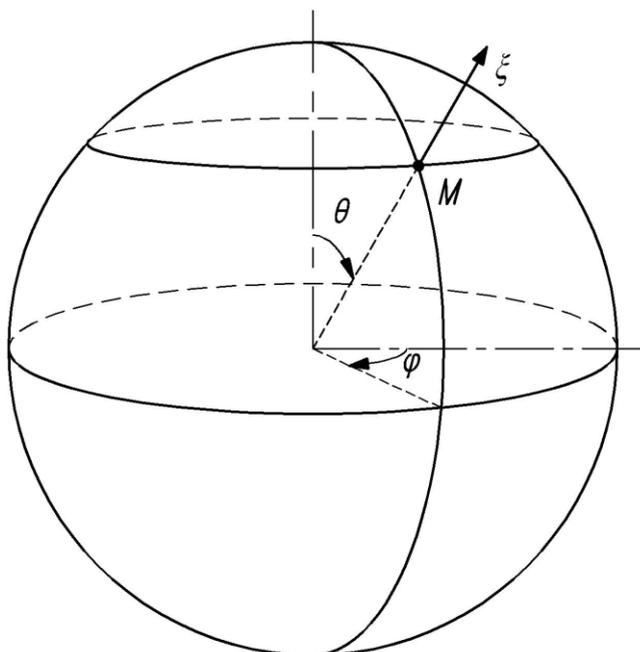


Рис.1. Сферическая оболочка.

Здесь θ представляет собой угол между осью оболочки и нормалью к поверхности оболочки, φ - угол, определяющий положение точки на соответствующем параллельном круге, а ось ξ направлена по внешней нормали к срединной поверхности радиуса R .

Принимается, что на лицевых $\xi = \pm h$ и торцевых поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{i3}(\pm h) = q_{i3}^{\pm}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где q_{i3}^{\pm} обозначают нагрузки, действующие на верхней и нижней поверхностях оболочки.

Будем предполагать в дальнейшем, что искомые упругие перемещения U_1, U_2, U_3 имеют асимптотические представления вида:

$$\begin{aligned}
U_1(\theta, \varphi, \xi) &= u_0(\theta, \varphi) + u_1(\theta, \varphi)\xi + u_2(\theta, \varphi)\frac{\xi^2}{2!} + u_3(\theta, \varphi)\frac{\xi^3}{3!}, \\
U_2(\theta, \varphi, \xi) &= v_0(\theta, \varphi) + v_1(\theta, \varphi)\xi + v_2(\theta, \varphi)\frac{\xi^2}{2!} + v_3(\theta, \varphi)\frac{\xi^3}{3!}, \\
U_3(\theta, \varphi, \xi) &= w_0(\theta, \varphi) + w_1(\theta, \varphi)\xi + w_2(\theta, \varphi)\frac{\xi^2}{2!},
\end{aligned} \tag{2}$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют осям θ , φ , и ξ . Для варианта классической теории типа Кирхгофа – Лява в формулах (2) отбрасываются по два последних слагаемых.

