

## **Собственные значения уравнения Сквайра для ламинарных и развитых турбулентных пограничных слоев**

**Селим Р.С.**

*Московский физико-технический институт*

*(национальный исследовательский университет),*

*ул. Институтский пер., 9, Московская обл., Долгопрудный, 141701, Россия*

*e-mail: [selim.rs@phystech.edu](mailto:selim.rs@phystech.edu)*

**Статья поступила 30 03.2020**

### **Аннотация**

Численно исследована устойчивость задачи на собственные значения для двумерного ламинарного и турбулентного внешнего течения над плоской пластиной с использованием теории во временной постановке. Этот классический, а также эффективный подход подробно рассматриваются для задач о собственных значениях: для вывода спектра собственных значений исследуются два различных метода, а именно метод конечных разностей и метод коллокации, основанный на базовых функциях. Первый подход дискретизации физической модели приводит к алгебраическим уравнениям с большими матрицами, которые трудно эффективно решить, в то время как второй создает матрицы, которые обычно полны и хорошо обусловлены. Эта проблема рассматривается здесь в приложении к уравнению сквайра, которое описывает динамику возмущений в ламинарных и турбулентных пограничных слоях. Численно изучены получены профили средней скорости ламинарных пограничных слоев. Дисперсионное соотношение не скольких мод как функция волнового числа  $\alpha$  и других параметров потока для задачи (например,

числа Рейнольдса) определяется для двух различных профилей скорости. Алгоритм реализован в пакете прикладных программ Mathematica, и вычисленные собственные значения сравниваются между двумя различными методами.

**Ключевые слова:** несжимаемая вязкая жидкость, турбулентный пограничный слой, уравнение Сквайра, метод коллокации, полиномы Чебышева.

## 1. Введение

Линейная устойчивость малого класса задач инженерного значения может быть изучена решением уравнения Орра-Зоммерфельда. Наиболее известные примеры этого-Блазиус-Пограничный слой и течение Пуазейля. Численный метод решения спектрального уравнения Орра-Зоммерфельда в двумерном пограничном слое ( $\beta = 0$ ) исследован методом чебышевской коллокации для ламинарного и пограничного слоев [1]. В работе [2,3], посвященной проблеме перехода от ламинарного к турбулентному течению, рассматриваются физические механизмы, используемые методы и полученные результаты, а также, по возможности, соотношение теории с экспериментальными и численными результатами.

Спектральные методы решения задач математической физики интенсивно изучались в последние два десятилетия из-за их хороших аппроксимационных свойств [4]. Спектральный метод является одной из трех технологий численного решения уравнений в частных производных. Другие три – это методы конечных разностей, методы конечных элементов и метод пристрелки. В работах [5], [6],

предложены методы, суть которых заключается в том, что решение представляется конечным рядом полиномов Чебышева с неизвестными коэффициентами. При этом дифференциальное уравнение выполняется в определенных точках (точках коллокации) рассматриваемого диапазона. Положения точек в диапазоне выбираются для уменьшения невязки, (метод Гаусса-Лоббато) которая получается при подстановке приближенного решения в дифференциальное уравнение.

В работе [7], на неравномерной сетке решена спектральная задача для уравнения Орра-Зоммерфельда на турбулентном профиле продольной скорости для определения связи между толщиной потери импульса мнимой частью собственной частоты наименее затухающей моды волн Толлмина-Шлихтинга как функции от числа Рейнольдса. В работе [8, 9], исследовано образование энтропии в уравнениях Навье-Стокса за счет возбуждения стохастических пульсаций в потоке жидкости, теоретически найдены два решения задачи течения жидкости в плоскости Куэтта и Пуазейля. В работе [10], рассматривается возможность описания процессов теплопередачи в развитом турбулентном пограничном слое на пластине под нулевым углом атаки с нулевым продольным градиентом давления с точки зрения волноводной модели турбулентного пограничного слоя. В настоящей работе рассматривается численная оценка комплексных собственных значений уравнения Сквайра более подробно с использованием метода коллокации с полиномами Чебышева.

## 2. Постановка задачи

Уравнение Навье – Стокса относительно поля  $(u, v, w)$  скорости и давления  $p$  можно представить (Benney, Gustavsson, 1981 [11]; Jang, Benney, Gran, 1986 [12]) в виде совокупности уравнений Сквайра и Орра-Зоммерфельда относительно вертикальных компонентов скорости и завихренности с нелинейными правыми частями. Здесь нас интересует только изучение мод уравнения Сквайра, удовлетворяющих следующим граничным условиям:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 - i\alpha \operatorname{Re}(U(y) - c) \right) \hat{\eta} = 0, \quad (1)$$

$$\hat{\eta}(y=0) = 0, \hat{\eta}(y=\infty) = 0, \quad (2)$$

Здесь величины, помеченные сверху знаком  $\wedge$ , являются преобразованиями Фурье от исходных величин:

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad (3)$$

При рассмотрении двумерного возмущения  $(\alpha, \beta = 0)$ , правая часть приведенного выше уравнения равна нулю.

