

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ

Владимир Анатольевич ВЕСТЯК родился в 1967 г. в городе Москве. Заведующий кафедрой МАИ. Кандидат физико-математических наук, доцент. Основные научные интересы — в области нестационарных связанных термоэлектромагнитоупругих задач. Автор 35 научных работ. E-mail: tdv@mai.ru

Vladimir Anatolyevich Vestyak, was born November 29, 1967 in Moscow. Head of 311 Department of MAI, PhD (physics-mathematics), ass. professor. Primary scientific interests: time-dependent bound thermoelectromagnetoelastic problems. He is the author of more than 30 publications. E-mail: tdv@mai.ru

Андрей Владимирович ЗЕМСКОВ родился в 1975 г. в городе Москве. Доцент МАИ. Кандидат физико-математических наук, доцент. Основные научные интересы — в области численно-аналитических методов решения задач математической физики. Автор 24 научных работ. E-mail: azemskov1975@mail.ru

Andrey Vladimirovich Zemskov, was born April 17, 1975 in Moscow. Assistant professor of MAI, PhD (physics-mathematics), assistant professor. Primary scientific interests: numerical-analytic methods for solving mathematical physics problems. He is the author of more than 20 publications. E-mail: azemskov1975@mail.ru

Николай Николаевич ЭРИХМАН родился в 1988 г. в городе Москве. Студент МИЭМ. Основные научные интересы — в области численно-аналитических методов решения задач математической физики. Автор трёх научных работ. E-mail: Math@list.ru

Nikolay Nikolaevych Erichman, was born September 5, 1988. Student of MIEM. Primary scientific interests: numerical-analytic methods for solving mathematical physics problems. He has three scientific publications. Email: math@list.ru

Рассматривается обратная коэффициентная задача термоупругости для пластины конечной толщины. Предлагаемое в работе решение основывается на предположении о том, что термомеханические процессы в пластине носят установившийся гармонический характер. Геометрия области и граничные условия позволяют свести рассматриваемую задачу к одномерной задаче термоупругости. При условии малости частоты термомеханических колебаний удаётся построить разрешающее уравнение, из которого находят коэффициенты температурных напряжений и тепловыделения при деформировании. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процесса экспериментального определения физико-механических характеристик материалов, применяемых в авиаконструкциях и ракетостроении.

An inverse quotients thermoelasticity problem for a finite thickness layer is considered. The proposed solution is based on the assumption that thermo-mechanical processes in the layer have a stationary harmonic character. The area geometry and boundary conditions allow reducing the problem to a one-dimensional thermoelasticity problem. Assuming thermomechanical oscillation frequency small enough a solving equation was produced. This equation allows determining quotients of temperature stresses and heat release under deformation. Obtained results can be used to simulate the process of experimental determination of physical-mechanical properties of the materials used in aero- and spacecraft manufacturing.

Ключевые слова: термоупругость, обратные задачи, асимптотика.

Key words: thermoelasticity, inverse quotients problem, asymptotics.

Постановка задачи

Рассматриваемая в работе задача относится к классу обратных коэффициентных задач механики деформируемого твёрдого тела, суть которой заключается в том, что необходимо определить физико-механические характеристики среды, которые являются коэффициентами дифференциальных операторов по измеренным на границе полям перемещений и температуры. Искомые величина-

ми здесь являются коэффициенты температурных напряжений и тепловыделения при деформировании. Главная проблема при решении подобных задач — это формулировка операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов и граничными полями перемещений. Как правило, такая связь представляется в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода, решение которого требует регуляризации [1,2,7,8].

Рассматривается обобщённая постановка обратной задачи термоупругости, которая была подробно рассмотрена в работе [2]. Пусть имеется упругая пластина толщины L . Одна из поверхностей пластины $x_3 = 0$ подвергается периодическому (гармоническому) низкочастотному нагреву. С обеих поверхностей происходит теплообмен с внешней средой. Нижняя поверхность $x_3 = L$ предполагается закреплённой, а верхняя поверхность $x_3 = 0$ свободна от напряжений. По имеющейся информации о поле температур на одной из поверхностей пластины требуется определить коэффициенты (в общем случае тензоры) температурных напряжений и тепловыделения при деформировании (рис. 1).

