

Труды МАИ. 2022. № 122
Trudy MAI, 2022, no. 122

Научная статья
УДК 533.6.01
DOI: [10.34759/trd-2022-122-09](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-09)

ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА ПРИСТЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Максим Эдуардович Березко

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
МАИ,
Москва, Россия
maxberezko@yandex.ru

Аннотация. Предложен подход к обоснованию выбора граничных условий на твёрдой поверхности для течений различной степени неравновесности. Рассмотрены различные варианты постановки граничных условий: граничные условия прилипания, граничные условия скольжения пограничного слоя, а также явное описание межмолекулярного взаимодействия молекул газа с молекулами твёрдой поверхности, путём задания функции распределения молекул по скоростям. Численные эксперименты проводятся для плоского течения Куэтта.

Ключевые слова: моментные уравнения, кинетическое уравнение, неравновесные течения, течение Куэтта, граничные условия

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, номер темы FSFF-2020-0013

Для цитирования: Березко М.Э. Влияние выбора граничных условий на результаты расчёта пристеночных течений // Труды МАИ. 2022. № 122. DOI: [10.34759/trd-2022-122-09](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-09)

INFLUENCE OF THE CHOICE OF BOUNDARY CONDITIONS ON THE RESULTS OF THE CALCULATION OF WALL MOUNTED FLOWS

Maxim E. Berezko

Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

maxberezko@yandex.ru

Abstract. Boundary conditions selection is a nontrivial task when calculating flows of high dynamic non-equilibrium. Dynamic non-equilibrium is being understood in the context of this work as a gas state, in which the velocity distribution function of molecules has significant deviations from the Maxwell distribution function. The moment models, and the moment model of the incomplete second order in particular, better known as the Navier-Stokes-Fourier model (NSF), are well reputed for the gas-dynamic parameters determining of this sort of flows. It is a well-known fact that boundary conditions of adhesion (the velocity on a solid surface is assumed to be zero), which yield the physically adequate results for both equilibrium and weakly non-equilibrium flows are being widely used for this model. With an increase in the degree of non-equilibrium (the product of the Mach number by the Knudsen number), the boundary conditions of adhesion cease to adequately

describe the flow and yield qualitatively incorrect results. Employing boundary conditions of sliding velocity and temperature jump helps expanding the NSF model application. However, under the high non-equilibrium conditions, the NSF model with sliding boundary conditions predicts a coefficient of friction above the theoretical limit.

Kinetic equations, which explicitly describe interaction of the gas with a surface, allow adequately describing this interaction. But kinetic equation application for the transition region of flows (Knudsen number $Kn \approx 1$) is rather uneconomical in terms of computing resources.

The presented article proposes recommendations for the above said models and boundary conditions application for a wide range of both Mach and Knudsen numbers. Numerical experiments were conducted on the example of the Couette flow.

Keywords: moment equations, kinetic equation, nonequilibrium flows, Couette flow, boundary conditions

Funding: the work was carried out as part of the state task of the Ministry of Education and Science of Russia, the topic number FSFF-2020-0013

For citation: Berezko M.E. Influence of the choice of boundary conditions on the results of the calculation of wall mounted flows. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. DOI: [10.34759/trd-2022-122-09](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-09)

Введение

Задачи, требующие решения в современной аэрокосмической технике, лежат в довольно широком спектре чисел Маха и чисел Кнудсена. Производство этих

критериев подобия дают количественную оценку, имеющую название «степени неравновесности».

Характерной особенностью неравновесного потока газа, является то, что энергия, как внутренних, так и поступательных степеней свободы молекул, распределена неравномерно. В пристеночных областях могут возникать нехарактерные для гидродинамического описания эффекты, например, немонотонное изменение характеристик газа вдоль обтекаемой поверхности [1].