$U(y)$  – средняя скорость, рассмотренная для ламинарных и развитых турбулентных пограничных слоев. Во-первых, профиль скорости, выведенный из решения дифференциального уравнения Блазиуса численно. Она решается на полуконечном интервале  $[0,10]$  с помощью пакета Mathematica [13].

Дифференциальное уравнение Блазиуса имеет вид

$$f'''(x) + \frac{1}{2} f(x) f''(x) = 0, \quad (4)$$

со следующими граничными условиями  $f(0) = f'(0) = 0, f'(10) = 1$ .

Во-вторых, профиль скорости для турбулентного потока жидкости мимо плоской пластины, разработанный Маскером [14], сформулирован здесь аналитически, как показано ниже:

$$U(y, Re_\delta) = 0.99 \sqrt{C_f(Re_\delta)} / 2 \left( 5.424 \operatorname{arctg} \left( \frac{2y(\delta/\delta_v) - 8.15}{16.7} \right) + \right. \\ \left. + \log \left( \frac{(y(\delta/\delta_v) + 10.6)^{9.6}}{\left( (y(\delta/\delta_v))^2 - 8.15y(\delta/\delta_v) + 86 \right)^2} \right) - 3.511 + 2.44y^2(0.14(6-4y) + (1-y)) \right), \quad (5)$$

$$C_f(Re_\delta) = \frac{2\kappa^2}{\operatorname{ProductLog}(e^{\sigma\kappa + 2\sigma_1\kappa} Re_\delta)}, \quad \sigma = 5., \sigma_1 = 0.14, \kappa = 0.41,$$

$$\frac{\delta}{\delta_v} = Re_\delta \sqrt{C_f \frac{(Re_\delta)}{2}}, \quad U(\delta, Re_\delta) = 0.99U_\infty.$$

Функция  $w = \operatorname{ProductLog}(z)$  есть решение уравнения  $z = we^w$  [13]. Отметим, что этот профиль является двухмасштабным: масштабы по  $y$  равны  $\delta$  и  $\delta_v$ , где  $\delta$  – толщина пограничного слоя, связь между  $\delta$  и  $\delta_v$  сформулировано выше.

### 3. Численный подход

В данном разделе для исследования устойчивости уравнения температурной пульсации используются методы конечных разностей и метод коллокации с полиномами Чебышева [15, 16], который будет использоваться. Средний профиль

скорости для аналогичного ламинарного пограничного слоя над плоской пластиной характеризуется постоянством функция потока стенки получен численно путем решения уравнения (4) используя метод Рунге-Кутты, и обобщенная скорость турбулентного пограничного слоя задается уравнением уравнение (5).

Во-первых, конечно-разностные методы аппроксимируют производные функции локальными аргументами. Эти методы обычно разработаны так, чтобы быть точными для полиномов низких порядков. Такой подход весьма обоснован, так как производная является локальным свойством функции, поэтому нет особого смысла ссылаться на многие значения функций, далекие от интересующей нас точки.

Обозначим  $x_i = x_0 + ih, 0 \leq i \leq n, h = \frac{x_n - x_0}{n}$ , Метод конечных разностей для уравнения сквайра заключается в аппроксимации второй производной центральной разностью по формуле

$$\frac{\eta(k+1) - 2\eta(k) + \eta(k-1)}{h^2} - \alpha^2 \eta(k) - i\alpha \operatorname{Re}(U(y_k) - c) \eta(k) = 0,$$

Кроме того, в спектральных методах аппроксимация производных а функции по среднему значению. Традиционный способ их представления начинается с аппроксимации функции как суммы очень гладких базисных функций:

$$\hat{\eta}(y) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(y), \text{ где } T_k(y) \text{ — ортогональные многочлены Чебышева, и } a_1, a_2, \dots, a_N$$

неизвестны коэффициенты.

В отличие от конечных разностей, которые заменяют все производные в задаче исследования разностями в узлах, спектральный метод использует именно эти производные. Теперь метод спектральной коллокации основан на многочленах Чебышева, определенных на интервале  $[-1,1]$  по формуле  $T_k(y) = \cos(k \cos^{-1}(y))$ . Точки коллокации Гаусса-Лобатто [17, 18] используются для определения узлов Чебышева в области  $[-1,1]$ , а именно:

$y_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right), k = 1, 2, \dots, N$ . Спектральный метод является одной из трех технологий

численного моделирования решения уравнений в частных производных. А вот других два: конечно-разностные методы и методы конечных элементов. Спектральный методы, [16,18] основанные на полиномах Чебышева как базисных функциях для решение численных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами и простой областью и дают хорошую точность. Кроме того, они часто могут достигать десяти цифр точности, в то время как методы конечных разностей и конечных элементов дают точность существенно меньше.

В этом случае полученная матрица  $m$  имеет вид:  $m = m_1 + c m_2$ , спектральная задача для которой определяется соотношением:  $m \cdot x = 0$ ,  $x$  – собственный вектор задачи, который далее определяется для каждой моды, согласно к различным значениям его собственного значения. Метод спектральной коллокации осуществляется путем, начиная с приближения Чебышева для приближенного решения и производя аппроксимации для производных более высокого порядка путем последовательного дифференцирования приближенного решения.