Уравнения в прямоугольной декартовой системе координат, описывающие установившиеся термомеханические процессы в данной среде, и соответствующие краевые условия имеют вид [3–6]

$$\begin{aligned} C_{ijmn} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_j} - B_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \\ \kappa_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial T}{\partial t} + D_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left(C_{33mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - B_{33} T \right) \Big|_{x_3=0} = 0; \quad u_3 \Big|_{x_3=L} = 0;$$

$$\left(C_{13mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right) \Big|_{x_3=0} = 0; \quad u_1 \Big|_{x_3=L} = 0;$$

$$\left(C_{23mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right) \Big|_{x_3=0} = 0; \quad u_2 \Big|_{x_3=L} = 0;$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} + \alpha_1 T \Big|_{x_3=0} = F e^{i\omega t}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=L} + \alpha_2 T \Big|_{x_3=L} = 0,$$

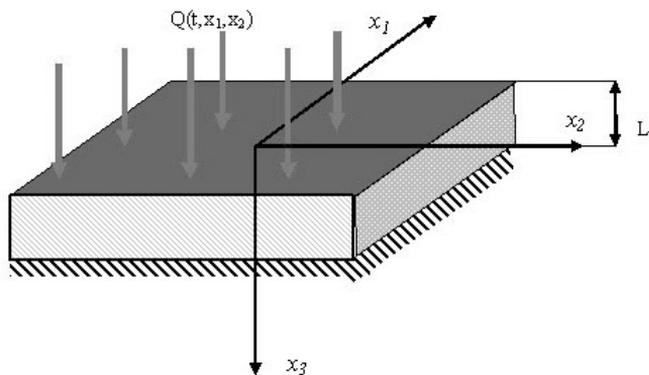


Рис. 1. Упругая пластина, облучаемая последовательностью тепловых импульсов

где все величины являются безразмерными, для которых приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_i^*}{Z}; \quad u_i = \frac{u_i^*}{Z}; \quad t = \frac{Ct^*}{Z}; \quad T = \frac{T^*}{T_0}; \\ C_{ijmn} &= \frac{C_{ijmn}^*}{\rho C^2}; \quad B_{ij} = \frac{B_{ij}^* T_0}{\rho C^2}; \quad \kappa_{ij} = \frac{\kappa_{ij}^*}{\kappa_{33}^*}; \quad D_{ij} = \frac{D_{ij}^*}{\rho c T_0}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$L = \frac{L^*}{Z}; \quad \alpha_k = \frac{\alpha_k^* Z}{\kappa_{33}^*} \quad (k=1,2); \quad F = \frac{Z}{T_0 \kappa_{33}^*} F^*;$$

$$C^2 = \frac{C_{3333}^*}{\rho}; \quad Z = \frac{\kappa_{33}^*}{\rho c C}; \quad \omega = \frac{Z \omega^*}{C};$$

x_i^* — прямоугольные декартовы координаты; u_i^* — координаты вектора перемещений; t^* — время; T^* — приращение температуры; C_{ijmn}^* — тензор упругих характеристик среды; B_{ij}^* — тензор тепловых напряжений; κ_{ij}^* — тензор теплопроводности; D_{ij}^* — тензор, характеризующий тепловыделение при деформировании; ρ — плотность среды; c — теплоемкость; α_i^* — коэффициент теплообмена с внешней средой; T_0 — начальная температура пластины; L^* — толщина пластины; C — скорость распространения волны растяжения-сжатия вдоль оси Ox_3 ; Z — линейный масштаб; ω^* — частота; F^* — амплитуда теплового импульса.

Пусть, кроме того, имеется некоторая информация о полях перемещений и температуры одного из следующих видов:

$$\begin{cases} T(0,t) = f_1(t); \\ u_3(0,t) = f_2(t). \end{cases} \quad (4)$$

Требуется определить B_{ij} и D_{ij} .

