

УДК 621.438

Анализ характеристик потока между двумя вращающимися дисками в системе подвода воздуха к рабочей лопатке турбины на основе адаптированных критериев подобия

Р.А. Диденко¹, Ш.А. Пиралишвили², В.Г. Шахов³

¹ ПАО «ОДК-Сатурн», Рыбинск, 152903, Россия

² Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П.А. Соловьева, Рыбинск, 152934, Россия

³ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (Самарский университет), Самара, 443086, Россия

e-mail: roman.didenko@uec- saturn.ru; piral@list.ru; shakhov.vg@ssau.ru

DOI: 10.34759/TRT-2019-11-10-434-446

Поступила в редакцию 21.09.2019

После доработки 26.09.2019

Принята к публикации 26.09.2019

Представлены результаты выбора, адаптации критериев подобия и анализа характеристик течения закрученного потока между двумя вращающимися дисками в системе подвода воздуха к рабочей лопатке первой ступени турбины высокого давления перспективного ГТД.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, число Россби, число Рейнольдса, число Экмана, закрутка потока, обобщенный параметр турбулентного потока.

Введение

Для подвода охлаждающего воздуха к рабочим лопаткам турбины ГТД используются системы с предварительной закруткой потока в направлении вращения ротора (рис. 1). После аппарата закрутки 5 поток воздуха 6 через камеру смещения 7 поступает в радиальный диффузор 8, представляющий собой полость между диском турбины 9 и покрывным диском (дефлектором) 4, и далее к рабочей лопатке 3. Температура (1) и давление (2) торможения воздуха в относительной (вращающейся вместе с ротором) системе координат в зависимости от величины закрутки потока β_1 могут снижаться относительно соответствующих значений в абсолютной (невращающейся) системе координат. Эффект снижения температуры является характерным для систем подвода воздуха к рабочим лопаткам турбины ГТД.

$$T_{1rel}^* = T_1^* - \frac{\omega^2 r_1^2}{2C_p} (2\beta_1 - 1), \quad (1)$$

$$P_{1rel}^* = P_1^* \left(\frac{T_{1rel}^*}{T_1^*} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (2)$$

Здесь индекс «1» соответствует параметрам потока на радиусе r_1 ; индекс «rel» – параметрам потока в относительной (relative) системе координат; «*» – параметрам торможения потока; T – температура потока, К; P – давление потока, Па; ω – угловая скорость вращения диска турбины, рад/с; k – показатель адиабаты; C_p – изобарная теплоемкость, Дж/кг К; $\beta = v/(\Omega \cdot r)$ – закрутка потока; v – скорость потока в окружном (тангенциальном) направлении, м/с.

В работе основной теоретический интерес представляет течение в радиальном диффузоре 8 между двумя вращающимися дисками 4 и 9 (см. рис. 1).

В XX веке сравнительно большое число теоретических и практических работ было посвящено исследованию течения между вращающимися дисками, и все не из простого научного любопытства, а из-за необходимости широкого применения такого течения в технике. В большей части работ использована в качестве основы трансформация Кармана. С теоретической точки зрения течение между вращающимися дисками представляет собой один из немногих примеров задач, для которых уравнения Навье–Стокса имеют точное решение. Решение было найдено достаточно давно, так как течение между двумя бесконечными вращающимися с частотой ω изотермическими дисками обладает достаточно простой кинетикой и однородными граничными условиями. В такой постановке отсутствует движение потока относительно дисков, следовательно, силы трения на поток не действуют. Кинематика потока полностью описывается вращательной компонентой скорости v и центробежным ускорением, которое создает поле центробежных сил, что, в свою очередь, приводит к радиальному перераспределению давления.

При появлении трения характер течения значительно усложняется. И решение уравнений можно найти теперь только в особых случаях.

Если влияние сил инерции на вязкий поток учитывается, то в этом случае необходимо решать полные уравнения движения. Но даже в этом случае для уравнений Навье–Стокса можно найти конкретное решение, что и сделал первым Карман [1], исследуя задачу вращения бесконечного диска с частотой ω в бесконечной покоящейся жидкости. Применяя свою знаменитую трансформацию, Карману удалось привести полное уравнение движения к двум простым нелинейным дифференциальным уравнениям.

Но вот решение этих уравнений – задача совсем нетривиальная. Первым счастливым, кому удалось найти точное решение уравнений Кармана, был Кочрен [2]. Позднее уже Бэтчелор [3] и Стюардсон [4] показали возможность применения трансформации Кармана для потока между двумя вращающимися бесконечными дисками.

Структуру и характеристики турбулентного потока в полости между двумя вращающимися дисками анализируют в работах [5–22], используя следующие критерии подобия течения:

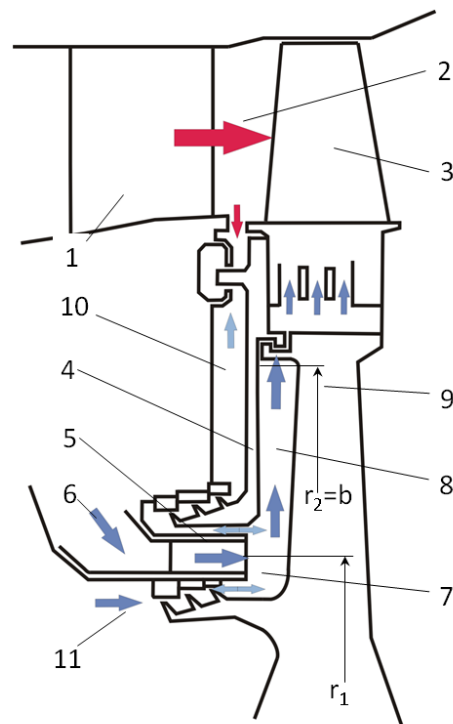


Рис. 1. Схема поперечного сечения системы подвода охлаждающего воздуха к РЛ ТВД: 1 – сопловые лопатки турбины; 2 – поток газа; 3 – рабочие лопатки; 4 – покрывной диск; 5 – аппарат закрутки; 6 – поток охлаждающего воздуха; 7 – камера смешения; 8 – диффузор между двумя вращающимися дисками; 9 – диск турбины; 10 – полость осевого зазора; 11 – разгрузочная полость

– число Рейнольдса при вращении

$$Re_{\varphi} = \rho_0 \omega b^2 / \mu_0, \quad (3)$$

– безразмерный расход воздуха

$$C_w = \dot{m} / \mu_0 b, \quad (4)$$

– обобщенный параметр турбулентного потока

$$\lambda_T = C_w / Re_{\varphi}^{0.8}, \quad (5)$$

– безразмерную переменную – закрутку потока β .

Здесь индекс «0» соответствует параметрам потока в его поперечном сечении на входе в систему (на входе в аппарат закрутки, см. рис. 1, поз. б); \dot{m} – расход на входе в систему, кг/с; b – максимальный радиус вращающегося диффузора, м; μ_0 – динамическая вязкость потока, Па·с.

При приведении уравнений количества движения к безразмерному виду выявляются критерии подобия, такие как число Россби Ro и число Экмана Ek [23, 24].

Для низких значений локального числа Рейнольдса $Re_\varphi < 2 \cdot 10^5$ поток на свободном диске будет ламинарным, переходным является локальное число Рейнольдса $Re_\varphi = 2 \cdot 10^5$, полностью турбулентным течение становится при локальном числе Рейнольдса $Re_\varphi = 7 \cdot 10^5$ [25]. Для систем подвода современных ГТД число Рейнольдса Re_φ всегда больше 10^6 , что говорит о полностью турбулентном потоке и отсутствии переходных областей по всей высоте вращающегося диффузора.

