

**ДИНАМИКА НЕОДНОРОДНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРЫ  
В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

МЕДВЕДСКИЙ Александр Леонидович — Московский авиационный институт (государственный технический университет), доцент, к.ф.-м.н.  
140002, Московская область, г. Люберцы, ул. Колхозная, д.2, кв.26; тел.: 7-903-712-77-16

Aleksandr L. MEDVEDSKIY — Moscow Aviation Institute (State Technical University), associate professor, candidate of science  
140002, Moscow region, Lyubertsy, Kolhoznyaya, 12-26; phone: 7-903-712-77-16

*Рассмотрена задача о радиальных колебаниях полый упругой неоднородной трансверсально-изотропной сферы, помещенной в неограниченную акустическую среду. Предполагается, что неоднородность материала сферы описывается степенным законом относительно радиальной координаты. Решение задачи строится с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени. Для нахождения оригиналов используется асимптотика трансформант в окрестности бесконечно удаленной точки комплексной плоскости, что соответствует начальным временам взаимодействия. Проводится сравнение полученной асимптотики с решением, построенным с использованием конечно-разностной схемы типа Куранта—Изаксона—Риса [1].*

*In work the problem about radial fluctuations hollow elastic non-uniform transversal-isotropic sphere placed in the unlimited acoustic environment is considered. It is supposed that heterogeneity of a material of sphere is described by the sedate law concerning radial co-ordinate. The problem decision is under construction with use of integrated transformation of Laplas on time. For a finding of originals it is used асимптотика трансформант in a vicinity of infinitely remote point of a complex plane that corresponds to initial times of interaction. Comparison received асимптотику with the decision constructed with use certainly scheme of type of Kurant — Izakson — Rice [1] is spent.*

**Ключевые слова:** неоднородность, сфера, трансверсально-изотропный материал, акустическая среда, нестационарные задачи, аналитические решения, численные методы.

**Key words:** heterogeneity, sphere, a transversal-isotropic material, the acoustic environment, non-stationary problems, analytical decisions, numerical methods.

**1. Постановка задачи**

Рассмотрим радиальные колебания неоднородной трансверсально изотропной сферы с внутренним радиусом  $r_2$  и внешним  $r_1 = R = 1$ , находящейся в неограниченной акустической среде с плотностью  $\rho_a$  и скоростью звука  $c_a$  и нагруженной внутренним давлением  $p_*(\tau)$  (рис. 1). При степенном типе неоднородности материала сферы задача допускает аналитическое решение при малых временах взаимодействия.

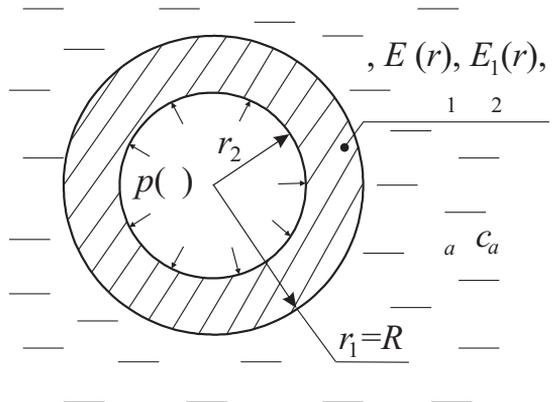


Рис. 1. Постановка задачи

Введем сферическую систему координат  $(r, \theta, \vartheta)$ , начало которой совпадает с центром сферы  $O$ , базисные векторы  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  и  $\mathbf{e}_\vartheta$ .

Материал сферы характеризуется модулем упругости первого рода  $E$  в направлении оси  $\mathbf{e}_r$ , модулем упругости  $E_1$  в направлении осей  $\mathbf{e}_\theta$  и  $\mathbf{e}_\vartheta$ , коэффициентами Пуассона  $\nu, \nu_1$  и  $\nu_2$  и плотностью  $\rho$ . Предполагается, что модули упругости и плотность зависят от радиальной координаты  $r$ , а коэффициенты Пуассона суть константы.