Исследования такого рода течений на газодинамическом уровне может приводить к количественно, а в отдельных случаях к качественно неверным результатам. Это показывает несостоятельность сплошнородных подходов и соответствующих им граничных условий для исследования течений высокой неравновесности. Кинетические модели явно описывают физический процесс взаимодействия молекул газа с молекулами твёрдой поверхности, но кинетический подход крайне неэкономичен в смысле потребления вычислительных ресурсов.

Сохранить баланс в плане точности и экономичности, помогают системы моментных уравнений. В их основе лежит то или иное кинетическое уравнение, из которого при помощи функции распределения специального вида получают замкнутую систему дифференциальных уравнений, которые и называются моментными уравнениями, относительно макроскопических переменных. Такие модели одновременно помогают сократить время численных расчётов и описать молекулярные процессы, протекающие в газе.

Из-за неизвестности достаточного количества граничных условий на твердой поверхности вытекает основная трудность при постановке граничных условий для моментных уравнений. Грэд, в работе [2], основываясь на молекулярно-кинетической теории газов, впервые получил такие граничные условия, но допуская сильные упрощения. Дальнейшее исследования граничных условий для систем моментных уравнений проводились в работах [3, 4, 5].

Строго формулируются граничные условия лишь для гидродинамической модели Навье-Стокса-Фурье (НСФ), которая является системой моментных уравнений неполного второго порядка. Стоит отметить тот факт, что условиях сильной неравновесности модель сплошной среды НСФ, с соответствующими граничными условиями, существенно завышает коэффициент трения на твёрдой поверхности, что будет показано в настоящей работе.

Экспериментальные и теоретические работы (см., например, [6, 7, 8]) показывают, что размер неравновесных пристеночных зон ограничен несколькими длинами свободного пробега молекулы газа. Вне этих зон течение может считаться достаточно близким к равновесному.

Ранее автором предложена комбинированная модель течения, которая использует кинетическое уравнение в пристеночной области с кинетическими граничными условиями, а в остальной области использует модель НСФ [9, 10]. Такое комбинирование гидродинамической и кинетической моделей позволило существенно улучшить решение в пристеночной области. Особое внимание стоит

обратить на отсутствие излома в области сшивания моделей, который характерен для методов сшивания, предложенных в ряде работ, например, [11, 12].

В работе [13] показано влияние увеличения порядка гидродинамической (моментной) модели на точность получаемого решения. Сделан вывод о том, что повышение порядка не приводит к существенному улучшению точности и для практических задач достаточно использовать модель неполного 2-го порядка.

Цель настоящей работы – сравнение различных граничных условий на твёрдой стенке для гидродинамической и кинетической моделей. В качестве тестовой задачи выбрано плоское течение Куэтта, а для величины сравнения – относительный коэффициент трения. Для гидродинамической модели НСФ выбирались граничные условия прилипания и скольжения пограничного слоя. Для кинетической модели – диффузный закон отражения молекул от твёрдой стенки.

Такая постановка задачи позволит:

- Оценить адекватность граничных условий при описании неравновесных течений в широком интервале чисел Маха и чисел Кнудсена.
- Дать рекомендации при выборе граничных условий на твёрдой поверхности для обеспечения удовлетворительной точности и экономичности в широком спектре степени неравновесности газового потока.

1. Гидродинамическая и кинетическая модели течения

Модель гидродинамического приближения НСФ является системой моментных уравнений неполного 2-го порядка. В общем случае, эта система уравнений может

быть представлена в виде [14, 15] (повторяющиеся греческие подстрочные индексы подразумевают суммирование от 1 до 3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$p_{ij} = -\mu \frac{\partial u_*}{\partial u_*} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \left(1 - \frac{5 - 3\gamma}{2} h \right) \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \quad (2)$$

$$q_i = -\frac{c_p}{Pr} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

В этих выражениях:

ρ, u_i, T – плотность, скорость и термодинамическая температура газа;

$P_{ij} = p_{ij} + \delta_{ij} p$ – тензор напряжений, $T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho R}$ – удельные напряжения;

p, p_{ij} – давление и тензор неравновесных напряжений;

q_i – вектор теплового потока;

$\mu = \mu(T^S)$ – коэффициент вязкости, – свободный параметр модели;

h – свободный параметр модели, имеющий смысл отношения времени поступательно-вращательной релаксации к времени поступательно-поступательной релаксации энергии молекул, в настоящей работе принят $h = 5$;

c_v, c_p, γ, R —изохорная и изобарная теплоёмкости, показатель адиабаты, удельная газовая постоянная.