Подставляя разложения (2) в геометрические уравнения трехмерной теории упругости, получим выражения для компонентов деформаций оболочки:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= r \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + w_0 \right) - r \left(r \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + r w_0 - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - w_1 \right) \xi + \\
&+ r \left(2r^2 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + 2r^2 w_0 - 2r \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - 2r w_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + w_2 \right) \frac{\xi^2}{2!} - \\
&- r \left(6r^3 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + 6r^3 w_0 - 6r^2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - 6r^2 w_1 + 3r \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + 3r w_2 - \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \frac{\xi^3}{3!}, \\
e_{22} &= r \left(w_0 + u_0 \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right) - r \left(r w_0 + r u_0 \operatorname{ctg} \theta + r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \right. \\
&- w_1 - u_1 \operatorname{ctg} \theta - \left. \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \right) \xi + r \left(2r^2 w_0 + 2r^2 u_0 \operatorname{ctg} \theta + 2r^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \right. \\
&- 2r w_1 - 2r u_1 \operatorname{ctg} \theta - 2r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_2 + u_2 \operatorname{ctg} \theta + \left. \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} \right) \frac{\xi^2}{2!} + \\
&+ r \left(-6r^3 w_0 - 6r^3 u_0 \operatorname{ctg} \theta - 6r^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + 6r^2 w_1 + 6r^2 u_1 \operatorname{ctg} \theta + \right. \\
&+ 6r^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - 3r w_2 - 3r u_2 \operatorname{ctg} \theta - 3r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + u_3 \operatorname{ctg} \theta + \left. \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} \right) \frac{\xi^3}{3!}, \\
e_{33} &= w_1 + w_2 \xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{12} = & r \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} - v_0 \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) + r \left(-r \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + r v_0 \operatorname{ctg} \theta - r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - v_1 \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) \xi + r \left(2r^2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - 2r^2 v_0 \operatorname{ctg} \theta + 2r^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - \right. \\
& \left. - 2r \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 2r v_1 \operatorname{ctg} \theta - 2r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} - v_2 \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) \frac{\xi^2}{2!} + \\
& + r \left(-6r^3 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + 6r^3 v_0 \operatorname{ctg} \theta - 6r^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + 6r^2 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - 6r^2 v_1 \operatorname{ctg} \theta + \right. \\
& \left. + 6r^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - 3r \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 3r v_2 \operatorname{ctg} \theta - 3r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - v_3 \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \right) \frac{\xi^3}{3!}, \\
e_{13} = & -r u_0 + r \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + u_1 + \left(r^2 u_0 - r^2 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - r u_1 + r \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + u_2 \right) \xi + \\
& + \left(-2r^3 u_0 + 2r^3 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + 2r^2 u_1 - 2r^2 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} - r u_2 + r \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + u_3 \right) \frac{\xi^2}{2!} + \\
& + r \left(6r^3 u_0 - 6r^3 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - 6r^2 u_1 + 6r^2 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + 3r u_2 - 3r \frac{\partial w_2}{\partial \theta} - u_3 \right) \frac{\xi^3}{3!}, \\
e_{23} = & -r v_0 + r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} + v_1 + \left(r^2 v_0 - r^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} - r v_1 + r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + v_2 \right) \xi + \\
& + \left(-2r^3 v_0 + 2r^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} + 2r^2 v_1 - 2r^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} - r v_2 + r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} + v_3 \right) \frac{\xi^2}{2!} + \\
& + r \left(6r^3 v_0 - 6r^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} - 6r^2 v_1 + 6r^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + 3r v_2 - 3r \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} - v_3 \right) \frac{\xi^3}{3!},
\end{aligned}$$

где $r = \frac{1}{R}$ - главная кривизна срединной поверхности оболочки.

Выражения для напряжений определяются из физических уравнений.

Подставляя эти выражения в уравнения теории произвольных оболочек [14] и используя вариационный принцип Лагранжа, после преобразований получим следующую систему дифференциальных уравнений теории сферических оболочек в перемещениях:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{22}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(Ki_2^{v_k} \frac{\partial}{\partial \varphi} + Ki_{12}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) v_k + \\
& + \sum_{n=0}^2 Ki_1^{w_n} \frac{\partial w_n}{\partial \theta} = Ki^{q_{13}^+} q_{13}^+ - Ki^{q_{13}^-} q_{13}^-, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\
& \sum_{m=0}^3 \left(Ki_2^{u_m} \frac{\partial}{\partial \varphi} + Ki_{12}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(Ki_0^{v_k} + Ki_1^{v_k} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{22}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) v_k + \\
& + \sum_{n=0}^2 Ki_2^{w_n} \frac{\partial w_n}{\partial \varphi} = Ki^{q_{23}^+} q_{23}^+ - Ki^{q_{23}^-} q_{23}^-, \quad i = 5, 6, 7, 8 \\
& \sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 Ki_2^{v_k} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + \sum_{n=0}^2 \left(Ki_0^{w_n} + Ki_1^{w_n} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{22}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w_n \\
& = Ki^{q_{33}^+} q_{33}^+ - Ki^{q_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = 9, 10, 11
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь Ki представляют собой переменные коэффициенты, зависящие от геометрических параметров, упругих постоянных материала оболочки и угла θ ; а u_m , v_k , w_n - коэффициенты разложений искомых перемещений в выражениях (2).