Задачу будем решать в безразмерном виде. Для этого введем следующие безразмерные параметры (тильда далее везде опущена):

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{tc_*}{R}; \quad \tilde{p}_a = \frac{p_a}{E_*}; \quad \tilde{v}_{ar} = \frac{v_{ar}}{c_*}; \quad \tilde{\varphi}_a = \frac{\varphi_a}{Rc_*}; \\ \tilde{c}_a &= \frac{c_*}{c_a}; \quad \tilde{\rho}_a = \frac{\rho_a}{\rho_*}; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_*}; \quad \tilde{u}_r = \frac{u_r}{R}; \quad \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{E_*}; \\ \tilde{E}_1 &= \frac{E_1}{E_*}; \quad \tilde{E} = \frac{E}{E_*}; \quad \tilde{G}_1 = \frac{G_1}{E_*}; \quad G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu)}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\alpha, \beta \in \{r, \theta\},$$

где

$$E_* = E(R); \quad \rho_* = \rho(R); \quad c_* = \sqrt{E_*/\rho_*}; \quad (1.2)$$

$p_a$  — давление в акустической среде;  $v_{ar}$  — радиальная компонента вектора скорости точек акустической среды;  $\varphi_a$  — потенциал вектора скорости в акустической среде;  $u_r$  — радиальная компонента вектора перемещения точек упругой неоднородной среды;  $\sigma_{\alpha\beta}$  — компоненты тензора напряжений упругой сферы.

В случае радиальных колебаний уравнение движения упругой сферы имеет вид [1]

$$a_{12} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + a_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_0 u_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau^2}, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{12}(r) &= \alpha E_1(r); \quad a_{11}(r) = \alpha \left[ E_1'(r) + 2r^{-1} E_1(r) \right]; \\ a_0(r) &= r^{-2} \left[ 2\beta \left( r E_1'(r) + E_1(r) \right) - 2(\gamma + \eta) E(r) \right]; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\alpha = (1 - \nu)\delta; \quad \beta = \nu_2 \delta; \quad \gamma = \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 + \nu} \delta;$$

$$\eta = \frac{\nu + \nu_1 \nu_2}{1 + \nu} \delta; \quad \delta^{-1} = 1 - \nu - 2\nu_1 \nu_2.$$

Здесь штрихом обозначена производная по пространственной координате.

Связь ненулевых компонент тензора напряжений с вектором перемещений имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \alpha E_1(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\beta E_1(r) r^{-1} u_r; \\ \sigma_{r\theta n} &= G_1(r) \left( \frac{\partial u_{\theta n}}{\partial r} + r^{-1} u_m \right); \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \tau) &= \\ &= \beta E_1(r) \frac{\partial u_r(r, \tau)}{\partial r} + E(r) r^{-1} (\gamma + \eta) u_r(r, \tau). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Предположим, что материал сферы описывается следующим видом неоднородности:

$$\begin{aligned} E(r) &= ar^k; \quad E_1(r) = r^k; \\ \rho &= \rho_* = \text{const}; \quad a > 0, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подстановка жесткостных параметров (1.6) в соотношение (1.3) приводит к следующему уравнению движения:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2+k}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{a - \nu_2(k+1)}{1-\nu} u_r = \frac{1}{\alpha r^k} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau^2}. \quad (1.7)$$

Акустическая среда описывается уравнением движения относительно потенциала вектора скорости  $\varphi_a$  [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi_a}{\partial r} &= c_a^2 \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial \tau^2}; \\ v_{ar} &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}; \quad v_{a\theta} = \frac{\varphi_a}{r}; \quad p_a = -\rho_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В начальный момент времени возмущения в средах отсутствуют:

$$u_r|_{\tau=0} = \frac{\partial u_r}{\partial \tau}|_{\tau=0} = \varphi_a|_{\tau=0} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0. \quad (1.9)$$