В качестве условий взаимодействия газа с твёрдой поверхностью для модели НСФ использовались условия прилипания на стенке и условия скольжения пограничного слоя [3].

В качестве кинетической модели выбрано модельное кинетическое уравнение многоатомных газов [16].

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{f^+ - f}{\tau_p} \quad (4)$$

В этом выражении:

ξ_i — молекулярная скорость (координата пространства скоростей);

$\tau_p = \frac{\mu}{p}$ — время релаксации напряжений;

$f \equiv f(t, x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon)$ — функция распределения молекул по скоростям, фазовое пространство, которой дополнено подпространством вращательной энергии молекулы ε .

После формального интегрирования по пространству вращательных энергий (4) может быть приведено к двум уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| + \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| = \frac{1}{\tau_p} \left| \frac{f_t^+ - f_t}{f_r^+ - f_r} \right|. \quad (5)$$

Здесь:

$$f_t = \int f d\varepsilon; f_r = \int \varepsilon f d\varepsilon;$$

$$f_t^+ = \frac{n}{(2\pi RT_t^+)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_\alpha c_\alpha}{2RT_t^+}\right) \left(1 + \frac{\varphi_\alpha c_\alpha}{3\rho(RT_r^+)^2} \left(\frac{c_\alpha c_\alpha}{5RT_t^+} - 1\right)\right);$$

$$f_t^+ = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} kT_r^+ f_r^+;$$

$$T_t^+ = T + \frac{5 - 3\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (T_t - T_r); T_r^+ = T - \frac{3}{2}(\gamma - 1) \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (T_t - T_r);$$

$c_i = \xi_i - u_i$ – тепловая скорость движения молекул; величина $1/Z$ представляет долю неупругих столкновений по отношению к общему числу столкновений молекул.

Для постановки граничных условий на твёрдой поверхности для кинетической модели достаточно задать закон взаимодействия молекул газа с этой поверхностью. Для настоящей работы выбран закон диффузного отражения газовых молекул с полной аккомодацией энергии. Такая постановка граничных условий адекватна физическим процессам, протекающим на поверхностях с шероховатостью [3].

2. Тестовая задача

Для сравнения значений коэффициентов трения, полученных моделей с различными граничными условиями, выбрано плоское течение Куэтта. Для такого течения существует множество исследовательских работ, как экспериментальных, так и теоретических [17, 18]. В качестве численного метода использован алгоритм

Томаса [19, 20, 21]. Ниже на рис. 1 схематически проиллюстрировано течение и система координат, используемая в работе.

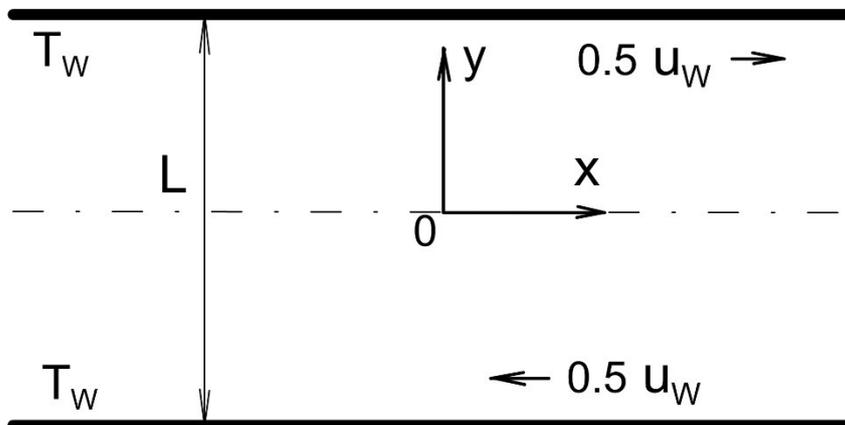


Рис. 1. Схема тестовой задачи

Две плоские бесконечные поверхности движутся в противоположных направлениях оси Ox с относительной скоростью u_w . Температура поверхностей — T_w . Плотность газа и концентрация молекул в невозмущённом течении имеют значения ρ_0 и u_0 .