Толщина пограничного слоя на свободном диске не зависит от радиуса в случае ламинарного течения в пограничном слое

$$\delta_L = C_1 \sqrt{\nu/\omega}$$

и зависит от радиуса для турбулентного течения

$$\delta_T/b = C_2 \left[(r/b)^2 Re_\varphi \right]^{0.2},$$

где C_1, C_2 – константы [23].

Безразмерный расход, затягиваемый в пограничный слой свободного диска, для ламинарного режима равен $C_w = m_0/\mu b = 2.779 Re_\varphi^{0.5}$, для турбулентного режима – $C_w = 0.219 Re_\varphi^{0.8}$, при этом безразмерная толщина вязкого подслоя обычно оценивается величиной $y^+ \approx 5$ [26].

При отсутствии вынужденной радиальной конвекции в диффузоре, т.е. при величине скорости ядра потока $u_\infty \approx 0$ и при $\beta \ll 1$, толщина слоя Экмана δ_e (δ_e/b – относительная толщина) определяется выражением

$$\delta_e/b = 0.0983 Re_\varphi^{0.5} \left[(1-\beta)^2 r^2 Re_\varphi \right]^{0.3}.$$

При появлении радиального течения $u_\infty > 0$ и увеличении закрутки потока $\beta > 1$ происходит суперпозиция пограничных слоев (слоя Экмана и динамического пограничного слоя), и вдоль диска уже течет радиальный поток без слоя Экмана. Эффект «сдувания» слоев Экмана характерен для узких вращающихся диффузоров и для случаев, когда подаваемый в полость расход много больше того, который может теоретически быть «затянутым» в слой Экмана.

Ядро потока между вращающимися дисками движется спиралевидно по закону свободного вихря до тех пор пока $\beta \geq 1$ и/или $|u_\infty| > 0$. При определенном соотношении β и u_∞ ядро потока начинает «запирать» пограничные слои на вращающихся дисках, образуя слои Экмана.

Основными интегральными характеристиками систем подвода [5–7, 9, 10, 14, 18, 19] считаются:

– адиабатная эффективность

$$\Theta = \frac{2C_p(T_1^* - T_{2rel}^*)}{\omega^2 b^2}; \quad (6)$$

– коэффициент снижения давления

$$\zeta = (P_1^* - P_{2rel}^*)/0.5\rho_1\omega^2 b^2; \quad (7)$$

– потери мощности на прокачку охлаждающего воздуха

$$N = M_q \omega, \quad (8)$$

где M_q – момент сопротивления вращению:

$$M_q = -\int_1^b 2\pi r \tau_\varphi r dr, \quad (9)$$

индекс «1» соответствует сечению осреднения параметров на входе во вращающийся диффузор (см. рис. 1), индекс «2» – сечению осреднения параметров на выходе из вращающегося диффузора, r – радиус.

Выражение (9) может быть записано через коэффициент момента сопротивления вращению C_m в виде

$$M_q = 0.5\rho\omega^2 b^5 C_m,$$

где $C_m = -2\pi \int_1^{r_2} r^2 \tau_\varphi dr / 0.5\rho\omega^2 b^5 = f(Re_\varphi)$.

Из закона сохранения энергии для адиабатной системы затраты мощности равны скорости изменения энтальпии:

$$N = \Delta \dot{H} = Cp_2 T_2^* \dot{m}_2 - Cp_1 T_1^* \dot{m}_1.$$

Изменение адиабатной эффективности Θ чаще всего анализируют построением зависимостей: $\Theta = f(\beta)$, $\Theta = f(\beta, r)$ и $\Theta = f(r^2)$ [5–7, 9, 14, 17, 19]. При этом близкий к адиабатной эффективности параметр – перепад температур ΔT – обычно анализируют, используя функции $\Delta T = f(\lambda_T, C_w)$, $\Delta T = f(\beta, C_w)$ [6, 11].

Изменение коэффициента снижения давления ζ чаще всего анализируют с применением уравнений вида $\zeta = f(\beta)$, $\zeta = f(r)$ [6, 10, 18].

Затраты мощности N или изменение коэффициента момента сопротивления вращению C_m обычно анализируют, применяя функции $C_m = f(\beta, C_w)$, $C_m = f(\beta, Re_\varphi, \lambda_T)$, $C_m = f(Re_\varphi, y^+)$ [7, 8, 14, 16]. При этом классической является зависимость момента сопротивления вращению от числа Рейнольдса $C_m = f(Re_\varphi)$ [22, 27].

Проведение CFD моделирования течения и теплообмена в системах подвода должно сопровождаться предварительной верификацией расчетного метода сопоставлением с экспериментом. Интегральные характеристики систем подвода и их компонентов не зависят от времени, поэтому большинство расчетов выполняются в стационарной постановке. Стандартная k - ϵ модель турбулентности с применением пристеночных функций не применима для течений с низким вращательным числом Re_φ . Для больших чисел Re_φ эта модель позволяет получить приемлемые результаты. При моделировании течений в дисковых полостях чаще всего используются двухпараметрические модели турбулентности, такие как Spalart-Almaras, SST, V2F. Особое внимание уделяется сеточной дискретизации расчетного пространства.

На основе проведенного анализа сформулирована цель исследования – найти наиболее рациональные формы представления результатов количественного исследования течения во вращающемся радиальном диффузоре системы подвода охлаждающего воздуха к рабочей лопатке турбины. При этом цель считается достигнутой, если будут получены методы определения всех существенных для исследуемого процесса факторов. Ценность исследования возрастает с расширением области применимости его результатов. Степень универсальности решения будет одним из главных критериев суждения о качестве решения, что позволит считать его достаточно конкретным с обеспечением общности результатов. Увеличение степени общности полученных данных необходимо достигать замещением множества отдельных параметров совокупностью критериев подобия.

На основе сформулированной цели, поставлены задачи:

1. Подобрать минимальное, но достаточное количество критериев подобия и безразмерных переменных для анализа основных характеристик систем подвода с предварительной закруткой охлаждающего воздуха.

2. Сформулировать стратегию и провести анализ характеристик течения во вращающемся диффузоре системы подвода охлаждающего воздуха.

1. Классические и адаптированные критерии подобия.

Выбор минимально достаточного набора критериев подобия

Поток воздуха в зазоре между двумя вращающимися дисками представляет собой вынужденное турбулентное движение по спирали, при этом ему от вращающихся стенок за счет вязкости передается момент импульса. Закон сохранения массы обеспечивается «вовлечением» части воздуха из основного потока в пограничный слой. Если диски вращаются быстрее основного потока, то формирующийся пограничный слой «отбрасывается» радиально.

В зависимости от геометрии полости, расхода воздуха и угловой скорости вращения возможны два крайних режима работы полости:

а) с «доминированием» вращения стенок: в это случае весь поток, поступающий в зазор между вращающимися дисками, «запитывает» пограничные слои на противоположных стенках с образованием слоев Экмана, между которыми вращается ядро потока с отсутствием осевой и радиальной компонент скорости. При увеличении расхода поступающего воздуха этот режим превращается в режим б);

б) расход воздуха, поступающий в полость в осевом направлении, настолько велик, что его оказывается слишком много, чтобы «запитать» все пограничные слои; при этом влияние вращения стенок и связанные с этим эффекты оказывают незначительное влияние на характеристики и структуру потока. Поступающий в осевом направлении поток «прижимается» к противоположной стенке вращающейся полости, образуя мощное радиальное течение вдоль нее. При этом у противоположной стенки полости образуется рециркуляционное течение (рис. 2, б).