Многочлены Чебышева – это хорошо известное семейство ортогональных многочленов на интервал  $[-1,1]$  вещественной прямой. Эти полиномы представляют, среди прочего, очень хорошие свойства в аппроксимации функций. Поэтому полиномы Чебышева часто появляются в нескольких областях математики, физики и техники. В настоящем исследовании, связанном с проблемой течения пограничного слоя, расчеты требуют отображения физической области на область Чебышева [19-21]. Область нормали к стенке изменяется в диапазоне  $[0, x_\infty)$ , где  $x_\infty$  - внешняя граница пограничного слоя. Это же понятно что, должен использовать линейное преобразование, чтобы превратить вычислительную домен  $0 \leq x \leq \infty$  в интервале Чебышева  $-1 \leq y \leq 1$ . Для использования метода коллокаций с полиномами Чебышева удобно перейти от интервала  $[0,10]$  к интервалу  $[-1,1]$  с помощью линейного преобразования  $y = \frac{x}{5} - 1$  для профиля Блазиуса и от  $[0,1]$  до  $[-1,1]$ , для профиля Маскера по  $y = 2x - 1$ .

#### 4. Спектр собственных значений модели Сквайра

В этом разделе мы сообщаем о численных результатах уравнения Сквайра, о которых упоминалось ранее. Анализ устойчивости течения в настоящее время является задачей на собственные значения дифференциального уравнения возмущения (1) с границей условия (2). Для заданного основного ламинарно-турбулентного потока  $U(y)$ , уравнение (1) содержит четыре параметра, а именно  $(\alpha, Re, c_r, c_i)$ . Из них также задается число Рейнольдса основного потока и, кроме



того, длина волны  $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$  возмущения может быть принята как заданная. Поэтому

для каждой пары  $(\alpha, Re)$ , дифференциальное уравнение (1) с граничными условиями дает собственную функцию и комплексное собственное значение

$c = c_r + i c_i$ . Здесь  $c_r$  - фазовая скорость заданного возмущения, а знак  $c_i$

определяет устойчивость  $c_i < 0$  или неустойчивость  $c_i > 0$  основного течения.

Предельный случай  $c_i = 0$  дает нейтральные возмущения. Эти обстоятельства

описывают временное усиление или затухание возмущения. Результаты расчета

устойчивости формулируются для заданного потока  $U(y)$  путем присвоения каждой

точке плоскости  $(\alpha, Re)$  пары значений  $(c_r, c_i)$ .

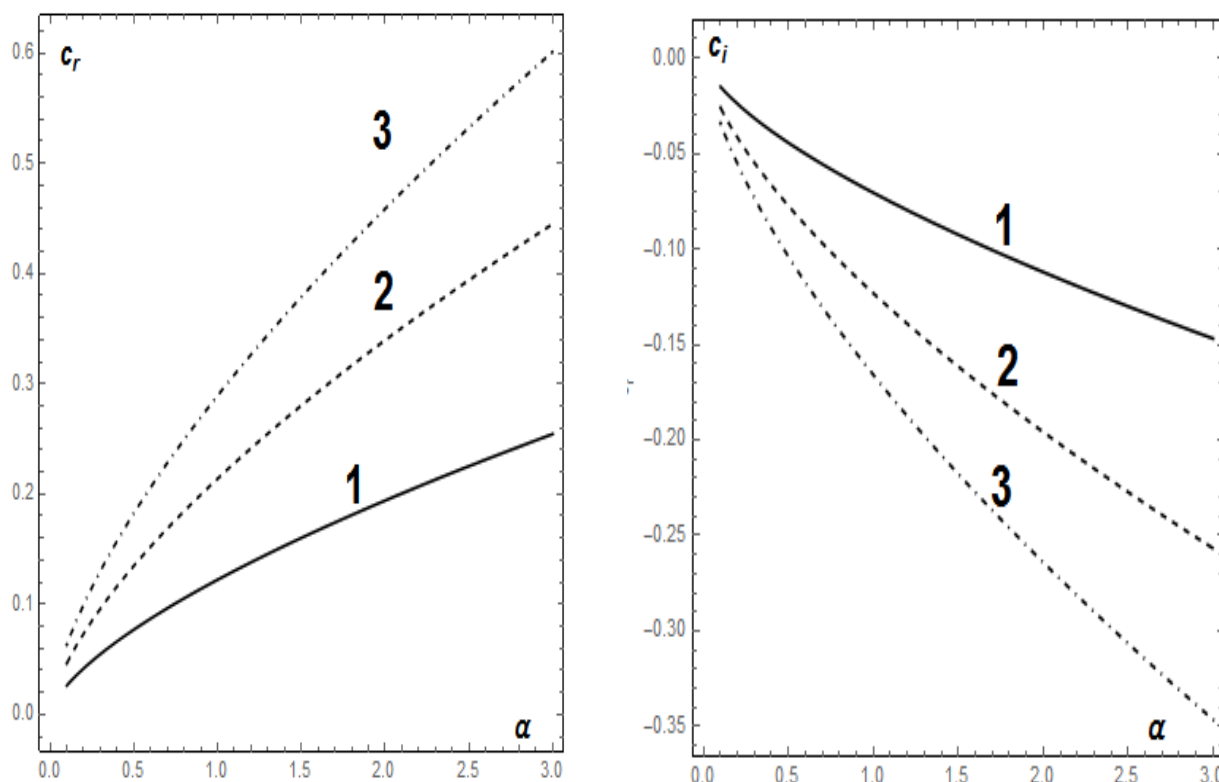


Рис.1(а). Фазовая скорость дисперсионного соотношения для трех мод профиля Блазиуса  $Re = 500$

Рис.1(б). Скорость роста дисперсионного соотношения для трех мод профиля Блазиуса при  $Re = 500$

Путем применения конечно-разностных и чебышевских спектральных методов коллокации. Во-первых, исследуется поведение собственных значений для ламинарного профиля скорости Блазиуса.