Расчет сферической оболочки под действием осесимметричной радиальной нагрузки

Одним из наиболее распространенных случаев в расчетной практике сферических оболочек является осесимметричное радиальное нагружение. В этом случае все компоненты НДС оболочки не зависят от угла φ и перемещения в окружном направлении v_j , $j = \overline{0, 3}$ обращаются в нуль. Тогда система дифференциальных уравнений в перемещениях (3) принимает вид:

$$\sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_m + \sum_{n=0}^2 Ki_1^{w_n} \frac{\partial w_n}{\partial \theta} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_m + \sum_{n=0}^2 \left(Ki_0^{w_n} + Ki_1^{w_n} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_n =$$

$$= Ki^{q_{33}^+} q_{33}^+ - Ki^{q_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = 9, 10, 11$$
(4)

Граничные условия на жестко защемленном краю оболочки представляются в форме

$$u_m = 0, (m = \overline{0, 3}); \quad w_n = 0, (n = \overline{0, 2}) \quad \text{при } \theta = \pm \theta_0$$
(5)

Система уравнений (4) решается конечно-разностным методом [9]. Производные 1-ого и 2-ого порядков аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности:

$$\frac{dy_j}{d\theta} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2s}; \quad \frac{d^2 y_j}{d\theta^2} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{s^2}.$$

Из системы (4) с учетом граничных условий (5) получим следующую конечно-разностную систему:

$$\sum_{m=0}^3 \left(\left(\frac{Ki_{11}^{u_m}}{s^2} - \frac{Ki_1^{u_m}}{2s} \right) u_m^{j-1} + \left(\frac{-2Ki_{11}^{u_m}}{s^2} + Ki_0^{u_m} \right) u_m^j + \left(\frac{Ki_{11}^{u_m}}{s^2} + \frac{Ki_1^{u_m}}{2s} \right) u_m^{j+1} \right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^2 \left(\frac{-Ki_1^{w_n}}{2s} w_n^{j-1} + \frac{Ki_1^{w_n}}{2s} w_n^{j+1} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\sum_{m=0}^3 \left(\frac{-Ki_1^{u_m}}{2s} u_m^{j-1} + Ki_0^{u_m} u_m^j + \frac{Ki_1^{u_m}}{2s} u_m^{j+1} \right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^2 \left(\left(\frac{Ki_{11}^{w_n}}{s^2} - \frac{Ki_1^{w_n}}{2s} \right) w_n^{j-1} + \left(\frac{-2Ki_{11}^{w_n}}{s^2} + Ki_0^{w_n} \right) w_n^j + \left(\frac{Ki_{11}^{w_n}}{s^2} + \frac{Ki_1^{w_n}}{2s} \right) w_n^{j+1} \right) =$$

$$= Ki^{q_{33}^+} q_{33}^+ - Ki^{q_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = 9, 10, 11, \quad j = \overline{1, N-1}$$

$$u_m^0 = u_m^N = w_n^0 = w_n^N = 0, \quad m = \overline{0, 3}, \quad n = \overline{0, 2},$$
(6)

где $s, (N+1)$ – соответственно шаг конечно-разностной схемы и число узлов.

Система (6) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Она имеет семидиагональную матрицу и решается методом матричной прогонки [10,11]. Представим систему (6) следующей системой векторно-матричных уравнений:

$$A_j X_{j-1} + B_j X_j + C_j X_{j+1} = F_j, \quad j = \overline{1, N-1}$$

$$X_0 = X_N = \Theta$$

Здесь Θ - нулевая матрица;

$X_j, F_j, j = \overline{1, N-1}$ - векторы искомых перемещений и векторы правых частей