Теоретические модели изоэнтропного течения создаются авторами для оценки эффективности реальных систем, точные характеристики которых получают экспериментально и численно. Приближенное теоретическое решение обычно представляется в виде суммы двух частей: почти невязкое течение в пределах внутренней области «сшивается» с движением в вязком пограничном слое.

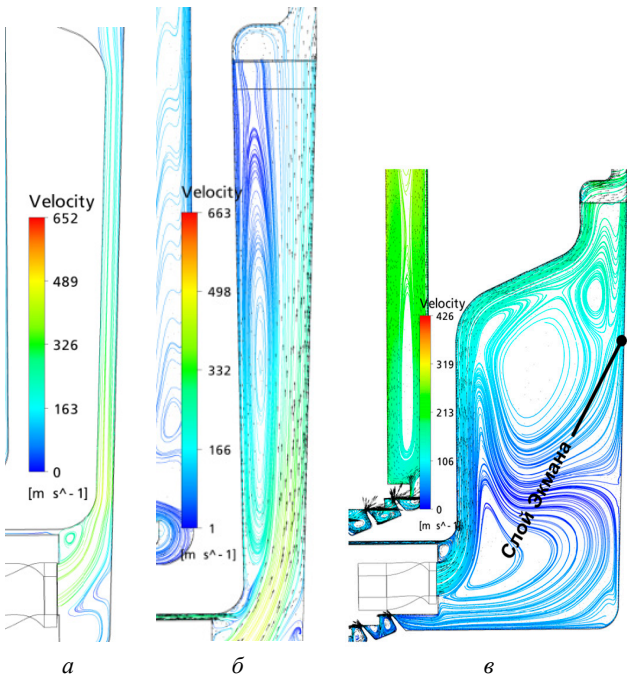


Рис. 2. Структура течения в «узком» (а), в «среднем» (б) и в «широком» (в) вращающемся диффузоре

Рассмотрим течение в вязком пограничном слое на поверхности вращающегося в неподвижном газе диска, как это сделано, например в [21]. Для несжимаемого осесимметричного потока уравнения неразрывности и уравнения движения в радиальном и окружном направлении в стационарной цилиндрической системе координат (r, φ, z) принимают вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ur) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_r}{\partial z}, \quad (11)$$

$$u \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + w \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{uv_\varphi}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial z}, \quad (12)$$

где u, v_φ, w – компоненты скорости в радиальном, окружном и осевом направлениях.

Считается, что все переменные не зависят от угла φ и времени t .

Во вращающейся с угловой скоростью Ω вокруг оси z вместе со стенками системе координат уравнения (11) и (12) принимают вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - 2\Omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_r}{\partial z}, \quad (13)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + 2\Omega u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial z}, \quad (14)$$

где $v = v_\varphi - \Omega r$ и $p_1 = p - 1/2 \rho \omega^2 r^2$.

За пределами пограничного слоя, т.е. при $z \rightarrow \infty$, отсутствуют градиенты радиальной скорости u и окружной v по z . Тогда уравнения (13) и (14) для ядра потока можно записать (компоненты скорости ядра потока будем обозначать с чертой) в следующем виде:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{v}^2}{r} - 2\omega \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial r}, \quad (15)$$

$$\bar{u} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} + 2\omega \right) = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) выполняется при $\bar{u} = 0$ или $\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} + 2\omega = 0$. Решение последнего уравнения получается интегрированием

$$\bar{v} + \omega r = \bar{v}_\varphi = \frac{c}{r}, \quad (17)$$

где $c = \text{const}$.

Выражение (17) является уравнением свободного вихря в полости. Данная технология позволяет выйти за пределы пограничных слоев $z \rightarrow \infty$ и полностью пренебречь влиянием вязкого трения на ядро потока, что является исходной точкой анализа течения во вращающемся диффузоре системы подвода.

Условие $\bar{u} = 0$ позволяет на основании уравнения неразрывности (10) говорить о «незапитываемых» пограничных слоях $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Для начального инерционного региона* течения уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности можно записать [28] во вращающейся системе координат в виде:

$$\left\{ u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right\} - 2\omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial r} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (18)$$

* Общепринято разбивать область течения во вращающемся диффузоре на регионы. Начальный регион – область сильных инерционных течений, он часто рассматривается как регион со свободным вихрем. В данном регионе поток подается на вход во вращающуюся полость и затем в центральном регионе «запитывает» пограничные слои на вращающихся стенках.

$$\left\{ u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right\} + 2\omega u =$$

$$= v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (19)$$

$$\left\{ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (20)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0. \quad (21)$$

При приведении к безразмерному виду уравнений движения (18)–(21) и с выбором характерных масштабов входящих в них величин получают соответствующий набор критериев подобия.

В рассматриваемом стационарном процессе для ядра потока важным является соотношение между составляющими радиальной u и окружной v скоростями потока в диффузоре, а также соотношение между этими скоростями и окружной скоростью диска на максимальном радиусе $\omega \cdot b$.

Скорости u , v и $\omega \cdot b$ являются величинами одного и того же порядка. Рациональным в качестве масштаба для скорости будет выбрать величину $\omega \cdot b$. В качестве линейного масштаба L выбирается максимальный радиус вращающегося диффузора b .

Уравнения (18)–(21) преобразуются к безразмерному виду (22)–(25) с учетом следующих безразмерных переменных:

- компоненты скорости: $u^* = u/\omega r$, $v^* = v/\omega r$, $w^* = w/\omega r$, давление $p^* = \bar{p}/\rho_0 \omega^2 b^2$;
- безразмерная осевая координата $s^* = z/b$,
- безразмерная радиальная координата $r^* = r/b$, где $b = r_2$.

Звездочки у безразмерных переменных не приведены с целью упрощения записи:

$$\text{Ro} \left\{ u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right\} - 2\omega u =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \text{Ek} \left(s^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (22)$$

$$\text{Ro} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right\} + 2\omega u =$$

$$= \text{Ek} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (23)$$

$$\text{Ro} \left\{ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = -\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial p}{\partial z} +$$

$$+ \text{Ek} \left(s^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (24)$$

$$\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (25)$$

где $\text{Ro} = U_0/\omega b$ – число Россби; $\text{Ek} = v/\omega b^2$ – число Экмана; U_0 – характерная радиальная скорость в начале диффузорного канала.

В фигурных скобках в левой части выражений стоят нелинейные конвективные члены, которые при преобладании вращения стенок (большие значения Re_φ и относительно небольшие значения Ro) становятся пренебрежимо малы, и уравнения (18)–(21) редуцируются до дифференциальных уравнений слоев Экмана.

Как видно из (22)–(25), число Россби – основной параметр, характеризующий свойства потока во вращающейся и в невращающейся системах координат, представляет собой отношение конвективного ускорения (оно же инерционное ускорение) к ускорению Кориолиса и позволяет дать общую оценку относительного значения нелинейных членов.

Если число Россби $\text{Ro} > 1.0$, то влияние вращения стенок мало. В случае $\text{Ro} \ll 1$ вращение стенок оказывает решающее влияние на структуру потока во вращающейся полости.

Число Экмана в уравнениях (22)–(25) определяет отношение сил вязкости к силам Кориолиса. В большинстве случаев оно очень мало, когда преимущественно проявляются эффекты вращения. Практически величина 10^{-5} является для него обычной. Число Экмана в уравнениях (20)–(23) является множителем при членах с высшими производными и может быть отнесено к формальным критериям существования пограничных слоев Экмана, в которых тангенциальная компонента скорости связана посредством вязкости с ее значением на стенке.