На внутренней поверхности сферы  $r=r_2$  задано нормальное давление  $p_*(\tau)$ , а при  $r=r_1$  ставятся граничные условия непротекания [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_{r=r_2} &= -p_*(\tau); \quad \sigma_{rr}|_{r=r_1} + p_a|_{r=r_1} = 0; \\ \frac{\partial u_r}{\partial \tau}|_{r=r_1} &= v_{ar}|_{r=r_1}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

На бесконечности возмущения в акустической среде отсутствуют:

$$\varphi_a(r, \tau) = O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

## 2. Решение задачи в пространстве изображений по Лапласу

Применим к задаче (1.7)–(1.11) преобразование Лапласа по времени  $\tau$  ( $s$  — параметр преобразо-

вания, трансформанты обозначены чертой над соответствующими функциями). В пространстве изображений получим следующую краевую задачу:

$$\frac{d^2 \bar{u}_r}{dr^2} + \frac{2+k}{r} \frac{d\bar{u}_r}{dr} - \left( s^2 \alpha^{-1} r^{-k} + \frac{2}{r^2} \frac{a - v_2(k+1)}{1-v} \right) \bar{u}_r = 0; \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_a}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\bar{\varphi}_a}{dr} - c_a^2 s^2 \bar{\varphi}_a = 0; \quad (2.2)$$

$$\bar{\sigma}_{rr}|_{r=r_2} = -\bar{p}_*(s); \quad \bar{\sigma}_{rr}|_{r=r_1} + \bar{p}_a|_{r=r_1} = 0; \quad (2.3)$$

$$s \bar{u}_r|_{r=r_1} = \bar{v}_{ar}|_{r=r_1};$$

$$\bar{\varphi}_a(r, s) = O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.1) является частным случаем дифференциального уравнения [3]

$$x^2 y'' + dx y' + (bx^m + c)y = 0, \quad m \neq 0, \quad (2.5)$$

при следующих значениях коэффициентов  $d, b, c$  и  $m$ :

$$d = 2 + k; \quad b = \alpha^{-1} q^2; \quad c = \frac{2}{1-v} (v_2(k+1) - a); \quad (2.6)$$

$$m = 2 - k.$$

Общее решение уравнения (2.1) по аналогии с (2.5) имеет вид:

$$\bar{u}(r, s) = r^{\omega-3/2} [C_1(s) K_\mu(\delta sr^\omega) + C_2(s) I_\mu(\delta sr^\omega)];$$

$$\omega = 1 - \frac{k}{2}; \quad \delta = \frac{1}{\omega \sqrt{\alpha}};$$

$$\mu = \frac{1}{2\omega} \sqrt{(3-2\omega)^2 + 8 \frac{a - v_2(3-2\omega)}{1-v}}, \quad (2.7)$$

где  $I_\mu(z), K_\mu(z)$  — модифицированные функции Бесселя порядка  $\mu$  [4].

Трансформанту напряжений  $\bar{\sigma}_{rr}(r, s)$  определим из (1.5):

$$\bar{\sigma}_{rr}(r, s) = \frac{r^{k+\omega-5/2}}{2} \times$$

$$\times \{ C_1(s) [d_{\mu r} K_\mu(\delta sr^\omega) - 2\sqrt{\alpha} sr^\omega K_{\mu+1}(\delta sr^\omega)] +$$

$$+ C_2(s) [d_{\mu r} I_\mu(\delta sr^\omega) + 2\sqrt{\alpha} sr^\omega I_{\mu+1}(\delta sr^\omega)] \}, \quad (2.8)$$

где  $d_{\mu r} = 2\alpha\omega(1+\mu) - 3\alpha + 4\beta$ .