соответственно

$$X_j = [u_0^j, w_0^j, u_1^j, w_1^j, u_2^j, w_2^j, u_3^j]^T,$$

$$F_j = [0, 0, 0, 0, K9^{q_{33}^+} q_{33}^+ - K9^{q_{33}^-} q_{33}^-, K10^{q_{33}^+} q_{33}^+ - K10^{q_{33}^-} q_{33}^-, K11^{q_{33}^+} q_{33}^+ - K11^{q_{33}^-} q_{33}^-]^T;$$

$A_j, B_j, C_j, j = \overline{1, N-1}$ - матрицы коэффициентов размером 7x7, для которых

справедливы представления

$$A_j := \begin{bmatrix} \frac{K1_{11}^{u_0}}{s^2} - \frac{K1_1^{u_0}}{2s}, & \frac{-K1_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K1_{11}^{u_1}}{s^2} - \frac{K1_1^{u_1}}{2s}, & \frac{-K1_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K1_{11}^{u_2}}{s^2} - \frac{K1_1^{u_2}}{2s}, & \frac{-K1_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K1_{11}^{u_3}}{s^2} - \frac{K1_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{K2_{11}^{u_0}}{s^2} - \frac{K2_1^{u_0}}{2s}, & \frac{-K2_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K2_{11}^{u_1}}{s^2} - \frac{K2_1^{u_1}}{2s}, & \frac{-K2_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K2_{11}^{u_2}}{s^2} - \frac{K2_1^{u_2}}{2s}, & \frac{-K2_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K2_{11}^{u_3}}{s^2} - \frac{K2_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{K3_{11}^{u_0}}{s^2} - \frac{K3_1^{u_0}}{2s}, & \frac{-K3_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K3_{11}^{u_1}}{s^2} - \frac{K3_1^{u_1}}{2s}, & \frac{-K3_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K3_{11}^{u_2}}{s^2} - \frac{K3_1^{u_2}}{2s}, & \frac{-K3_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K3_{11}^{u_3}}{s^2} - \frac{K3_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{K4_{11}^{u_0}}{s^2} - \frac{K4_1^{u_0}}{2s}, & \frac{-K4_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K4_{11}^{u_1}}{s^2} - \frac{K4_1^{u_1}}{2s}, & \frac{-K4_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K4_{11}^{u_2}}{s^2} - \frac{K4_1^{u_2}}{2s}, & \frac{-K4_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K4_{11}^{u_3}}{s^2} - \frac{K4_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{-K9_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K9_{11}^{w_0}}{s^2} - \frac{K9_1^{w_0}}{2s}, & \frac{-K9_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K9_{11}^{w_1}}{s^2} - \frac{K9_1^{w_1}}{2s}, & \frac{-K9_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K9_{11}^{w_2}}{s^2} - \frac{K9_1^{w_2}}{2s}, & \frac{-K9_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{-K10_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K10_{11}^{w_0}}{s^2} - \frac{K10_1^{w_0}}{2s}, & \frac{-K10_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K10_{11}^{w_1}}{s^2} - \frac{K10_1^{w_1}}{2s}, & \frac{-K10_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K10_{11}^{w_2}}{s^2} - \frac{K10_1^{w_2}}{2s}, & \frac{-K10_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{-K11_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K11_{11}^{w_0}}{s^2} - \frac{K11_1^{w_0}}{2s}, & \frac{-K11_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K11_{11}^{w_1}}{s^2} - \frac{K11_1^{w_1}}{2s}, & \frac{-K11_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K11_{11}^{w_2}}{s^2} - \frac{K11_1^{w_2}}{2s}, & \frac{-K11_1^{u_3}}{2s} \end{bmatrix}$$