Для вращающихся потоков толщина пограничного слоя может быть равна $b \cdot Ek^{1/2}$, $b \cdot Ek^{1/3}$, $b \cdot Ek^{1/4}$ [29], т.е. чем больше число Экмана, тем шире пограничные слои. Концентрация действия вязкости в пограничных слоях означает, что в других местах поток ведет себя как невязкий ($Ek = 0$).

Баланс между градиентом давления и силой Кориолиса с поправками на эффект вязкости вблизи границ выступает как основа анализа. Это не означает, что другие механизмы второстепенны, но лишь то, что в систематическом изложении они стоят на втором месте.

Уравнение энергии для течения между двумя вращающимися дисками записывается в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho u r H) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w H) = -\frac{\partial}{\partial z} [q - u \tau_r - (v + \omega r) \tau_\phi], \quad (26)$$

где удельная энтальпия потока:

$$H = C_p T + \frac{1}{2} (u^2 + (v + \omega r)^2 + w^2); \quad (27)$$

q – тепловой поток в направлении, перпендикулярном стенке; τ_r и τ_ϕ – соответственно радиальная и тангенциальная компоненты сдвиговых напряжений на стенке.

Если считать поток несжимаемым, то из интегральных уравнений сохранения момента импульса можно получить, как например в [30], выражение для касательных напряжений на стенке диска:

$$\tau_{\phi,d} = -\frac{1}{2\pi r} C_w \cdot Re_\phi^{-1} \cdot \rho_0 \cdot \omega^2 \cdot b^2, \quad (28)$$

где $x = r/b$ – относительный радиус расположения входа в междисковую полость.

Из выражения (28) видно, что сдвиговые напряжения на стенке диска пропорциональны $C_w \cdot \rho_0 \cdot \omega^2 \cdot b^2$ и обратно пропорциональны r и Re_ϕ . Отметим, что слои Экмана отсутствуют на начальном инерционном участке полости, поэтому этим выражением следует пользоваться с осторожностью, так как необходимо еще учесть закрутку потока на начальном участке. Поэтому в [30] получено выражение для коэффициента момента сопротивления вращению в среднем для всей полости:

$$C_m = C_w \cdot Re_\phi^{-1} [1 - 0.833 \lambda_d - \beta_0 x^2], \quad (29)$$

где β_0 – начальная закрутка потока; $\lambda_d = f(C_w, Re_\phi)$ – функция параметров потока.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать следующие заключения.

а) Минимальным и достаточным для оценки структуры и интегральных характеристик являются два критерия подобия течения во вращающейся полости: число Россби и число Экмана.

б) Физический смысл β – безразмерная зависящая переменная, получаемая при обезразмеривании уравнений Навье–Стокса, представляющая собой соотношение между скоростью потока и скоростью вращения твердого тела при $\beta = 1$.

в) Структура пограничного слоя очень сильно зависит от локального внешнего течения (мы это видим, когда локальная закрутка потока становится меньше единицы).

г) Движение от дисков может передаваться через вязкий пограничный слой, внутри которого сила Кориолиса уравнивается вязким сдвигом и давление остается постоянным. В установившемся потоке благодаря непосредственному воздействию вязкости поток около диска вращается с возрастающей угловой скоростью. За счет преобладания силы Кориолиса над градиентом давления вдоль диска жидкость выталкивается радиально наружу, как в центробежном вентиляторе. Этот расход массы в пограничном слое должен компенсироваться небольшим притоком из невязкой внутренней области. Степень вязкой диффузии момента количества движения от стенок в ядро потока, очевидно, зависит от количества полных оборотов, при этом формируется слой Экмана, который действует на жидкость, обладающую малым угловым моментом, как сток. Как только внутри области между вращающимися дисками достигается конечное установившееся состояние $\beta = 1$ ($\beta > 1$), слой разрушается.

На практике независимые переменные, входящие в число Россби, в явном виде не определены, поэтому удобнее вместо числа Россби $Ro = U_0/\omega L = \bar{W}/\omega r$ использовать безразмерный расход воздуха через полость: $C_w = \dot{m}/\mu_0 b$: учитывая, что среднемассовая расходная скорость $\bar{W} = Q/\pi r^2$, получим $Ro = Q/\pi \omega r^3 = C_w \nu b/\pi \omega r^3$, где $C_w = Q/\nu b$, а Q – объемный расход, или $C_w = \dot{m}/\mu_0 b$, где \dot{m} – массовый расход воздуха.

Вместо числа Экмана удобнее пользоваться обратной величиной – числом Рейнольдса при вращении $Re_\phi = \rho_0 \omega b^2 / \mu_0$, где индекс «0» соответствует параметрам потока на входе в систему, \dot{m} – расход на входе в систему. Так как вращательное число Re_ϕ обратно пропорционально числу Экмана Ek , то, следовательно, чем больше число Re_ϕ , тем тоньше пограничные слои.

Комплексный анализ течения удобно проводить при помощи обобщенного параметра турбулентного потока λ_T , который объединяет безразмерный расход C_w через полость и вращательное число Рейнольдса Re_ϕ :

$$\lambda_T = C_w / Re_\phi^{0.8}. \quad (30)$$

2. Формулировка стратегии анализа

Так как все основные интегральные параметры строятся относительно закрутки потока β , то первый принципиальный момент для течения во вращающемся диффузоре – это распределение β по радиусу в зависимости от начальной закрутки (изоэнтропной или реальной). После построения такого графика необходимо провести сравнение с распределением β по радиусу, полученного из предположения о свободном вихре β_{free} (free vortex) и о твердом теле β_{solid} (solid body). После построения графика видно, что есть отличия реальной закрутки от закрутки β_{free} и тем более от β_{solid} . Степень этого различия определяется степенью влияния вязкого взаимодействия/невзаимодействия потока воздуха с вращающимися стенками (слои Экмана или инерционные пограничные слои) и оценивается при помощи Re_ϕ , C_w и λ_T . На практике изменение параметров потока в полости взаимосвязано, поэтому сложно построить изолированные функции $\beta = f(Re_\phi)$ и $\beta = f(C_w)$. Выходом в данной ситуации может быть построение 3D-функции $\beta = f(Re_\phi, C_w)$. Для «сворачивания» 3D-функции в двумерное пространство удобно ввести комбинированный параметр подобия, например λ_T , и анализировать $\beta = f(\lambda_T)$.

Изменение полной внутренней энергии (24) может происходить из-за притока тепла извне q (в нашем случае $q = 0$) или за счет трения потока о стенки $u\tau_r + (v + \Omega r)\tau_\phi$, при этом вне зависимости от того отстает поток или обгоняет

диск, т.е. от модуля относительной окружной скорости $|v|$. Это приводит к дилемме: относительно чего строить графики и анализировать адиабатную эффективность Θ . Для ответа на данный вопрос остановимся подробнее на понятии адиабатной эффективности.