Алгоритм решения

Поставленная задача решается в два этапа. На первом этапе решается «прямая» задача (1), (2). Далее с учётом условия (4) строятся соотношения, из которых находятся коэффициенты B_{ij} и D_{ij} . Как правило, такие соотношения представляются в виде интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Введённое предположение о том, что внешнее тепловое воздействие на поверхность пластины носит

гармонический характер при малых частотах, позволяет получить приближённые определяющие соотношения для B_{ij} и D_{ij} в виде системы алгебраических уравнений.

Для неограниченной в плоскости x_1Ox_2 ортотропной пластины задача (1), (2) является одномерной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - B_{33} \frac{\partial T}{\partial x_3} &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial T}{\partial t} + D_{33} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} - B_{33} T \right)_{x_3=0} &= 0; \quad u_3|_{x_3=L} = 0; \\ - \frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} + \alpha_1 T|_{x_3=0} &= F e^{i\omega t}; \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=L} + \alpha_2 T|_{x_3=L} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Её решение для установившегося режима с учётом граничных условий (6) будем искать в виде [4]

$$\begin{aligned} u_3(x_3, t) &= U_3(x_3) e^{i\omega t}; \\ T(x_3, t) &= \theta(x_3) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка (7) в (5) даёт

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2} - B_{33} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} &= -\omega^2 U_3; \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} &= i\omega \frac{\partial \theta}{\partial t} + i\omega D_{33} \frac{\partial U_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, выполняя преобразования

$$U_3 = \bar{U}_3 e^{\lambda x_3}, \quad \theta = \bar{\theta} e^{\lambda x_3}, \quad (9)$$

приводим систему (8) к виду

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + \omega^2) \bar{U}_3 - B_{33} \lambda \bar{\theta} &= 0; \\ -i\lambda \omega D_{33} \bar{U}_3 + (\lambda^2 - i\omega) \bar{\theta} &= 0, \end{aligned}$$

откуда с учётом (7) и (9) находим

$$T = \sum_{i=1}^4 C_i e^{(\lambda_i x_3 + i\omega t)}; \quad u_3 = \sum_{i=1}^4 \frac{B_{33} \lambda_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} C_i e^{(\lambda_i x_3 + i\omega t)},$$

где λ_i — корень характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda^2 + \omega^2 & -B_{33} \lambda \\ -i\omega D_{33} \lambda & \lambda^2 - i\omega \end{vmatrix} &= \\ = \lambda^4 + (\omega^2 - i\omega - iB_{33} D_{33}) \lambda^2 - i\omega^3 &= 0; \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты C_i находятся из граничных условий (6).

Эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{B_{33} \lambda_i^2}{\lambda_i^2 + \omega^2} - B_{33} \right) C_i &= 0; \quad \sum_{i=1}^4 C_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} e^{\lambda_i L} = 0; \\ \sum_{i=1}^4 (-\lambda_i + \alpha_1) C_i &= F; \quad \sum_{i=1}^4 (\lambda_i + \alpha_2) C_i e^{\lambda_i L} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Корни уравнения (10) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2,3,4} &= \pm \left\{ \frac{-\omega^2 + i\omega(1 + B_{33} D_{33})}{2} \pm \right. \\ &\left. \pm \frac{\omega \sqrt{\omega^2 + 2i\omega(1 - B_{33} D_{33}) - (1 + B_{33} D_{33})^2}}{2} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

в связи с чем нахождение C_i вызывает затруднения. Данная задача может быть решена либо численно, либо аналитически с помощью асимптотического подхода.