Решение уравнения (1.8) с учетом условия ограниченности (1.11) имеет вид [2]

$$\bar{\varphi}_a(r, s) = r^{-1/2} C_3(s) K_{1/2}(c_a rs). \quad (2.9)$$

Выражения для трансформант давления  $\bar{p}_a(r, s)$  и радиальной компоненты вектора скорости  $\bar{v}_{ar}(r, s)$  найдем из (1.8):

$$\bar{p}_a(r, s) = -\rho_a s \bar{\varphi}_a(r, s) = -r^{-1/2} C_3(s) s K_{1/2}(c_a rs);$$

$$\bar{v}_{ar}(r, s) = -r^{-1/2} C_3(s) s K_{3/2}(c_a rs). \quad (2.10)$$

Используя граничные условия (1.10), получаем следующую систему уравнений относительно констант интегрирования:

$$\mathbf{A}(s) \mathbf{C} = \mathbf{Y},$$

$$\mathbf{A}(s) = (a_{ij}(s))_{3 \times 3}; \quad \mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)^T; \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Y} = (-\bar{p}_*(s), 0, 0)^T,$$

где

$$a_{n1}(s) = \frac{r_n^{k+\omega-5/2}}{2} (d_\mu K_\mu(\gamma_n s) - 2\sqrt{\alpha} sr_n^\omega K_{\mu+1}(\gamma_n s));$$

$$a_{n2}(s) = \frac{r_n^{k+\omega-5/2}}{2} (d_\mu I_\mu(\gamma_n s) + 2\sqrt{\alpha} sr_n^\omega I_{\mu+1}(\gamma_n s));$$

$$a_{13} = 0, \quad a_{23}(s) = -\rho_a c_a^{-1} r^{-3/2} \gamma_3 K_{1/2}(\gamma_3 s);$$

$$a_{31}(s) = r_1^{\omega-3/2} s K_\mu(\gamma_1 s), \quad a_{32}(s) = r_1^{\omega-3/2} s I_\mu(\gamma_1 s), \quad (2.12)$$

$$a_{33}(s) = r_1^{-3/2} \gamma_3 s K_{3/2}(\gamma_3 s);$$

$$\gamma_n = \delta r_n^\omega; \quad \gamma_3 = c_2 r_1 \quad (n=1, 2).$$

Решение системы (2.11) представляется так:

$$C_i(s) = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta_0(s)}; \quad \Delta_0(s) = \det \mathbf{A}(s), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.13)$$

где  $\Delta_i$  — определитель матрицы, полученной из  $\mathbf{A}$  заменой  $i$ -го столбца на столбец свободных членов  $\mathbf{Y}$ .

### 3. Асимптотика решения при малых временах взаимодействия

Оригиналы трансформант (2.7)–(2.10) определить крайне затруднительно. Поэтому найдем выражения для оригиналов в начальные моменты времени. Это соответствует асимптотическому разложению трансформант в окрестности бесконечно удаленной точки  $s = \infty$  [5]. Для этого используем асимптотические разложения функций Бесселя [4]:

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \left[ \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{c_{\nu k}}{z^k} \right] + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty;$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ \sum_{k=0}^N \frac{c_{\nu k}}{z^k} \right] + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right); \quad (3.1)$$

$$c_{\nu k} = \frac{\prod_{m=0}^k (4\nu^2 - (2m-1)^2)}{2^{3k} k! (4\nu^2 - 1)}.$$

Для дальнейшего использования их удобно представить так (остаточный член далее опущен):

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z z^{-N} P_\nu^{(N)}(z); \\ K_\nu(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} z^{-N} Q_\nu^{(N)}(z); \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$P_\nu^{(N)}(z) = \sum_{k=0}^N (-1)^k c_{\nu k} z^{N-k}; \quad Q_\nu^{(N)}(z) = \sum_{k=0}^N c_{\nu k} z^{N-k}.$$

Подставим разложения (3.1) в (2.12) и вычислим определители (2.13). В результате после достаточно громоздких преобразований получим:

$$\begin{aligned} \Delta_0(s) &= e^{-\beta_1 s} \left[ H_1(s) e^{(\alpha_1 - \alpha_2)s} + H_2(s) e^{-(\alpha_1 - \alpha_2)s} \right]; \\ \Delta_1(s) &= \bar{p}_* e^{(\alpha_1 - \beta_1)s} R_1(s); \quad \Delta_2(s) = \bar{p}_* e^{-(\alpha_1 + \beta_1)s} R_2(s); \\ \Delta_3(s) &= \bar{p}_* R_3(s), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(s) &= b_{11}(s) [b_{22}(s)b_{33}(s) - b_{32}(s)b_{23}(s)]; \\ H_2(s) &= b_{12}(s) [b_{31}(s)b_{23}(s) - b_{21}(s)b_{33}(s)]; \\ R_1(s) &= b_{32}(s)b_{23}(s) - b_{22}(s)b_{33}(s); \\ R_2(s) &= b_{31}(s)b_{33}(s) - b_{31}(s)b_{23}(s); \\ R_3(s) &= b_{31}(s)b_{22}(s) - b_{21}(s)b_{32}(s); \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\alpha_k = \delta r_k^\omega, \quad k=1,2; \quad \beta_1 = c_1 r_1.$$

Функции  $b_{ij}(s)$ , входящие в (3.4), определяют так ( $n=1, 2$ ):

$$\begin{aligned} b_{n1}(s) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\gamma_n s} r_n^{k+\omega-5/2} (\gamma_n s)^{-N} \times \\ &\times \left[ d_\mu Q_\mu^{(N)}(\gamma_n s) - 2\sqrt{\alpha} s r_n^\omega Q_{\mu+1}^{(N)}(\gamma_n s) \right]; \\ b_{n2}(s) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\gamma_n s} r_n^{k+\omega-5/2} (\gamma_n s)^{-N} \times \\ &\times \left[ d_\mu P_\mu^{(N)}(\gamma_n s) + 2\sqrt{\alpha} s r_n^\omega P_{\mu+1}^{(N)}(\gamma_n s) \right]; \\ b_{13}(s) &= 0; \\ b_{23}(s) &= -\rho_a c_a^{-1} r^{-3/2} \gamma_3^{-N+1} s^{-N} \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma_3 s}} Q_{1/2}^{(N)}(\gamma_3 s); \\ b_{31}(s) &= r_1^{\omega-3/2} s \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma_1 s}} (\gamma_1 s)^{-N} Q_\mu^{(N)}(\gamma_1 s); \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$b_{32}(s) = r_1^{\omega-3/2} s \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1 s}} (\gamma_1 s)^{-N} P_\mu^{(N)}(\gamma_1 s);$$

$$b_{33}(s) = r_1^{-3/2} \gamma_3 s \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma_3 s}} (\gamma_3 s)^{-N} Q_{3/2}^{(N)}(\gamma_3 s).$$

Определитель  $\Delta_0(s)$  (3.3) можно представить в следующем виде:

$$\Delta_0(s) = e^{-(\beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1)s} H_1(s) \left[ 1 + \frac{H_2(s)}{H_1(s)} e^{-2(\alpha_1 - \alpha_2)s} \right]. \quad (3.6)$$

Воспользуемся разложениями решения по системе бегущих волн [2, 6]. В этом случае для функции  $\Delta_0^{-1}(s)$  в (3.6) получим следующее выражение:

$$\frac{1}{\Delta_0(s)} = \frac{e^{(\beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1)s}}{H_1(s)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{H_2(s)}{H_1(s)} \right]^n e^{-2(\alpha_1 - \alpha_2)ns}. \quad (3.7)$$

Тогда для констант интегрирования (2.13) будем иметь

$$\begin{aligned} C_i(s) &= \bar{p}_*(s) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_i(s) [H_2(s)]^n}{[H_1(s)]^{n+1}} e^{-\gamma_i n s}; \\ \gamma_{1n} &= 2(\alpha_1 - \alpha_2)n - \alpha_2; \\ \gamma_{2n} &= 2(\alpha_1 - \alpha_2)n + \alpha_1 - \alpha_2; \\ \gamma_{3n} &= 2(\alpha_1 - \alpha_2)n + \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставим найденные константы интегрирования  $C_i(s)$ , а также асимптотические разложения (3.1) в соотношения (2.7), (2.8) и для компонент напряженно-деформированного состояния сферы в итоге получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, s) &= r^{\omega-3/2} \bar{p}_*(s) \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{X}_{kn}(r, s) e^{-\psi_{kn}(r)s}; \\ \bar{\sigma}_{rr}(r, s) &= \frac{r^{k+\omega-5/2}}{2} \bar{p}_*(s) \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Y}_{kn}(r, s) e^{-\psi_{kn}(r)s}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{X}_{1n}(r, s) &= Q_\mu^{(N)}(\delta s r^\omega) Z_{1n}(s); \\ \bar{X}_{2n}(r, s) &= P_\mu^{(N)}(\delta s r^\omega) Z_{1n}(s); \end{aligned}$$