В соответствии с первым законом термодинамики для адиабатной системы работа потока при переходе его из точки 1 (вход во вращающийся диффузор) в точку 2 (выход из вращающегося диффузора) равна изменению его полной энтальпии:

$$C_p (T_1^* - T_2^*) = \omega (r_1 v_1 - r_2 v_2). \quad (31)$$

Если предположить, что течение представляет собой движение по закону свободного вихря,

то $r_1 v_1 = r_2 v_2$, $\beta_2 = \beta_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}$. Учитывая связь абсолютной и относительной температуры

$$T_2^* = T_{2rel}^* + \frac{\omega^2 r_2^2}{2C_p} (2\beta_2 - 1), \quad \text{из выражения (31)}$$

можно получить:

$$\frac{2C_p (T_1^* - T_{2rel}^*)}{\omega^2 r_2^2} = 2\beta_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} - 1. \quad (32)$$

Левую часть выражения (32) принято называть адиабатной эффективностью Θ , которая в случае свободного вихря в полости зависит только от начальной закрутки и квадрата отношения радиусов:

$$\Theta = \frac{2C_p (T_1^* - T_{2rel}^*)}{\omega^2 r_2^2}. \quad (33)$$

Адиабатическая эффективность Θ – это удобный параметр, так как при его расчете используется абсолютная температура охлаждающего воздуха на входе T_1^* , которая напрямую зависит от основных параметров режима двигателя. Как следствие, если мы знаем адиабатическую эффективность Θ , геометрические характеристики системы и основные параметры режима, то для любого двигателя мы можем легко определить температуру охлаждающего воздуха на входе в рабочую лопатку турбины с учетом допущения о свободном вихре во вращающемся диффузоре. Поэтому в настоящем исследовании будем анализировать зависимость $\Theta = f(\beta_1, \lambda_T)$, где λ_T будет отвечать за влияние вязких пограничных слоев на течение,

и сравнивать с идеальной адиабатической эффективностью $\Theta_{free\ vortex}$, полученной из предположения течения по закону свободного вихря

$$\Theta_{free\ vortex} = 2\beta_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} - 1.$$

Коэффициент снижения давления $\zeta = (P_1^* - P_{2rel}^*) / \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 r_2^2$ представляет собой безразмерную форму неизвестной переменной (перепада давления), отнесенную к динамическому напору. Масштабом отнесения служит величина динамического напора $\frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 r_2^2$, вычисленная по окружной скорости на периферии вращающегося диффузора. Коэффициент снижения давления ζ еще называют числом Эйлера [31]. Так же как и для адиабатной эффективности, анализ проводится в зависимости от начальной закрутки и числа Рейнольдса или обобщенного параметра турбулентного потока $\zeta = f(\beta_1, Re_\varphi)$ или $\zeta = f(\beta_1, \lambda_T)$.

3. Анализ результатов расчетов

При осевом подводе газ прижимается к диску по потоку, а у противоположного диска начинает отставать, поэтому силы Кориолиса увлекают его вниз, и в зазоре между вращающимися дисками возникает циркуляционное течение (рис. 2, б).

При достаточно малой ширине вращающегося диффузора пограничные слои на противоположных поверхностях дисков сливаются, и действие вязких сил распространяется на всю расчетную область – это искусственно созданное ламинарное течение при $Re_\varphi > 10^6$ (см. рис. 2, а).

При движении воздуха к рабочей лопатке турбины в зазоре между дисками при закрутке потока $\beta = 1$, силы Кориолиса определяются только радиальной (она же азимутальная) компонентой скорости u и перпендикулярны ей. Если поток отстает от диска или обгоняет его ($\beta \neq 1$), то направление действия силы Кориолиса меняется, но всегда остается перпендикулярным направлению вектору скорости в относительном движении. Местным балансом или

дисбалансом центробежной силы $m\omega^2 r$ и силы Кориолиса $2m\omega v$ объясняются картины течения в системе подвода с «широким» вращающимся диффузором (рис. 2, в).

На основе формулировки стратегии анализа построим следующие зависимости (рис. 3–10).

Из рис. 3 видно, что реальная закрутка на выходе из вращающегося диффузора β_2 всегда выше закрутки, полученной из предположения о свободном вихре $\beta_{2\ free\ vortex}$, при этом чем более инерционный поток на входе во вращающийся диффузор, тем меньше влияние пограничных слоев и, соответственно, тем ближе закрутка на выходе к закрутке $\beta_{2\ free\ vortex}$. Из графика на рис. 3 видно, что течение находится в автомодельной по Re_φ области.

На рис. 4 видно, что обобщенный параметр турбулентного потока λ_T определяет степень инерционности потока и, соответственно, степень влияния вязких пограничных слоев. При увеличении λ_T от 0.4 до 1 поток в полости все больше напоминает свободный вихрь.

Затекание горячего газа (рис. 5) из полости осевого зазора (см. рис. 1, поз. 10) или из разгрузочной полости (см. рис. 1, поз. 11) критически снижает адиабатную эффективность системы подвода относительно адиабатического варианта без утечек или затекания. Re_φ и C_w не влияют на адиабатную эффективность, и изменение температуры в полости происходит ввиду относительного торможения потока по закону свободного вихря.

При увеличении числа Re_φ (рис. 6, 7) коэффициент снижения давления в полости вращающегося диффузора ζ снижается, т.е. давление на выходе из вращающегося диффузора P_{2rel}^* увеличивается.

Потери мощности N (рис. 8) турбины двигателя, связанные с течением во вращающемся диффузоре, увеличиваются с увеличением C_w и уменьшаются с увеличением начальной закрутки β_1 .

В рабочем диапазоне закруток потока $0.8 < \beta_1 < 1.5$ при безразмерном расходе воздуха $2.79 \cdot 10^5 < C_w < 5.16 \cdot 10^5$ (рис. 9, 10) увеличение числа Re_φ приводит к снижению потерь мощности N турбины двигателя, связанных с прокачкой охлаждающего воздуха во вращающемся диффузоре системы подвода.

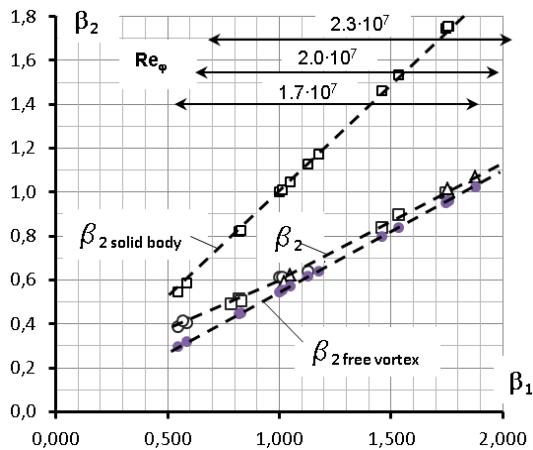


Рис. 3. Зависимость закрутки потока на выходе из полости вращающегося диффузора β_2 от начальной закрутки β_1 для диапазона $C_w = 2.79 \cdot 10^5 - 5.98 \cdot 10^5$, $Re_\phi = 1.69 \cdot 10^7 - 2.33 \cdot 10^7$

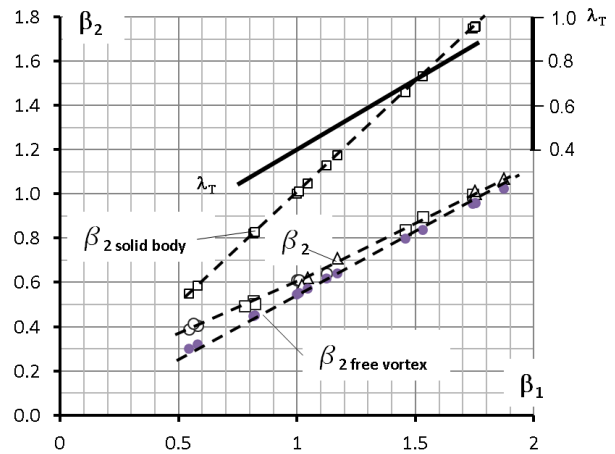


Рис. 4. Зависимость закрутки потока на выходе из полости вращающегося диффузора β_2 от начальной закрутки β_1 для диапазона $C_w = 2.79 \cdot 10^5 - 5.98 \cdot 10^5$, $Re_\phi = 1.69 \cdot 10^7 - 2.33 \cdot 10^7$ и обобщенный параметр турбулентного потока λ_T (по отдельной шкале)