На рис. 1(а) представлена прямая зависимость между действительной фазовой скоростью и волновым числом для первых трех мод, помеченных индексом  $n$ . Это поведение выводится путем применения множества полиномов Чебышева, в качестве 50. На рис. 1(б) представлена временная скорость роста так как относительно этой цифры при постепенном увеличении волнового числа система устойчива для первых трех мод.

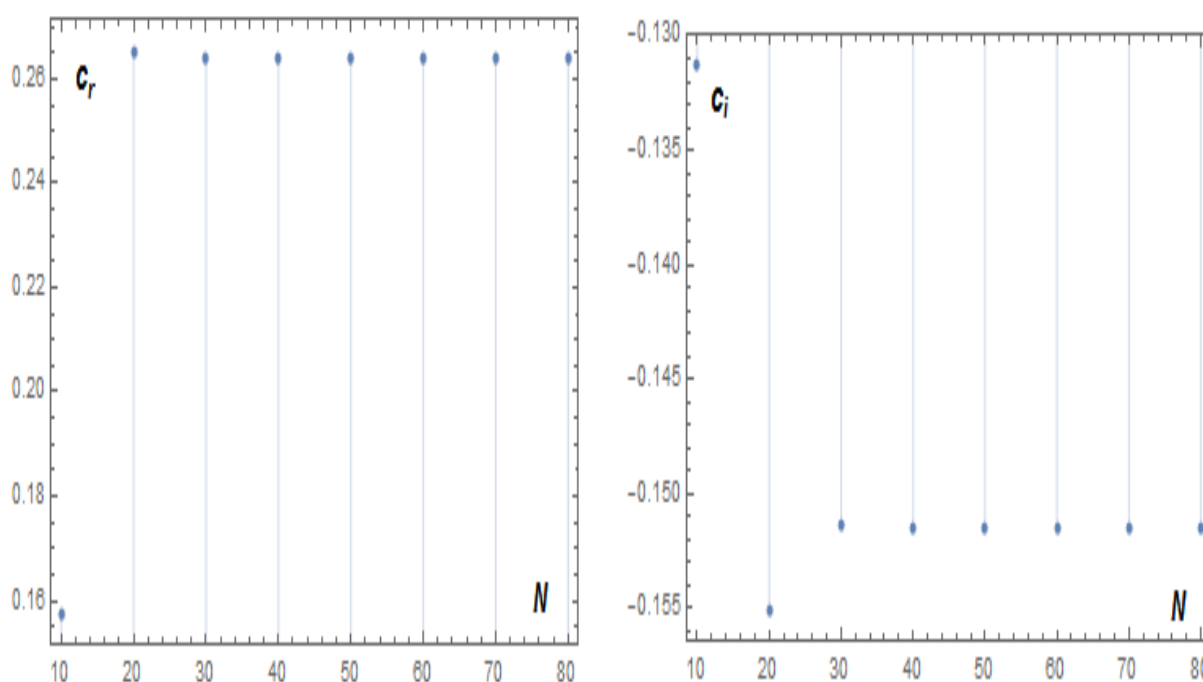


Рис.2(а) Влияние степеней полинома Чебышева на Действительную части собственных значений первой моды для профиля Блазиуса, при ( $Re = 500$ ).

Рис.2(б). Влияние степеней полинома Чебышева на мнимую части собственных значений первой моды для профиля Блазиуса, при ( $Re = 500$ ).

В реальных задачах, конечно, точное решение не известно, но точность приближенного решения можно проверить, повторив расчет с более высоким  $N$  как

показано на рис. 2(а,б). На этом рисунке установлено, что число полиномов Чебышева оказывает существенное влияние на точность приближенного значения как для действительного, так и для мнимого собственного значения первой моды.