$$\bar{Y}_{1n}(r, s) = \left[ d_\mu Q_\mu^{(N)}(\delta s r) - 2\sqrt{\alpha} s r^\omega Q_{\mu+1}^{(N)}(\delta s r) \right] Z_{1n}(s);$$

$$\bar{Y}_{2n}(r, s) = \left[ d_{\mu} P_{\mu}^{(N)}(\delta sr) + 2\sqrt{\alpha} sr^{\omega} P_{\mu}^{(N)}(\delta sr) \right] Z_{2n}(s); \quad (3.10)$$

$$Z_{kn}(s) = (-1)^n \frac{R_k(s) [H_2(s)]^n}{[H_1(s)]^{n+1}};$$

$$\Psi_{kn}(r) = \gamma_{kn} + (-1)^{k+1} \delta r^{\omega}, \quad k = 1, 2.$$

Функции  $\bar{X}_{kn}(r, s)$  в (3.10) являются рациональными относительно параметра  $s$ . Поэтому их оригиналы достаточно просто находятся с помощью теории вычетов. Воспользуемся свойством преобразования Лапласа [5] и в пространстве оригиналов получим следующие представления:

$$u(r, \tau) = r^{\omega-3/2} p_*(\tau) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{N_k(\tau, r)} X_{kn}[r, \tau - \Psi_{kn}(r)] H[\tau - \Psi_{kn}(r)];$$

$$\sigma_{rr}(r, \tau) = \frac{r^{k+\omega-5/2}}{2} p_*(\tau) \times \quad (3.11)$$

$$\times \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{N_k(\tau, r)} Y_{kn}[r, \tau - \Psi_{kn}(r)] H[\tau - \Psi_{kn}(r)].$$

Здесь учтено, что для фиксированного момента времени  $\tau$  и координаты  $r$  в (3.9) остается конечная сумма ряда по экспонентам. При этом верхние пределы суммирования  $N_k(\tau, r)$  определяются так:

$$N_1(\tau, r) = \left\lfloor \frac{1}{2(\alpha_1 - \alpha_2)} (\tau + \alpha_2 - (-1)^{k+1} \delta r^{\omega}) \right\rfloor;$$

$$N_2(\tau, r) = \left\lfloor \frac{1}{2(\alpha_1 - \alpha_2)} (\tau - \alpha_1 + \alpha_2 - (-1)^{k+1} \delta r^{\omega}) \right\rfloor, \quad (3.12)$$

где  $\lfloor \bullet \rfloor$  — целая часть числа.

Аналитические выражения для функций  $\bar{X}_{kn}(r, s)$  и  $\bar{Y}_{kn}(r, s)$  в (3.10) находились с использованием символьного процессора Maple 9.5 [7].

#### 4. Радиальные колебания сферы при действии единичного скачка давления

В качестве примера рассмотрим задачу о действии скачка давления  $p_*(\tau) = H(\tau)$  на внутренней поверхности сферы  $r_2 = 1/2$ , материал которой описывается следующими параметрами  $a = 0,5$ ;  $\nu = 0,36$ ;  $\nu_2 = 0,1$ . В качестве акустической среды ис-

пользовалась вода, безразмерные параметры которой таковы:  $\rho_a = 0,22$ ,  $c_a = 1,98$ . При расчетах удерживалось различное количество членов разложений  $N$  в (3.1). На рис. 2 значками «▲» и «■» показана зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(1, \tau)$  на поверхности контакта упругой и акустических сред при различных  $N$ . Как следует из графика, полученные решения хорошо описывают начальный этап взаимодействия сред, однако с ростом  $\tau$  для адекватного описания процесса необходимо большое количество членов ряда.