$$B_j := \begin{bmatrix} \frac{-2K1_{11}^{u_0}}{s^2} + K1_0^{u_0}, & 0, & \frac{-2K1_{11}^{u_1}}{s^2} + K1_0^{u_1}, & 0, & \frac{-2K1_{11}^{u_2}}{s^2} + K1_0^{u_2}, & 0, & \frac{-2K1_{11}^{u_3}}{s^2} + K1_0^{u_3} \\ \frac{-2K2_{11}^{u_0}}{s^2} + K2_0^{u_0}, & 0, & \frac{-2K2_{11}^{u_1}}{s^2} + K2_0^{u_1}, & 0, & \frac{-2K2_{11}^{u_2}}{s^2} + K2_0^{u_2}, & 0, & \frac{-2K2_{11}^{u_3}}{s^2} + K2_0^{u_3} \\ \frac{-2K3_{11}^{u_0}}{s^2} + K3_0^{u_0}, & 0, & \frac{-2K3_{11}^{u_1}}{s^2} + K3_0^{u_1}, & 0, & \frac{-2K3_{11}^{u_2}}{s^2} + K3_0^{u_2}, & 0, & \frac{-2K3_{11}^{u_3}}{s^2} + K3_0^{u_3} \\ \frac{-2K4_{11}^{u_0}}{s^2} + K4_0^{u_0}, & 0, & \frac{-2K4_{11}^{u_1}}{s^2} + K4_0^{u_1}, & 0, & \frac{-2K4_{11}^{u_2}}{s^2} + K4_0^{u_2}, & 0, & \frac{-2K4_{11}^{u_3}}{s^2} + K4_0^{u_3} \\ K9_0^{u_0}, & \frac{-2K9_{11}^{w_0}}{s^2} + K9_0^{w_0}, & K9_0^{u_1}, & \frac{-2K9_{11}^{w_1}}{s^2} + K9_0^{w_1}, & K9_0^{u_2}, & \frac{-2K9_{11}^{w_2}}{s^2} + K9_0^{w_2}, & K9_0^{u_3} \\ K10_0^{u_0}, & \frac{-2K10_{11}^{w_0}}{s^2} + K10_0^{w_0}, & K10_0^{u_1}, & \frac{-2K10_{11}^{w_1}}{s^2} + K10_0^{w_1}, & K10_0^{u_2}, & \frac{-2K10_{11}^{w_2}}{s^2} + K10_0^{w_2}, & K10_0^{u_3} \\ K11_0^{u_0}, & \frac{-2K11_{11}^{w_0}}{s^2} + K11_0^{w_0}, & K11_0^{u_1}, & \frac{-2K11_{11}^{w_1}}{s^2} + K11_0^{w_1}, & K11_0^{u_2}, & \frac{-2K11_{11}^{w_2}}{s^2} + K11_0^{w_2}, & K11_0^{u_3} \end{bmatrix}$$

$$C_j := \begin{bmatrix} \frac{K1^{u_0}}{s^2} + \frac{K1^{u_1}}{2s}, \frac{K1^{w_0}}{2s}, \frac{K1^{u_1}}{s^2} + \frac{K1^{u_1}}{2s}, \frac{K1^{w_1}}{2s}, \frac{K1^{u_2}}{s^2} + \frac{K1^{u_2}}{2s}, \frac{K1^{w_2}}{2s}, \frac{K1^{u_3}}{s^2} + \frac{K1^{u_3}}{2s} \\ \frac{K2^{u_0}}{s^2} + \frac{K2^{u_1}}{2s}, \frac{K2^{w_0}}{2s}, \frac{K2^{u_1}}{s^2} + \frac{K2^{u_1}}{2s}, \frac{K2^{w_1}}{2s}, \frac{K2^{u_2}}{s^2} + \frac{K2^{u_2}}{2s}, \frac{K2^{w_2}}{2s}, \frac{K2^{u_3}}{s^2} + \frac{K2^{u_3}}{2s} \\ \frac{K3^{u_0}}{s^2} + \frac{K3^{u_1}}{2s}, \frac{K3^{w_0}}{2s}, \frac{K3^{u_1}}{s^2} + \frac{K3^{u_1}}{2s}, \frac{K3^{w_1}}{2s}, \frac{K3^{u_2}}{s^2} + \frac{K3^{u_2}}{2s}, \frac{K3^{w_2}}{2s}, \frac{K3^{u_3}}{s^2} + \frac{K3^{u_3}}{2s} \\ \frac{K4^{u_0}}{s^2} + \frac{K4^{u_1}}{2s}, \frac{K4^{w_0}}{2s}, \frac{K4^{u_1}}{s^2} + \frac{K4^{u_1}}{2s}, \frac{K4^{w_1}}{2s}, \frac{K4^{u_2}}{s^2} + \frac{K4^{u_2}}{2s}, \frac{K4^{w_2}}{2s}, \frac{K4^{u_3}}{s^2} + \frac{K4^{u_3}}{2s} \\ \frac{K9^{u_0}}{2s}, \frac{K9^{w_0}}{s^2} + \frac{K9^{w_0}}{2s}, \frac{K9^{u_1}}{2s}, \frac{K9^{w_1}}{s^2} + \frac{K9^{w_1}}{2s}, \frac{K9^{u_2}}{2s}, \frac{K9^{w_2}}{s^2} + \frac{K9^{w_2}}{2s}, \frac{K9^{u_3}}{2s} \\ \frac{K10^{u_0}}{2s}, \frac{K10^{w_0}}{s^2} + \frac{K10^{w_0}}{2s}, \frac{K10^{u_1}}{2s}, \frac{K10^{w_1}}{s^2} + \frac{K10^{w_1}}{2s}, \frac{K10^{u_2}}{2s}, \frac{K10^{w_2}}{s^2} + \frac{K10^{w_2}}{2s}, \frac{K10^{u_3}}{2s} \\ \frac{K11^{u_0}}{2s}, \frac{K11^{w_0}}{s^2} + \frac{K11^{w_0}}{2s}, \frac{K11^{u_1}}{2s}, \frac{K11^{w_1}}{s^2} + \frac{K11^{w_1}}{2s}, \frac{K11^{u_2}}{2s}, \frac{K11^{w_2}}{s^2} + \frac{K11^{w_2}}{2s}, \frac{K11^{u_3}}{2s} \end{bmatrix}$$