Табл.1- Сравнение шести собственных значений между Конечно-разностный и методом коллокации для профиля Блазиуса, при  $Re = 500$

Блазиуса, $\alpha = 0.1$		
№ моды	Конечно-разностный методом, $N = 201$ .	Методколлокации методом $N = 50$ .
$n = 1$	0.263808 - 0.151756 I	0.263972 - 0.151458 I
$n = 2$	0.463607 - 0.261044 I	0.464092 - 0.260514 I
$n = 3$	0.632393 - 0.342465 I	0.633226 - 0.341571 I
$n = 4$	0.789461 - 0.403933 I	0.790635 - 0.402514 I
$n = 5$	0.875021 - 0.344361 I	0.874306 - 0.344932 I
$n = 6$	0.851789 - 0.403728 I	0.850939 - 0.405009 I

Табл.2- Сравнение шести собственных значений между Конечно-разностный и методом коллокации для профиля Блазиуса, при  $Re = 1000$

Блазиуса, $\alpha = 0.1$		
№ моды	Конечно-разностный методом, $N = 201$ .	Методколлокации методом $N = 50$ .
$n = 1$	0.209144 - 0.120716 I	0.209351 - 0.120493 I
$n = 2$	0.366411 - 0.209452 I	0.464092 - 0.208959 I
$n = 3$	0.497054 - 0.278941 I	0.633226 - 0.278064 I
$n = 4$	0.615391 - 0.336029 I	0.790635 - 0.334623 I
$n = 5$	0.727455 - 0.383018 I	0.874306 - 0.380856 I
$n = 6$	0.83481 - 0.414977 I	0.850939 - 0.414156 I

Табл.3- Сравнение шести собственных значений между Конечно-разностный и методом коллокации для профиля Блазиуса, при  $Re = 1500$ 

Блазиуса, $\alpha = 0.1$		
№ моды	Конечно-разностный методом, $N = 201$ .	Методколлокации методом $N = 50$ .
$n = 1$	0.1826 - 0.105549 I	0.182838 - 0.105343 I
$n = 2$	0.319537- 0.183692 I	0.320256 - 0.183183 I
$n = 3$	0.432641- 0.245887 I	0.433927 - 0.244965 I
$n = 4$	0.534173 - 0.298361 I	0.536064- 0.296907 I
$n = 5$	0.629119 - 0.343293 I	0.631545 - 0.341112 I
$n = 6$	0.720004 - 0.381929 I	0.724138 - 0.378697 I

В таблице.1. Набор собственных значений спектра уравнения Сквайра, рассматриваемых для профиля Блазиуса, выводится из Конечно-разностных и чебышевских коллокационных спектральных методов, установлено, что между двумя методами отмечается согласие. Тот же самый тест формулируется снова при различных значениях числа Рейнольдса, как показано в таблицах 2,3.

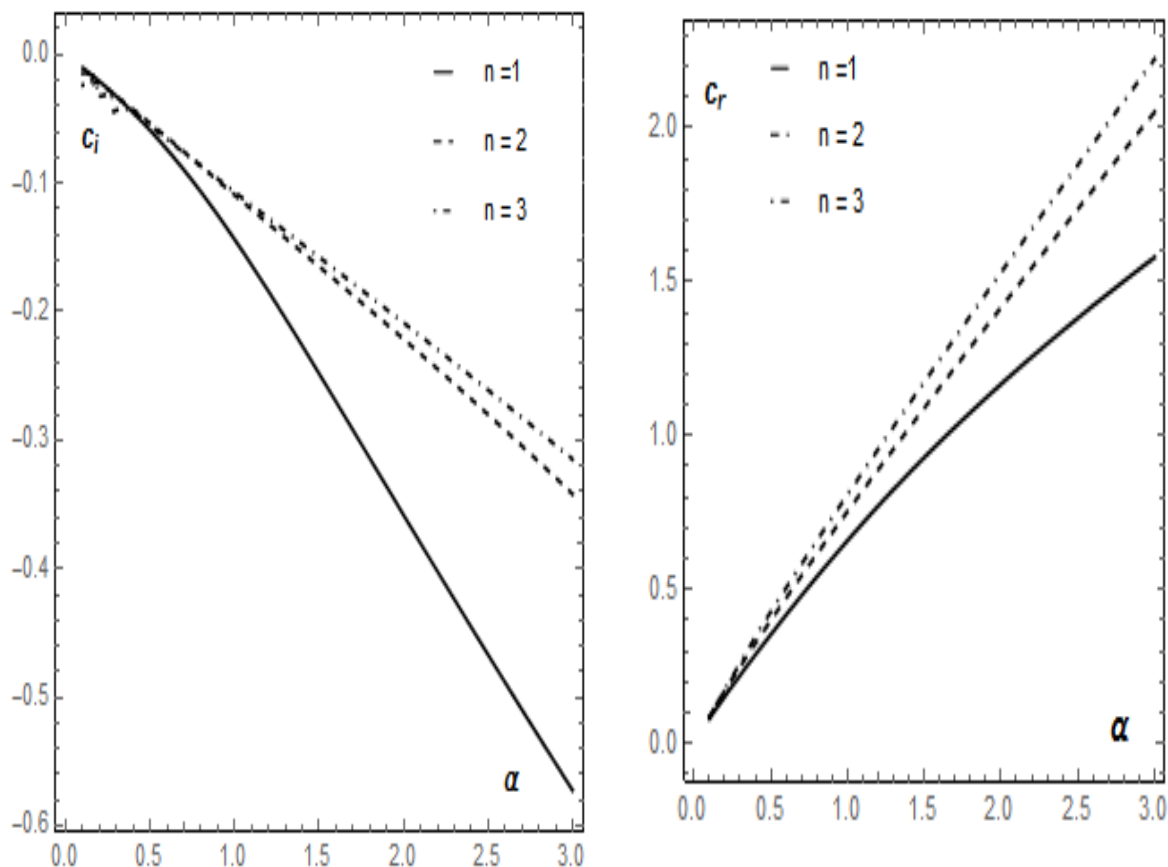


Рис.3(а). Скорость роста дисперсионного соотношения для трех мод профиля Mucker [14], при  $Re_\delta = 10000$

Рис.3(б). фазовая скорость дисперсионного соотношения для трех мод профиля Mucker [14], при  $Re_\delta = 10000$

Далее применяется метод коллокации на профиле скорости в развитом турбулентном пограничном слое, который задан аналитически [14].