Средняя длина свободного пробега молекулы в невозмущённом (неподвижном) газе:

$$\lambda_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0 \sqrt{RT_w}}$$

Числа Маха и Кнудсена определены как:

$$M = \frac{u_w}{\sqrt{\gamma RT_w}}; Kn = \frac{\mu_0}{\rho_0 \sqrt{RT_w}} \frac{1}{L}$$

здесь μ_0 – коэффициент вязкости, рассчитанный по температуре T_w .

Варьирование числами Маха и Кнудсена позволяет изучать течения различной степени неравновесности, которая определяется как произведение этих чисел.

Для удобства анализа различных граничных условий используется отношение коэффициента трения c_f к его свободномолекулярному пределу c_{fm} :

$$\frac{c_f}{c_{fm}} = 2 \frac{|P_{12}|}{\rho(2u_w)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2u_w}{\sqrt{RT_w}},$$

здесь ρ – средняя по толщине зазора плотность газа, L – расстояние между пластинами.

3. Результаты численных расчётов

Свободные параметры для моделей s , h и Z были подобраны в ранней работе [10]. На начальном этапе расчётов, для валидации и сравнения различных моделей были использованы экспериментальные значения коэффициента трения, полученные в интервале чисел Кнудсена – Kn 0.01...10 при фиксированном числе Маха $M=1.4$ [11]. Результаты этого сравнения проиллюстрированы на рис.2. Здесь и на следующих рисунках цвета соответствуют: красный – НСФ с условиями прилипания, синий – НСФ с условиями скольжения пограничного слоя, чёрный - модельное кинетическое уравнение с диффузным законом отражения молекул от поверхности.

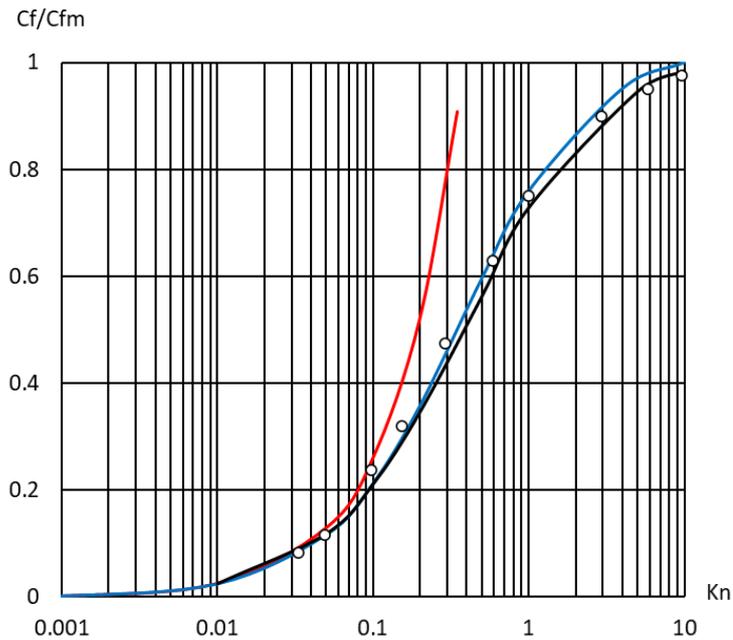


Рис. 2. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. Число Маха $M=1.4$. Кружки – экспериментальные данные [11].