Векторы искоемых перемещений X_j находятся в виде

$$X_j = P_j X_{j+1} + Q_j, j = \overline{1, N-1}.$$

Здесь

$$X_0 = X_N = \Theta,$$

$$P_1 = -(B_1)^{-1} C_1, P_j = -(B_j + A_j P_{j-1})^{-1} C_j,$$

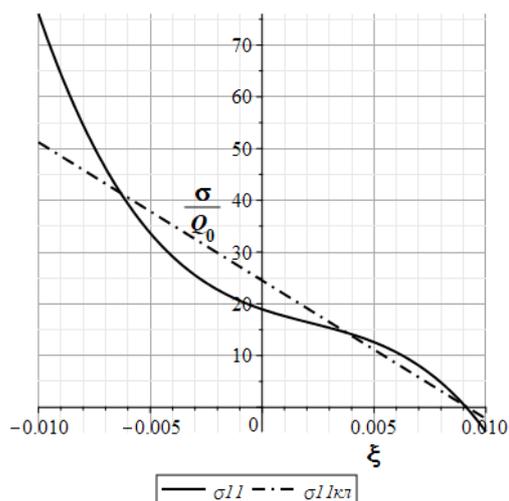
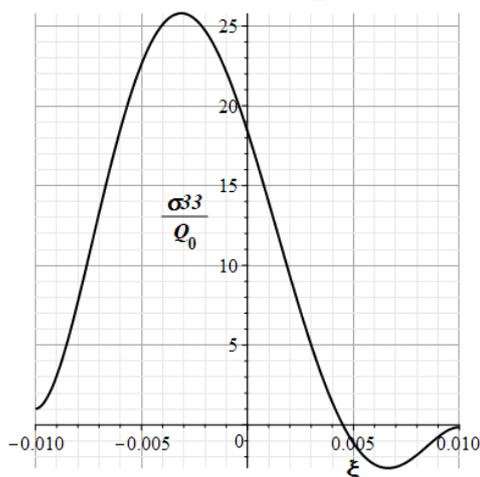
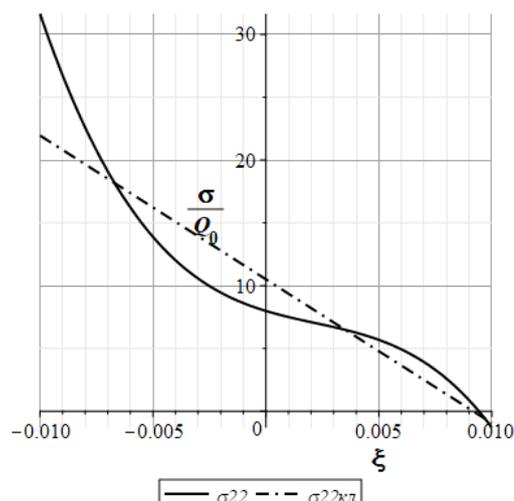
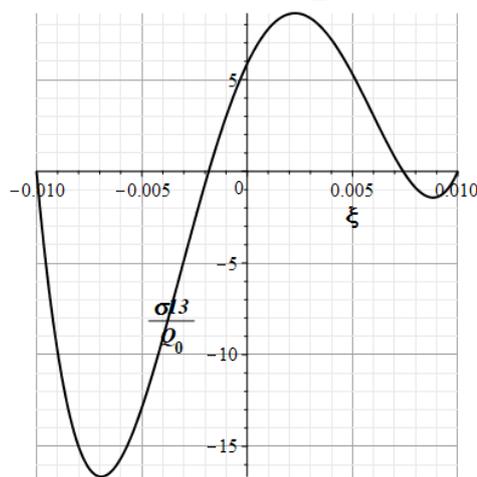
$$Q_1 = (B_1)^{-1} F_1, Q_j = (B_j + A_j P_{j-1})^{-1} (F_j - A_j Q_{j-1}), j = \overline{2, N-1}.$$