Эта же задача была решена с использованием разработанной в работе [1] конечно-разностной схемы. Расчет проводился на пространственно-временной сетке с числом Куранта  $C = 0,95$ . Результаты расчета приведены на рис. 2–4. На рис. 2 сплошной линией показано распределение нормальных напряжений в сфере на граничной поверхности  $r = 1$ . Из графика четко прослеживается волновой характер нестационарного процесса. С течением времени напряжения затухают, что объясняется демпфирующими свойствами неограниченной акустической среды.

На рис. 3 представлена временная зависимость радиальных напряжений  $\sigma_{rr}(r, \tau)$  при  $r = 0,6$  и  $r = 0,8$ . Скачки на графике соответствуют момен-

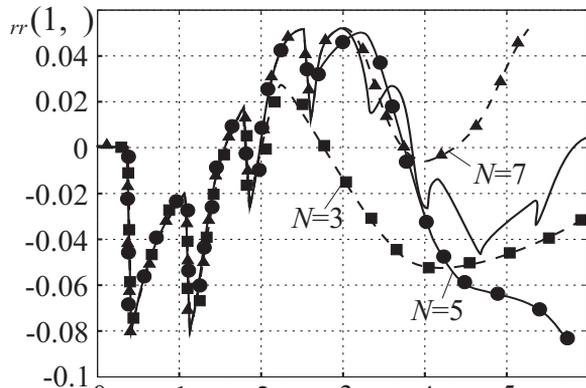


Рис. 2. Радиальные напряжения при  $r = 1$

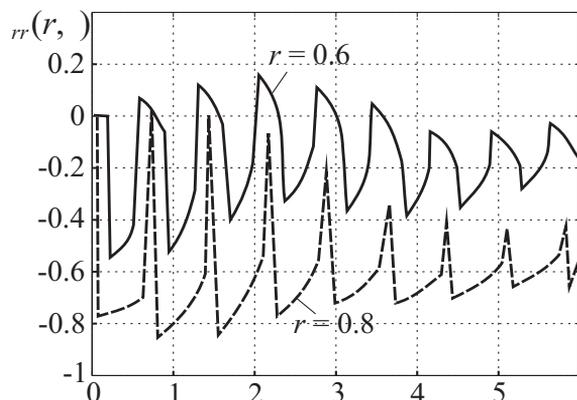


Рис. 3. Радиальные напряжения при  $r = 0,6$  и  $r = 0,8$

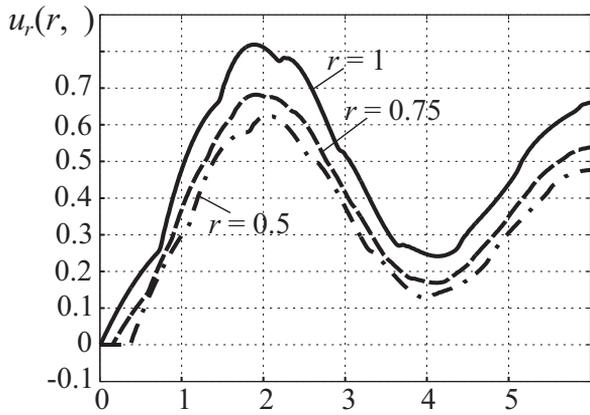


Рис. 4. Радиальные перемещения для  $r = 0,5$ ;  $r = 0,75$  и  $r = 1$

ту прихода отраженных от границы сферы упругих волн.

График, представленный на рис. 4, демонстрирует временную зависимость радиального перемещения точек сферы для  $r = 0,5$ ;  $r = 0,75$  и  $r = 1$ . Наличие на графике угловых точек также объясняется волновым характером процесса.