При достаточно малых частотах ω можно воспользоваться следующими приближёнными формулами для корней уравнения (10):

$$\lambda_{1,2,3,4} \sim \begin{cases} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \sqrt{\omega} \left(1 + i \frac{B_{33} D_{33}}{2(1 + B_{33} D_{33})^2} \omega \right) \pm \\ \pm \frac{i\omega}{\sqrt{1 + B_{33} D_{33}}} \omega, \quad \omega \rightarrow 0. \end{cases} \quad (12)$$

Соответственно, при больших частотах

$$\lambda_{1,2,3,4} \sim \begin{cases} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \sqrt{\omega} \pm \\ \pm i\omega \left(i + \frac{B_{33} D_{33}}{2\omega} \right), \quad \omega \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим случай, когда ω мало. Тогда подстановка корней (12) в систему (11) даёт следующие приближённые выражения для коэффициентов C_j :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{\alpha_2(1-i)F}{2\sqrt{2}\sqrt{1+B_{33}D_{33}}(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)\sqrt{\omega}} - \frac{i(1+L\alpha_2)}{2(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)}; \\
 C_2 &= \frac{\alpha_2(1-i)F}{2\sqrt{2}\sqrt{1+B_{33}D_{33}}(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)\sqrt{\omega}} - \frac{i(1+L\alpha_2)}{2(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)}; \\
 C_3 &= \frac{\alpha_2 B_{33} D_{33} F}{2(1+B_{33}D_{33})^{3/2}(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)}; \\
 C_4 &= -\frac{\alpha_2 B_{33} D_{33} F}{2(1+B_{33}D_{33})^{3/2}(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Для температуры θ и перемещений U_3 с точностью до членов порядка ω находим

$$\begin{aligned}
 \theta &= F \frac{\alpha_2(L-x_3)+1}{\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2} - \frac{i(1+B_{33}D_{33})F\omega}{6(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} \times \\
 &\times \left(\alpha_2 x_3^3 - 3(1+L\alpha_2)x_3^2 + \frac{2L_1(3+3L\alpha_2+L^2\alpha_2^2)(\alpha_1 x_3+1)}{(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} \right); \\
 U_3 &= -\frac{2(L-x_3)+\alpha_2(L-x_3)^2}{2(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} B_{33}F + \\
 &+ \frac{i(1+B_{33}D_{33})B_{33}FL^2\omega}{24(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)^2} \times \\
 &\times \left(L^3\alpha_1\alpha_2^2 + 5L^2\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) + 4L(2\alpha_1+5\alpha_2) + 24 \right) + \\
 &+ \frac{i(1+B_{33}D_{33})B_{33}F\omega}{24(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} \left(-\alpha_2 x_3^4 + 4(1+L\alpha_2)x_3^3 - \right. \\
 &\left. - \frac{4L(3+3L\alpha_2+L^2\alpha_2^2)(\alpha_1 x_3^2+2x_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} \right).
 \end{aligned}$$

Окончательно с учётом (4), переходя к действительной форме, имеем

$$\begin{aligned}
 T(x_3, t) &= 2F \frac{\alpha_2(L-x_3)+1}{\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2} \cos \omega t + \\
 &+ \frac{(1+B_{33}D_{33})F\omega}{3(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} \left(\alpha_2 x_3^3 - 3(1+L\alpha_2)x_3^2 + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left. + \frac{2L_1(3+3L\alpha_2+L^2\alpha_2^2)(\alpha_1 x_3+1)}{(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} \right) \sin \omega t; \\
 u_3(x_3, t) &= -\frac{2(L-x_3)+\alpha_2(L-x_3)^2}{(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} B_{33}F \cos \omega t - \\
 &- \frac{(1+B_{33}D_{33})B_{33}FL^2\omega}{12(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)^2} \left(L^3\alpha_1\alpha_2^2 + 5L^2\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) + \right. \\
 &+ 4L(2\alpha_1+5\alpha_2) + 24 \left. \right) \sin \omega t + \frac{(1+B_{33}D_{33})B_{33}F\omega}{12(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} \times \\
 &\times \left(\alpha_2 x_3^4 - 4(1+L\alpha_2)x_3^3 + \right. \\
 &\left. + \frac{4L(3+3L\alpha_2+L^2\alpha_2^2)(\alpha_1 x_3^2+2x_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} \right) \sin \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Сравнительный анализ показывает очень хорошее совпадение численного и приближённого решений, что можно увидеть на графиках (рис. 2 и 3).