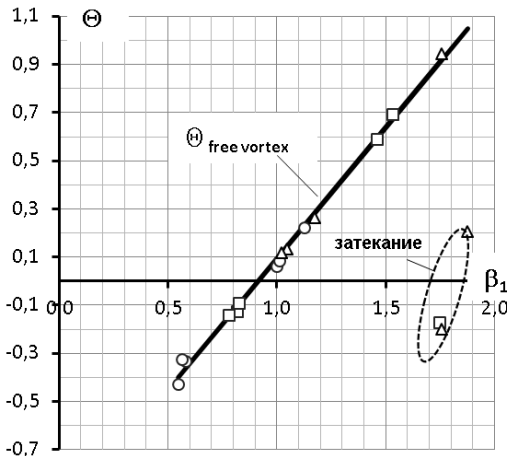


Рис. 5. Зависимость адиабатной эффективности полости вращающегося диффузора Θ от начальной закрутки β_1 для диапазона $C_w = 2.79 \cdot 10^5 - 5.98 \cdot 10^5$, $Re_\phi = 1.69 \cdot 10^7 - 2.33 \cdot 10^7$

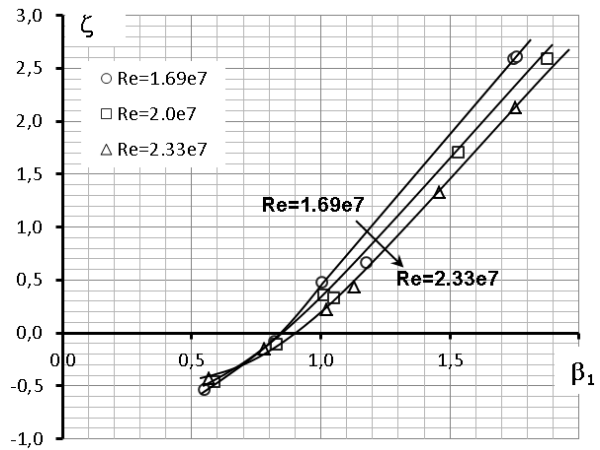


Рис. 6. Зависимость коэффициента снижения давления в полости вращающегося диффузора ζ от начальной закрутки β_1 для диапазона $C_w = 2.79 \cdot 10^5 - 5.98 \cdot 10^5$, $Re_\phi = 1.69 \cdot 10^7 - 2.33 \cdot 10^7$

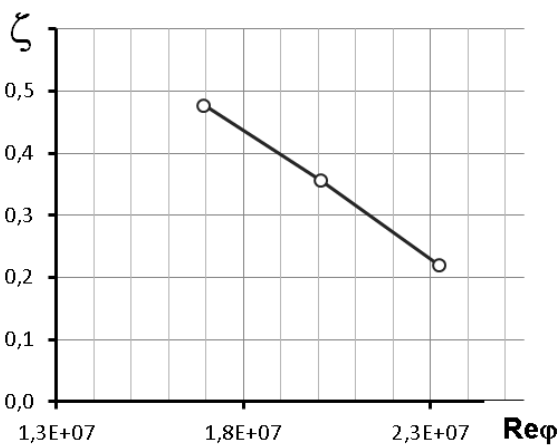


Рис. 7. Зависимость коэффициента снижения давления от числа Рейнольдса Re_ϕ при постоянной начальной закрутке потока $\beta_1 \approx 1$

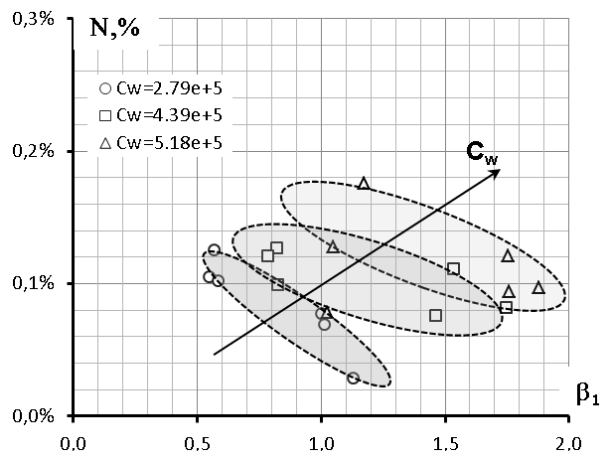


Рис. 8. Потери мощности N турбины двигателя, связанные с течением во вращающемся диффузоре в зависимости от начальной закрутки β_1 для диапазона $C_w = 2.79 \cdot 10^5 - 5.98 \cdot 10^5$

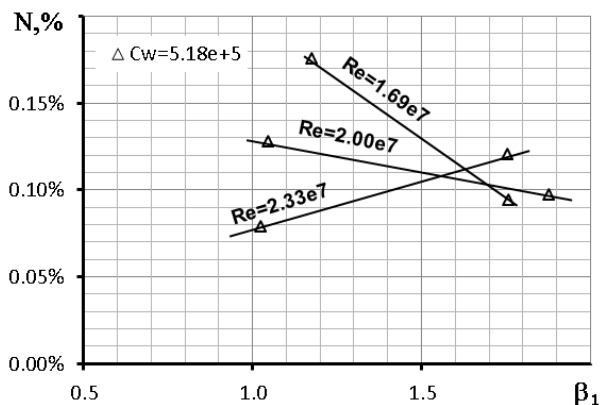


Рис. 9. Влияние числа Рейнольдса Re_ϕ на потери мощности N турбины двигателя при $C_w = 5.18 \cdot 10^5$

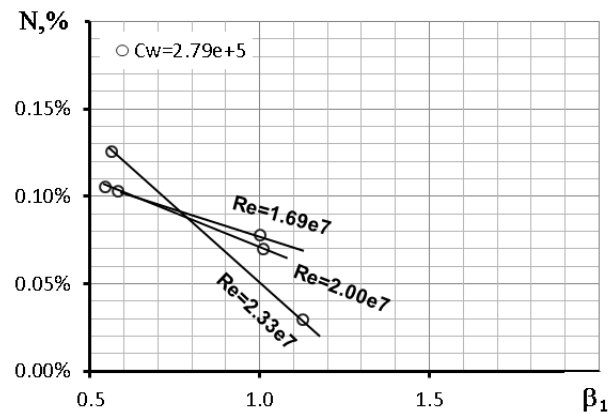


Рис. 10. Влияние числа Рейнольдса Re_ϕ на потери мощности N турбины двигателя при $C_w = 2.79 \cdot 10^5$

Выводы

1. Проведен анализ литературы по теме течения охлаждающего воздуха во вращающемся диффузоре системы подвода охлаждающего воздуха к рабочей лопатке турбины.

2. На основании дифференциальных уравнений движения в зазоре между двумя вращающимися дисками проведен анализ влияния критериев подобия Ro и Ek на характеристики течения. Проведена адаптация критериев подобия для использования в прикладном исследовании.

3. На основании анализа литературы, дифференциальных уравнений движения и уравнения энергии сформулирована стратегия анализа интегральных характеристик потока во вращающемся диффузоре системы подвода.

4. На основании результатов численного моделирования проведен анализ влияния адаптированных критериев подобия течения и безразмерных зависимых переменных на основные интегральные характеристики потока, в ходе которого удалось подтвердить выдвинутые ранее предположения.