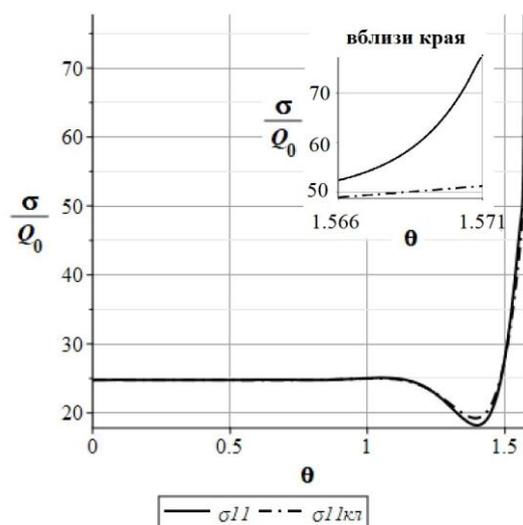
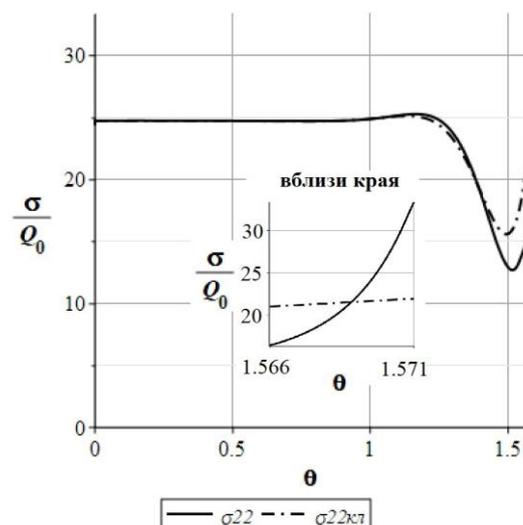
Расчеты проведены с помощью программы “Maple 2018”. В результате получены перемещения в узлах сетки, для аппроксимации которых используются сплайны. С помощью ранее приведенной схемы из уравнений теории упругости определяются деформации и напряжения оболочки.

Результаты расчетов и их сравнение с классической теорией

На рис. 2 – 7 показаны результаты расчета НДС полусферической оболочки, жестко закрепленной по нижнему контуру основания и имеющей следующие

параметры: радиус $R=1\text{ м}$, относительная полутолщина $h/R=1/100$, коэффициент Пуассона $\mu=0.3$. Оболочка находится под действием нагрузки, равномернораспределенной на внутренней поверхности. Графики рис. 2 – 7 иллюстрируют изменения нормальных и касательных напряжений в краевой зоне оболочки.