На рисунках представлены поля температур внутри пластины: рис. 2 — приближённое решение, рис. 3 — точное решение. Сравнительный анализ проводился для частоты $\omega = 10^{-3}$ Гц.

Для решения обратной задачи воспользуемся условием (4). Имеем соответственно

$$\begin{cases} f_1(t) = T(0, t) = B + A(1 + B_{33}D_{33}); \\ f_2(t) = u_3(0, t) = DB_{33} + C(1 + B_{33}D_{33})B_{33}, \end{cases}
 \tag{16}$$

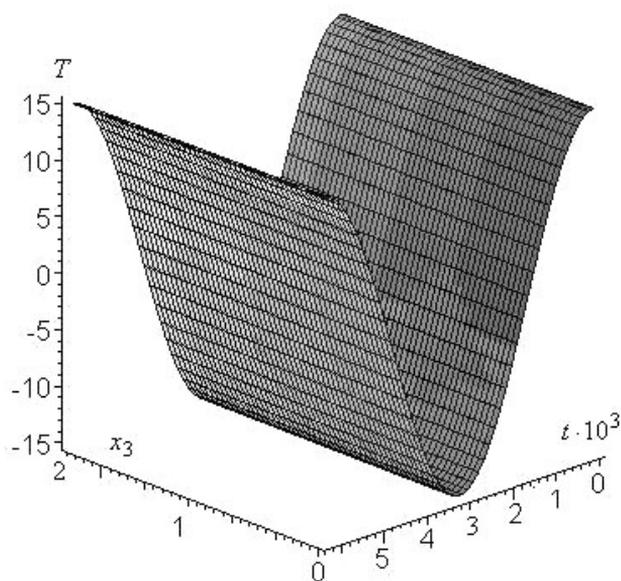


Рис. 2. Поле температур, рассчитанное по приближенным формулам (15) при частоте $\omega = 10^{-3}$ Гц

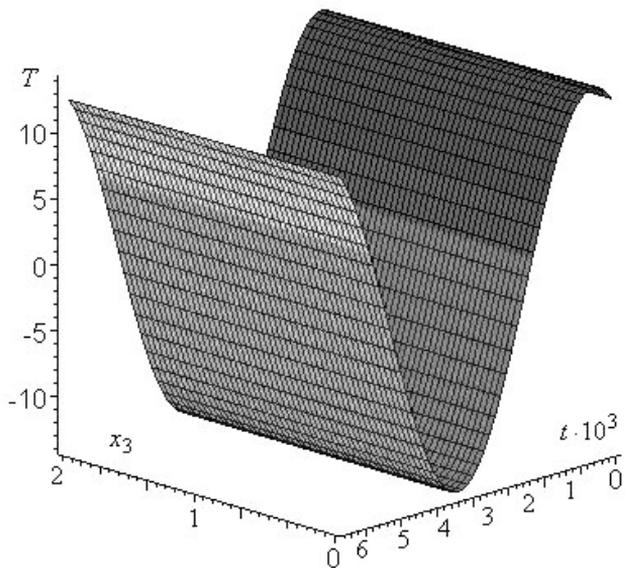


Рис. 3. Поле температур, полученное путем численного решения системы (11) при частоте $\omega = 10^{-3}$ Гц

где

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2(1 + B_{33}D_{33})(L^2\alpha_2^2 + 3 + 3L\alpha_2)LF\omega}{3(\alpha_1 + \alpha_2 + L\alpha_1\alpha_2)^2} \sin \omega t; \\
 B &= \frac{2F(\alpha_2L + 1)}{\alpha_1 + \alpha_2 + L\alpha_1\alpha_2} \cos \omega t; \\
 C &= -\frac{FL^2\omega \sin \omega t}{12(\alpha_1 + \alpha_2 + L\alpha_1\alpha_2)^2} \times \\
 &\times (L^3\alpha_1\alpha_2^2 + 5L^2\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) + 4L(2\alpha_1 + 5\alpha_2) + 24); \\
 D &= -\frac{(2 + \alpha_2L)LB_{33}F}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + L\alpha_1\alpha_2)} \cos \omega t.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, если информация о решении задана в форме (4), для нахождения коэффициентов температурного напряжения и тепловыделения при деформировании D_{33} необходимо решить систему (16).