На рис. 4 представлены результаты определения дисперсионных характеристик уравнения Сквайра развитого турбулентного пограничного слоя. При этом использована арифметика с произвольным числом цифр [13]. Количество полиномов Чебышева, использованных при этом, равнялось 90, что было обусловлено необходимостью достаточного количества точек коллокаций в области изменения второй производной профиля продольной скорости фонового течения [14]. На Рис. 4(а,б) приведены результаты, демонстрирующие влияние степеней

полинома Чебышева на действительную и мнимую части собственных значений первой моды для турбулентных пограничных слоев.

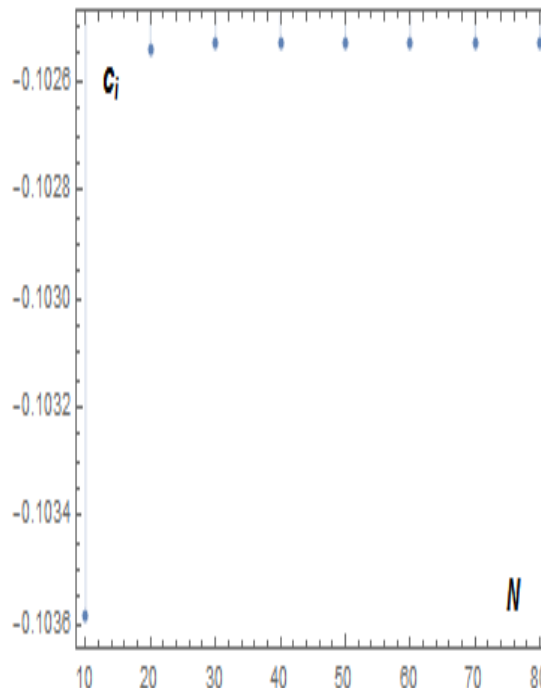
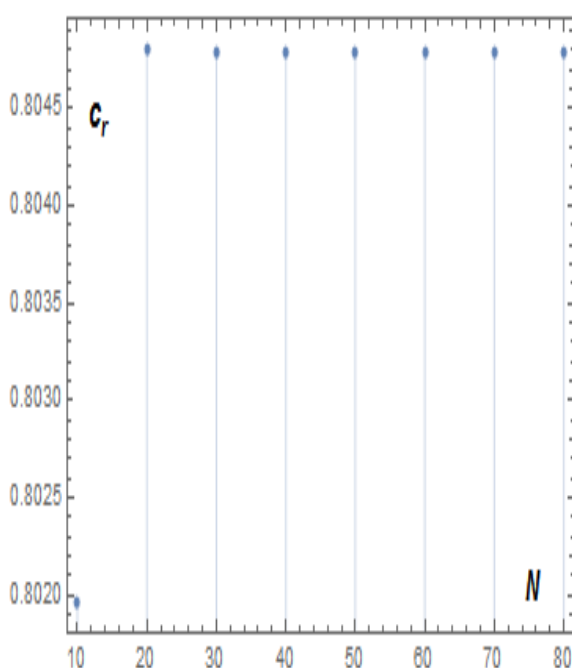


Рис.4(а). Влияние степеней полинома Чебышева на Действительную части собственных значений первой моды для профиля Musker [14], при ( $Re_\delta = 10000$ ).

Рис.4(б). Влияние степеней полинома Чебышева на мнимую часть собственных значений первой моды для профиля Musker [14], при ( $Re_\delta = 10000$ ).

Табл.4- Сравнение шести собственных значений между Конечно-разностный и методом коллокации для профиля Mucker, при  $Re_\delta = 10000$

Musker, $\alpha = 0.1$		
№ моды	Конечно-разностный методом, $N = 201$ .	Метод коллокации методом $N = 60$ .
n = 1	0.804774 - 0.102525 I	0.804786 - 0.102531 I
n = 2	0.871221 - 0.146889 I	0.872694 - 0.143721 I
n = 3	0.896593 - 0.0863094 I	0.869829 - 0.236717 I
n = 4	0.868542 - 0.241771 I	0.898625 - 0.0854556 I
n = 5	0.867493 - 0.355139 I	0.868766 - 0.348123 I
n = 6	0.947146 - 0.039073 I	0.94879 - 0.0384661 I

Табл.5- Сравнение шести собственных значений между Конечно-разностный и методом коллокации для профиля Musker, при  $Re_\delta = 12000$ 

Musker, $\alpha = 0.1$		
№ моды	Конечно-разностный методом, $N = 201$ .	Методколлокации методом $N = 60$ .
$n = 1$	0.798525 - 0.0990097 I	0.798513 - 0.0989826 I
$n = 2$	0.874892 - 0.121274 I	0.876213 - 0.119117 I
$n = 3$	0.871602 - 0.198041 I	0.872887 - 0.193767 I
$n = 4$	0.903654 - 0.0787834 I	0.905763 - 0.0780906 I
$n = 5$	0.950913 - 0.0354675 I	0.952469 - 0.0348919 I
$n = 6$	0.869605 - 0.404388 I	0.870849 - 0.396582 I

### Заключение

Для получения спектра собственных значений уравнения Сквайра для фонового поля развитого турбулентного пограничного слоя, использован метод коллокации (псевдоспектральный), основанный на полиномах Чебышева.