5. Как известно, при увеличении Re_ϕ происходит эволюция свойств течения – непрерывное уменьшение роли сил внутреннего трения в формировании потока с соответствующим ослаблением влияния Re_ϕ как критерия. Поэтому полученные результаты, говорящие о слабом влиянии Re_ϕ на структуру и характеристики потока, являются вполне обоснованным.

6. Использование теории подобия при представлении результатов анализа данных о физических свойствах изучаемого процесса течения охлаждающего воздуха в системе подвода его к

лопатке позволило с большей полнотой раскрыть знания, содержащиеся в результатах расчетов и найти рациональную форму их представления. Полученные результаты применимы для рассмотренного диапазона критериев подобия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Von Kármán Th. Über laminare und turbulente Reibung // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1921. Vol. 1. N 4. P. 233–254. <https://doi.org/10.1002/zamm.19210010401>
2. Cochran W.G. The flow due to a rotating disc // Proc. Camb. Phil. Soc. 1934. Vol. 30. N 3. P. 365–375. <https://doi.org/10.1017/S0305004100012561>
3. Batchelor K.G. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow // Q.J. Mech. Maths. 1951. Vol. 4. N 1. P. 29–41. <https://doi.org/10.1093/qjmam/4.1.29>
4. Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. Vol. 49. N 2. P. 333–341. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004100028437>
5. Karabay H., Chen J.X., Pilbrow R., Wilson M., Owen J.M. Flow in a «cover-plate» preswirl rotor-stator system // Journal of Turbomachinery: Transactions of the ASME. 1999. Vol. 121. N 1. P. 160–166.
6. Jarzombek K., Dohmen H.J., Benra F.-K., Schneider O. Flow Analysis in Gas Turbine Pre-Swirl Cooling Air Systems – Variation of geometric parameters // ASME Paper GT2006-90445. 2006.
7. Farzaneh-Gord M., Wilson M., Owen J.M. Numerical and Theoretical Study of Flow and Heat Transfer in a Pre-swirl Rotor-Stator System // ASME Paper GT2005-68135. 2005.
8. Karabay H., Wilson M., Owen J.M. Approximate Solutions for Flow and Heat Transfer in Pre-Swirl Rotating-Disc Systems // ASME Paper 2001-GT-0200. 2001.
9. Lewis P., Wilson M., Lock G., Owen J.M. Effect of Radial Location of Nozzles on Performance of Pre-Swirl Systems // ASME Paper GT2008-50295. 2008.
10. Lewis P., Wilson M., Lock G., Owen J.M. Physical Interpretation of Flow and Heat Transfer in Pre-swirl Systems // ASME Paper GT2006-90132. 2006.
11. El-Oun Z.B., Owen J.M. Preswirl blade-cooling effectiveness in an adiabatic rotor-stator system // ASME J. Tur-

- bomachinery. 1989. Vol. 111. N 4. P. 522–529. <https://doi.org/10.1115/1.3262303>
12. **Owen J.M., Pincombe J.R., Rogers R.H.** Source-sink flow inside a rotating cylindrical cavity // *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 155. P. 233–265. <https://doi.org/10.1017/S0022112085001793>
 13. **Kakade V.U., Lock G.D., Wilson M., Owen J.M., Mayhew J.E.** Effect of Radial Location of Nozzles on Heat Transfer in Pre-swirl Cooling Systems // *ASME Paper GT2009-59090*. 2009.
 14. **Karabay H., Wilson M., Owen J. M.** Predictions of effect of swirl ratio on flow and heat transfer in rotating cavity // *Int. J. of Heat and Fluid Flow*. 2001. Vol. 22. P.143–155.
 15. **Louis J.F., Salhi A.** Turbulent flow velocity between rotating co-axial disks of finite radius // *ASME J. of Turbomachinery*. 1989. Vol. 111. N 3. P. 333–340.
 16. **Pett A., Coren D., Childs P.** Model Validation for a Shrouded Rotor-Stator System with Superposed Cooling and Static Protuberances // *ASME Paper GT2007-27744*. 2007.
 17. **Chew J.W., Ciampoli F., Hills N.J., Scanlon T.** Pre-swirled Cooling Air Delivery System Performance // *ASME Paper GT2005-68323*. 2005.
 18. **Yan Y, Gord M.F., Lock G.D., Wilson M., Owen J.M.** Fluid dynamics of a pre-swirl rotor-stator system // *ASME J. Turbomachinery*. 2003. Vol. 125. N 4. P. 641–647. <https://doi.org/10.1115/1.1578502>
 19. **Owen J.M.** Air-cooled gas-turbine discs: a review of recent research // *Int. Journal of Heat and Fluid Flow*. 1988. Vol. 9. N 4. P. 354–365.
 20. **Owen J.M.** An approximate solution of the flow between a rotating and stationary disk // *ASME J. Turbomachinery*. 1989. Vol. 111. N 3. P. 323–332.
 21. **Ong C.L., Owen J.M.** Boundary-layer flows in rotating cavities // *ASME J. Turbomachinery*. 1989. Vol. 111. N 3. P. 341–348.
 22. **Ong C.L., Owen J.M.** Computation of the flow and heat transfer due to the rotating disc // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. 1991. Vol. 12. N 2. P. 106–115.
 23. **Childs P.R.N.** *Rotating Flow*. Elsevier Science, 2011. 416 p.
 24. **Owen J.M., Rogers R.H.** *Flow and Heat Transfer in Rotating-Disc Systems. Vol. 2: Rotating cavities*. Wiley, New York, 1995. 295 p.
 25. **Shevchuk I.V.** *Modelling of Convective Heat and Mass Transfer in Rotating Flows*. Springer, International Publishing Switzerland, 2016. 235 p.
 26. **Shevchuk I.V.** *Convective Heat and Mass Transfer in Rotating Disk Systems*. Springer, 2009. 236 p. <http://www.springer.com/978-3-642-00717-0>
 27. **Owen J.M., Pincombe J.R.** Vortex breakdown in a rotating cylindrical cavity // *J. Fluid Mech.* 1979. Vol. 90. N 1. P. 109–127. <https://doi.org/10.1017/S0022112079002093>
 28. **Owen J.M., Pincombe J.R.** Velocity measurements inside a rotating cylindrical cavity // *J. Fluid Mech.* 1980. Vol. 99. N 1. P. 111–127. <https://doi.org/10.1017/S0022112080000547>
 29. **Greenspan H.P.** *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press, 1968. 327 p.
 30. **Chew J.W., Rogers R.H.** An integral method for the calculation of turbulent forced convection in a rotating cavity with radial outflow // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. 1988. Vol. 9. N 1. P. 37–48.
 31. **Гухман А.А.** *Введение в теорию подобия*. М.: Высшая школа, 1973. 296 с.