Рис. 2. Изменение σ_{11} по толщине накраю $\theta = \frac{\pi}{2}$ Рис. 4. Изменение σ_{33} по толщине накраю $\theta = \frac{\pi}{2}$ Рис. 3. Изменение σ_{22} по толщине накраю $\theta = \frac{\pi}{2}$ Рис. 5. Изменение σ_{13} по толщине накраю $\theta = \frac{\pi}{2}$

Рис. 6. Изменение σ_{11} по углу θ Рис. 7. Изменение σ_{22} по углу θ

Отметим, что аббревиатура «кл» соответствует результатам расчета по классической теории.

Анализируя графики на рис. 2 – 5 можно установить следующие:

1. Максимальное нормальное напряжение σ_{11} , определяемое по уточненной теории, превышает значение этого же напряжения, соответствующего классической теории, на 50%.

2. Максимальное нормальное напряжение σ_{22} , соответствующее уточненной теории, превышает напряжение, определяемое по классической теории, на 45 %.

3. Максимальное поперечное нормальное напряжение σ_{33} составляет 35% и максимальное касательное напряжение σ_{13} - 22 % от основного изгибного напряжения σ_{11} .

Из рис 6, 7. следует, что при удалении от края напряжения, полученные по уточненной и классической теориям, практически совпадают, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Выводы

На основании полученных результатов, можно сделать вывод, что, при исследовании НДС сферической оболочки вблизи зон искажения напряженного состояния, например, вблизи жестко заземленного края, действия локальных и быстро изменяющихся нагрузок, следует использовать уточненную теорию, так как максимальные напряжения в этой зоне существенно уточняются.

Поперечные нормальные и касательные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, в краевой зоне оказываются одного порядка с максимальными значениями напряжений, соответствующих классической теории. Такие высокие уровни дополнительных напряжений необходимо учитывать при оценке прочности и долговечности оболочечных конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-00849)

Библиографический список

1. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. - 512 с.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.

4. Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. и др. Строительная механика летательных аппаратов: учебник для авиационных специальностей вузов; Под ред. И. Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
5. Авдонин А.С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1969. – 402 с.
6. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. Учебное пособие для студентов. – М.: Машиностроение, 1973. – 456 с.
7. Горшков А.А., Астахова А.Я., Цыбин Н.Ю. Основы теории упругих тонких оболочек. Учебное пособие. – М.: НИУ МГСУ, 2016. – 231 с.
8. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 6. С. 139 - 146.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М: Наука, 1983. - 616 с.
10. Самарский А.А, Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 532 с.
11. Формалев В.Ф, Ревещников Д.Л. Численные методы. - М.: Физматлит, 2004. - 400 с.
12. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. Т. 8. № 1. С. 28 - 64.
13. Фирсанов В.В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 35 - 43. (V.V. Firsanov. Study of

stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory // Journal of machinery, manufacture and reliability, 2016, vol. 5, no. 6, pp. 515 - 522)

14. Фирсанов Вал.В., Доан Ч.Н. Энергетически согласованный подход к исследованию упругих оболочек произвольной геометрии // Вестник Московского авиационного института. 2011. Т. 18. № 1. С. 194 - 207.

15. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Энергетически согласованная теория цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 6. С. 49 - 54.
(V.V. Firsanov and Ch.N.Doan. Energy-cousistent theory of cylindrical shells // Journal of machinery, manufacture and reliability, 2011, vol. 40, no. 6, pp. 543 - 548.

16. Фирсанов В.В. Напряженное состояние пограничный слой в цилиндрических оболочках на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин // 2018. № 3. С. 44 - 51. (V.V. Firsanov. The stressed state of the “boundary layer” type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory // Journal of machinery, manufacture and reliability, 2018, vol. 47, no. 3, pp. 241 - 248)

17. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98866>

18. Зверяев Е.М. Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53459>

19. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=55762>

20. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis (2nd ed.). New York: CRC Press, 2004, 831 p.