Методика отлажена на профиле Блазиуса и Musker. Очевидно, что увеличение числа полиномов Чебышева оказывает существенное влияние на точность определения собственных значений для профилей Блазиуса и Musker.

Влияние степеней полинома Чебышева на точность определения действительной и мнимой части собственных значений первой моды для ламинарных и турбулентных пограничных слоев показано на рисунках (2, 4(а,б)).

Получены действительная и мнимая части собственных значений в зависимости от волнового числа для первых 3 мод уравнения Сквайра для профиля развитого турбулентного пограничного слоя [14].

**Библиографический список**

1. Селим Р.С. Собственные моды уравнения Орра-Зоммерфельда в развитом турбулентном пограничном слое // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111352>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-5](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-5)
2. Drazin P.G. and Reid W.H. Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, 2004, 619 p.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
4. Peyret R. Spectral methods for incompressible viscous flow, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2002, 434 p.
5. Boyd J.P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Dover, Mineola, New York 1150, 2001, 690 p.
6. Shen J., Tang. T. Spectral and High-Order Methods with Applications, Science Press, Beijing, 2006, 326 p.
7. Ха Л.В. Закон подобия в развитом турбулентном пограничном слое // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69519>
8. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105673>
9. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102068>



10. Zharov VA, Selim R.S. Heat transfer in the boundary layer in an incompressible fluid in terms of waveguide turbulence model // Journal of Physics: Conference Series, 2019, vol. 1309, available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1309/1/012017>
11. Benney D.J., Gustavsson H.L. A New Mechanism For Linear and Nonlinear Hydrodynamic Instability // Studies in Applied Mathematics, 1981, vol. 64, pp. 185 – 209, available at: <https://doi.org/10.1002/sapm1981643185>
12. Jang P.S., Benney D.J., Gran R.L. On the origin of streamwise vortices in a turbulent boundary layer // Journal of Fluid Mechanics, 1986, vol. 169, pp. 109 – 123.
13. Mathematica 5.0, User's Guide. Wolfram Research, 2003, 1301 p.
14. Musker A.J. Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in turbulent boundary layer // AIAA Journal, 1979, vol.17(6), pp. 655 – 657.
15. Elbarbary E.M.E., Kady El- M. Chebyshev finite difference approximation for the boundary value problems // Applied Mathematics and Computation, 2003, vol. 139, pp. 513 - 523. DOI: [10.1016/S0096-3003\(02\)00214-X](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00214-X)
16. Orszag S.A and Gottlieb D. Numerical Analysis of spectral Methods: Theory and Applications, SIAM, 1977, 179 p.
17. Ibrahim M.A.K., Temsah R.S. Spectral methods for some singularly perturbed problems with initial and boundary layers // International Journal of Computer Mathematics, 1988, vol. 25, issue 1, pp. 33 – 48, available at: <https://doi.org/10.1080/00207168808803658>

18. Mason J.C., Handscomb D.C. Chebyshev Polynomials. Chapman and Hall, CRC, New York, 2003, 360 p.
19. McFadden G.B., Murray B.T., Boisvert R.F. Elimination of spurious eigenvalues in the Chebyshev tau spectral method // Journal Computational Physics, 1990, vol. 91, pp. 228 – 239. DOI:[10.1016/0021-9991\(90\)90012-P](https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90012-P)
20. Dongarra J.J., Straughan B., Walker D.W. Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems // Applied Numerical Mathematics, 1996, vol. 22, pp. 399 – 434, available at: [https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(96\)00049-9](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(96)00049-9)
21. Melenk J.M., Kirchner N.P., Schwab C. Spectral Galerkin discretization for hydrodynamic stability problems // Computing, 2000, vol. 65, issue 2, pp. 97 - 118. DOI: [10.1007/s006070070014](https://doi.org/10.1007/s006070070014)

# **Eigenvalues of the Squire equation for laminar and developed turbulent boundary layers**

**Selim R.S.**

*Moscow Institute of Physics and Technology,*

*9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russia*

*e-mail: [selim.rs@phystech.edu](mailto:selim.rs@phystech.edu)*

## **Abstract**

The stability of the eigenvalue problem for two-dimensional laminar and turbulent external flow over a flat plate was numerically studied using the theory of time linear stability. That is, the classical as well as the efficient approach are considered in detail for the eigenvalue problem: two different methods are studied for deducing the spectrum of eigenvalues, namely the finite difference method and the collocation method based on basic functions. The first approach of the physical model discretizing leads to algebraic equations with large matrices that are difficult to solve efficiently, while the second one creates matrices that are usually complete and have a large number of conditions. This problem is being discussed here in the Appendix to the Squire equation, which describes laminar and turbulent boundary layers. The average velocity profile of laminar boundary layers is obtained numerically. The dispersion ratio as a function of the wave number  $\alpha$  and other flow parameters for the problem (such as, the Reynolds number) is being defined for two different velocity profiles. The algorithm is realized in Mathematica, and the calculated eigenvalues are being compared between the two different methods.