Решение её имеет вид

$$\begin{aligned}
 B_{33} &= \frac{Af_2(t)}{C(f_1(t) - B) + AD}; \\
 D_{33} &= \frac{(f_1(t) - B - A)(C(f_1(t) - B) + AD)}{A^2f_2(t)}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Из (18) следует, что при стремлении частоты ω к нулю и невысокой погрешности измерения полученные решения сходятся соответственно к

$$\begin{aligned}
 B_{33} &= \frac{f_2(t)}{D}; \\
 D_{33} &= -\frac{D}{f_2(t)} < 0 \quad (!)
 \end{aligned} \tag{19}$$

В качестве модели ортотропной среды рассматривалась осреднённая слоистая (сталь, алюминий) среда [1, 2] со следующими эффективными безразмерными характеристиками:

$$\begin{aligned}
 B_{33} &= 0,013123; \quad D_{33} = 1,419488; \\
 \alpha_1 &= 0,300743 \cdot 10^{-8}; \quad \alpha_2 = 0,794292 \cdot 10^{-8}.
 \end{aligned}$$

В момент времени $t = 210$ с при частоте $\omega = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ были измерены приращение температуры (15,2 К) и перемещение ($-0,00137$ см) на поверхности пластины $x_3 = 0$. Обезразмеривая полученные значения, находим из (18) и (19) коэффициенты B_{33} и D_{33} :

$$\begin{aligned}
 B_{33} &= 0,013096; \\
 D_{33} &= 90,3098; \quad (\text{по формулам (18)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{33} &= 0,0131359; \\
 D_{33} &= -76,1272. \quad (\text{по формулам (19)})
 \end{aligned}$$

Как видно, значения коэффициента B_{33} , полученного по формулам (18) и (19), достаточно хорошо совпадают с точными значениями. Напротив, коэффициенты D_{33} , полученные по формулам (18) и (19), сильно отличаются друг от друга и от точного значения. Что характерно, дальнейшее увеличение точности измерения граничных полей также не приводит к желаемому результату. Данные результаты позволяют сделать вывод о том, что при малых частотах в задаче (5), (6) при дополнительном условии (4) возможно только определение коэффициента температурных напряжений.

Выводы

Выполненные расчёты позволяют сделать вывод о том, что низкочастотные колебания являются малоинформативными с точки зрения определения физико-механических характеристик среды. Несмотря на это, предложенная методика позволяет для ряда характеристик (в данном случае коэффициента температурных напряжений) построить устойчивые решения. Полученные результаты можно использовать для приближённого решения двух- и трёхмерных задач.

Обратные коэффициентные задачи термоупругости имеют широкое применение в теории неоднородных покрытий, сейсмологии, наномеханики, авиастроении и других областях. Методы определения модулей упругости, температурных напряжений и др. играют большую роль в процедуре идентификации объектов в различных областях естествознания. Представленная работа посвящена новому подходу к приоритетному исследованию в области экспериментальной механики и механики связанных полей для деформируемых тел, что особенно важно при моделировании конструкций для летательных аппаратов, работающих в условиях комплексных многофакторных воздействий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

Библиографический список

1. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
2. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твёрдого тела. — М.: Физматлит, 2007.

3. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Линейные уравнения движения термоэлектромагнитоупругой среды. Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. — Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2009. Вип. 13. Рос. та укр. мовами., с. 57-62.

4. Голубев А.С., Земсков А.В., Эрихман Н.Н. Асимптотическое разделение переменных в нестационарной задаче термоупругости для ортотропного слоя // Материалы XV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. М.: Изд-во «Типография «Парадиз». 2009. С. 63-75.

5. Моргунов Б.И. Математическое моделирование связанных физических процессов. — М.: МИЭМ, 1997.

6. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984.

7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. — М.: Издательство ЛКИ, 2007.

8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 20.11.2009