Characteristics analysis of a flow between two rotating discs in the air supply system to the turbine rotor blade based on adapted similarity criteria

R.A. Didenko¹, Sh.A. Piralishvili², V.G. Shahov³

¹ PJSC «UEC-Saturn», Rybinsk, 152903, Russia

² Soloviev Rybinsk State Aviation Technical University, Rybinsk, 152934, Russia

³ Samara University, Samara, 443086, Russia

e-mail: roman.didenko@uec-saturn.ru; piral@list.ru; shakhov.vg@ssau.ru

The article presents the results of theoretical study and computation of the adiabatic flow in the cooling air feeding system with a pre-swirl. The pre-swirled cooling air is being supplied through the stationary swirling unit, flows upward along the radius in the rotating cavity, formed by the walls of the rotating disk and disk-deflector, and leaves the rotating cavity through the channels in the disk, meant for feeding air to the turbine blade. Based on the non-dimensional form of momentum equations of the flow in rotating cavity, it is demonstrated that there are two similarity criteria, which can control the turbulent flow in the rotating cavity. Ekman and Rossby numbers relate to them. From the practical viewpoint, it is more convenient to use rotational Reynolds number Re_ϕ instead Ekman number, non-dimensional mass flow rate C_w instead Rossby number, and turbulent flow parameter $\lambda_T = C_w / Re_\phi^{0.8}$ for complex studies. As the flow in the system is highly pre-swirled, non-dimensional initial swirl ratio β derived while non-dimensionalizing of the momentum equations is also used in analysis. The main indices of the delivery system efficiency are non-dimensional adiabatic effectiveness Θ , loss coefficient ζ and specific power consumption of the system N . Numerical simulation was performed with commercial Ansys CFX software. To solve the Reynolds Averaged Navies-Stokes (RANS) equations a finite volume coupled algebraic multi-grid solver was used. The scheme of

the second order of accuracy was used for computations. The energy equation was solved with regard for the viscous work term. The Buoyancy effect was ignored. As the result of this work, the strategy of the flow analysis was formulated based on the dependences of main indices of the system efficiency on non-dimensional similarity criteria. According to the obtained results there is no effect of Re_ϕ and C_w on adiabatic effectiveness Θ . With increasing of Re_ϕ the loss coefficient ζ decreases. Specific power consumption of the system N increases with C_w and decreases with increasing Re_ϕ and initial swirl ratio β .

Keywords: Navier-Stokes equations, Rossby number, Reynolds number, Ekman number, flow swirl, turbulent flow parameter.

REFERENCES

1. von Kármán Th. Über laminare und turbulente Reibung. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1921, vol. 1, no. 4, pp. 233–254. <https://doi.org/10.1002/zamm.19210010401>
2. Cochran W.G. The flow due to a rotating disc. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1934, vol. 30, no. 3, pp. 365–375. <https://doi.org/10.1017/S0305004100012561>
3. Batchelor K.G. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. *Q.J. Mech. Maths.*, 1951, vol. 4, no. 1, pp. 29–41. <https://doi.org/10.1093/qjmam/4.1.29>
4. Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1953, vol. 49, no. 2, pp. 333–341. <https://doi.org/10.1017/S0305004100028437>
5. Karabay H., Chen J.X., Pilbrow R., Wilson M., Owen J.M. Flow in a «cover-plate» preswirl rotor-stator system. *Journal of Turbomachinery: Transactions of the ASME*, 1999, vol. 121, no. 1, pp. 160–166.
6. Jarzombek K., Dohmen H.J., Benra F.-K., Schneider O. *Flow Analysis in Gas Turbine Pre-Swirl Cooling Air Systems – Variation of geometric parameters*. ASME Paper GT2006-90445, 2006.
7. Farzaneh-Gord M., Wilson M., Owen J.M. *Numerical and Theoretical Study of Flow and Heat Transfer in a Pre-swirl Rotor-Stator System*. ASME Paper GT2005-68135, 2005.
8. Karabay H., Wilson M., Owen J.M. *Approximate Solutions for Flow and Heat Transfer in Pre-Swirl Rotating-Disc Systems*. ASME Paper 2001-GT-0200, 2001.
9. Lewis P., Wilson M., Lock G., Owen J.M. *Effect of Radial Location of Nozzles on Performance of Pre-Swirl Systems*. ASME Paper GT2008-50295.
10. Lewis P., Wilson M., Lock G., Owen J.M. *Physical Interpretation of Flow and Heat Transfer in Pre-swirl Systems*. ASME Paper GT2006-90132, 2006.
11. El-Oun Z.B., Owen J.M. Preswirl blade-cooling effectiveness in an adiabatic rotor-stator system. *ASME J. Turbomachinery*, 1989, vol. 111, no. 4, pp. 522–529. <https://doi.org/10.1115/1.3262303>
12. Owen J.M., Pincombe J.R., Rogers R.H. Source-sink flow inside a rotating cylindrical cavity. *J. Fluid Mech.*, 1985, vol. 155, pp. 233–265. <https://doi.org/10.1017/S0022112085001793>
13. Kakade V.U., Lock G.D., Wilson M., Owen J.M., Mayhew J.E. *Effect of Radial Location of Nozzles on Heat Transfer in Pre-swirl Cooling Systems*. ASME Paper GT2009-59090, 2009.
14. Karabay H., Wilson M., Owen J. M. Predictions of effect of swirl ratio on flow and heat transfer in rotating cavity. *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, 2001, vol. 22, pp. 143–155.
15. Louis J.F., Salhi A. Turbulent flow velocity between rotating co-axial disks of finite radius. *ASME J. of Turbomachinery*, 1989, vol. 111, no. 3, pp. 333–340.
16. Pett A., Coren D., Childs P. *Model Validation for a Shrouded Rotor-Stator System with Superposed Cooling and Static Protuberances*. ASME Paper GT2007-27744, 2007.
17. Chew J.W., Ciampoli F., Hills N.J., Scanlon T. *Pre-swirled Cooling Air Delivery System Performance*. ASME Paper GT2005-68323, 2005.
18. Yan Y, Gord M.F., Lock G.D., Wilson M., Owen J.M. Fluid dynamics of a pre-swirl rotor-stator system. *ASME J. Turbomachinery*, 2003, vol. 125, no. 4, pp. 641–647. <https://doi.org/10.1115/1.1578502>
19. Owen J.M. Air-cooled gas-turbine discs: a review of recent research. *Int. Journal of Heat and Fluid Flow*, 1988, vol. 9, no. 4, pp. 354–365.
20. Owen J.M. An approximate solution of the flow between a rotating and stationary disk. *ASME J. Turbomachinery*, 1989, vol. 111, no. 3, pp. 323–332.
21. Ong C.L., Owen J.M. Boundary-layer flows in rotating cavities. *ASME J. Turbomachinery*, 1989, vol. 111, no. 3, pp. 341–348.
22. Ong C.L., Owen J.M. Computation of the flow and heat transfer due to the rotating disc. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 1991, vol. 12, no. 2, pp. 106–115.
23. Childs P.R.N. *Rotating Flow*. Elsevier Science, 2011. 416 p.
24. Owen J.M., Rogers R.H. *Flow and Heat Transfer in Rotating-Disc Systems. Volume 2: Rotating cavities*. Wiley, New York, 1995. 295 p.
25. Shevchuk I.V. *Modelling of Convective Heat and Mass Transfer in Rotating Flows*. Springer, International Publishing Switzerland, 2016. 235 p.
26. Shevchuk I.V. *Convective Heat and Mass Transfer in Rotating Disk Systems*. Springer, 2009. 236 p. <http://www.springer.com/978-3-642-00717-0>
27. Owen J.M., Pincombe J.R. Vortex breakdown in a rotating cylindrical cavity. *J. Fluid Mech.*, 1979, vol. 90, no. 1, pp. 109–127. <https://doi.org/10.1017/S0022112079002093>
28. Owen J.M., Pincombe J.R. Velocity measurements inside a rotating cylindrical cavity. *J. Fluid Mech.*, 1980, vol. 99, no. 1, pp. 111–127. <https://doi.org/10.1017/S002211080000547>
29. Greenspan H.P. *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press, 1968. 327 p.
30. Chew J.W, Rogers R.H. An integral method for the calculation of turbulent forced convection in a rotating cavity with radial outflow. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 1988, vol. 9, no. 1, pp. 37–48.
31. Gukhman A.A. *Vvedenie v teoriyu podobiya* [Introduction to the theory of similarity]. Moscow: Visshaya Schkola, 1973. 296 p. In Russ.