Также был исследован вопрос о влиянии параметра неоднородности на напряженно-деформированное состояние сферы. На рис. 5—7 представлены временные зависимости нормального напряже-

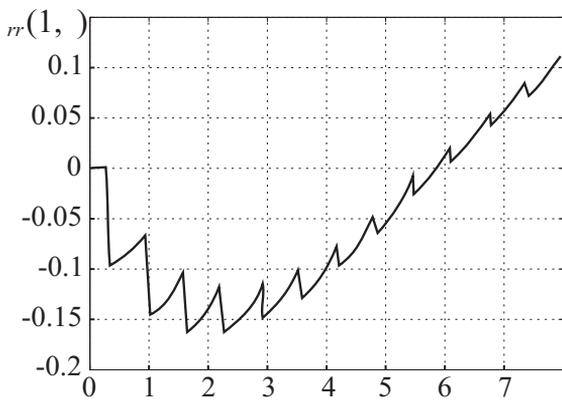


Рис. 5. Радиальные напряжения  $r = 1, k = -3$

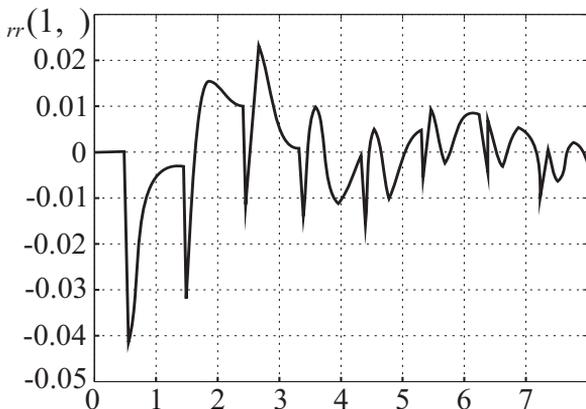


Рис. 6. Радиальные напряжения  $r = 1, k = 0$

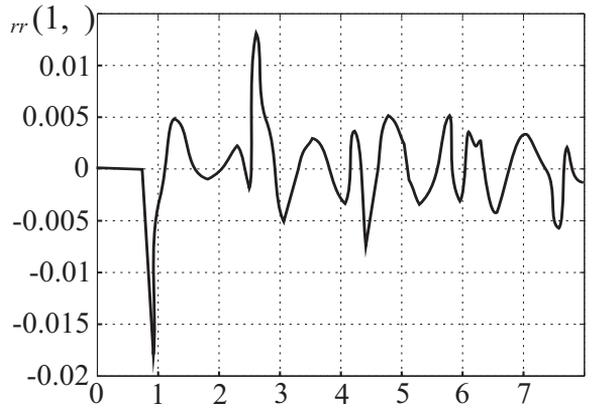


Рис. 7. Радиальные напряжения  $r = 1, k = 3$

ния  $\sigma_{rr}(\tau, 1)$  на границе раздела упругой и акустических сред при различных значениях  $k$  (см. (1.6)).

Как следует из графиков, параметр  $k$  существенным образом влияет на перераспределение напряжений в сфере. В частности, при отрицательных значениях параметра  $k$ , что соответствует снижению жесткости среды при увеличении  $r$ , наблюдается значительное увеличение уровня напряжений.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 09-01-00731-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (код проекта П-422(8)).*

### Библиографический список

1. Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Метод поверхностных функций влияния в нестационарных задачах дифракции. — М.: Изд-во МАИ, 2007.
2. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. — М.: Физматлит, 2004.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1971.
4. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. — М.: Наука, 1979.
5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971.
6. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. — М.: Наука, 1990.
7. Дьяконов В. Maple 6: учебный курс. — СПб.: Питер, 2001.

Московский авиационный институт  
(государственный технический университет)

Сдано в набор 02.02.2010. Подписано в печать 11.03.10.  
Бумага офсетная. Формат 60×84 1/8. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 21,85. Уч.-изд. л. 23,50. Тираж 195 экз.  
Заказ 4430/359.

Издательство МАИ-ПРИНТ  
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993  
Типография Издательства МАИ  
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993