The linear stability of a small class of engineering problems can be studied by solving the Orr-Sommerfeld equation. The most famous examples of this are the Blasius Boundary

layer and the plane of the Poiseuille flow. While the plane flow of the Poiseuille is strictly parallel, in the first case, an irrational argument relative to the parallel mean flow must be called in, in such a way that the system of stability equations, obtained by substituting small wave-like perturbations in the Navier-Stokes equations and linearization of the Blasius profile, will be reduced to the Orr-Sommerfeld equation. A numerical method for solving the Orr-Sommerfeld spectral equation in a two-dimensional boundary layer ( $\beta = 0$ ) was studied by the Chebyshev collocation method for laminar and boundary layers. To obtain the spectrum of eigenvalues of the Squire equation for the background field of a developed turbulent boundary layer, a collocation method (pseudospectral) based on Chebyshev polynomials was used. The technique was debugged on the profile of Blasius and Mucker. It is obvious that an increase in the number of Chebyshev polynomials has a significant impact on the accuracy of determining eigenvalues for the Blasius and Miskeg profiles. The impact of Chebyshev polynomial degrees on the accuracy of determining the real and imaginary parts of the eigenvalues of the first mode for laminar and turbulent boundary conditions was considered.

**Keywords:** incompressible viscous liquid, turbulent boundary layer, Squire's equation, collocation method, Chebyshev polynomials.

### References

- 1 Selim R.S. *Trudy MAI*, 2019, no. 109, available at: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111352> DOI: [10.34759/trd-2019-109-5](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-5)

2. Drazin P.G. and Reid W.H. *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 2004, 619 p.
3. Shlikhting G. *Boundary layer theory*, London, Pergamon Press, 1955, 535 p.
4. Peyret R. *Spectral methods for incompressible viscous flow*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2002, 434 p.
5. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover, Mineola, New York 1150, 2001, 690 p.
6. Shen J., Tang. T. *Spectral and High-Order Methods with Applications*, Science Press, Beijing, 2006, 326 p.
7. Kha L.V. *Trudy MAI*, 2016, no. 87, available at: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69519>
9. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 106, available at: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105673>
10. Zharov VA, Selim R.S. Heat transfer in the boundary layer in an incompressible fluid in terms of waveguide turbulence model, *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1309, available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1309/1/012017>
11. Benney D.J., Gustavsson H.L. A New Mechanism For Linear and Nonlinear Hydrodynamic Instability, *Studies in Applied Mathematics*, 1981, vol. 64, pp. 185 – 209, available at: <https://doi.org/10.1002/sapm1981643185>
12. Jang P.S., Benney D.J., Gran R.L. On the origin of streamwise vortices in a turbulent boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, vol. 169, pp. 109 – 123.
13. *Mathematica 5.0, User's Guide*. Wolfram Research, 2003, 1301 p.

14. Musker A.J. Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in turbulent boundary layer, *AIAA Journal*, 1979, vol.17(6), pp. 655 – 657.
15. Elbarbary E.M.E., Kady El- M. Chebyshev finite difference approximation for the boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 2003, vol. 139, pp. 513 - 523. DOI: [10.1016/S0096-3003\(02\)00214-X](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00214-X)
16. Orszag S.A and Gottlieb D. *Numerical Analysis of spectral Methods: Theory and Applications*, SIAM, 1977, 179 p.
17. Ibrahim M.A.K., Temsah R.S. Spectral methods for some singularly perturbed problems with initial and boundary layers, *International Journal of Computer Mathematics*, 1988, vol. 25, issue 1, pp. 33 – 48, available at: <https://doi.org/10.1080/00207168808803658>
18. Mason J.C., Handscomb D.C. *Chebyshev Polynomials*. Chapman and Hall, CRC, New York, 2003, 360 p.
19. McFadden G.B., Murray B.T., Boisvert R.F. Elimination of spurious eigenvalues in the Chebyshev tau spectral method, *Journal Computational Physics*, 1990, vol. 91, pp. 228 – 239. DOI:[10.1016/0021-9991\(90\)90012-P](https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90012-P)
20. Dongarra J.J., Straughan B., Walker D.W. Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems, *Applied Numerical Mathematics*, 1996, vol. 22, pp. 399 – 434, available at: [https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(96\)00049-9](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(96)00049-9)
21. Melenk J.M., Kirchner N.P., Schwab C. Spectral Galerkin discretization for hydrodynamic stability problems, *Computing*, 2000, vol. 65, issue 2, pp. 97 - 118. DOI: [10.1007/s006070070014](https://doi.org/10.1007/s006070070014)