Сравнение зависимостей коэффициента трения от числа Кнудсена показывает физическую несостоятельность модели НСФ с граничными условиями прилипания при росте числа Кнудсена. Удовлетворительное совпадение с экспериментом даёт модель НСФ с условиями скольжения пограничного слоя. Однако при высоких значениях степени неравновесности течения, величины отношений коэффициентов трения выше теоретического предела, что, очевидно, не верно.

Далее показаны результаты расчётов отношений коэффициентов трения различными моделями для дозвуковых, транзвуковых, сверхзвуковых и гиперзвуковых чисел Маха, в широком диапазоне чисел Кнудсена.

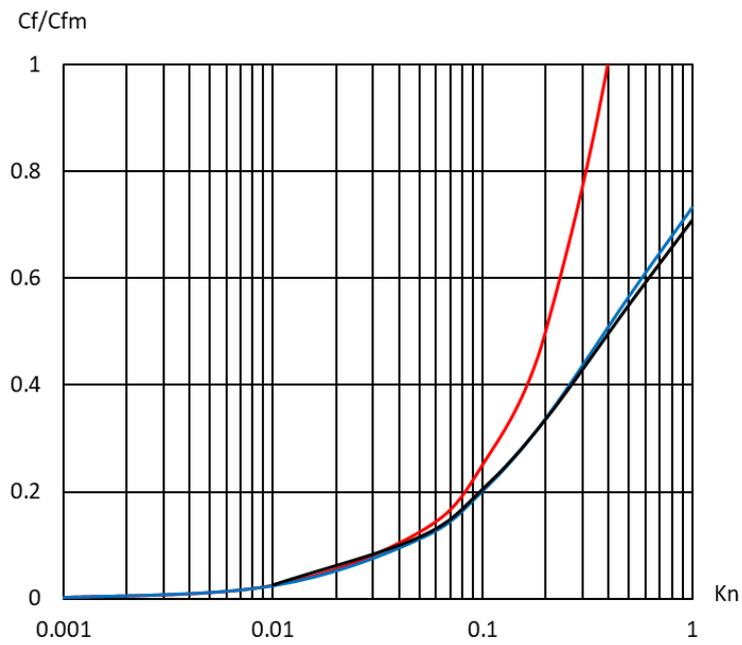


Рис. 3. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. $M=0.1$

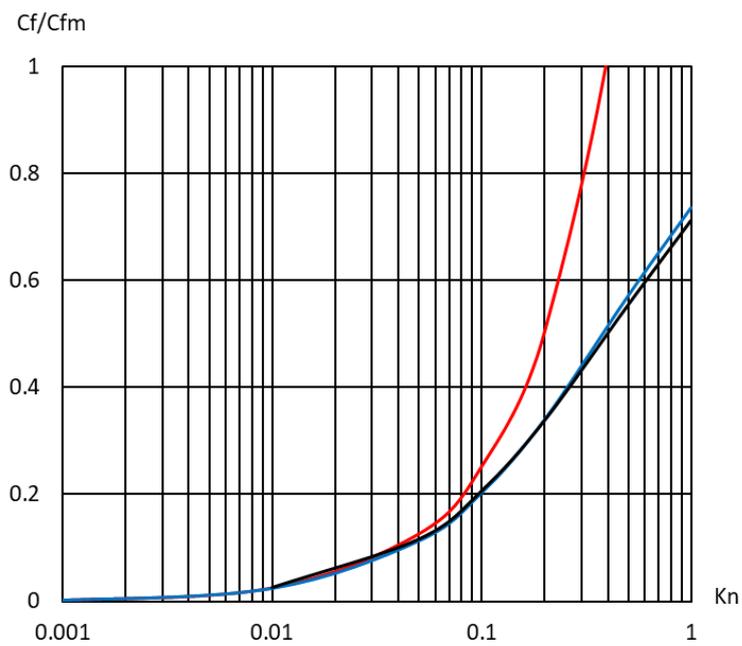


Рис. 4. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. $M=0.5$

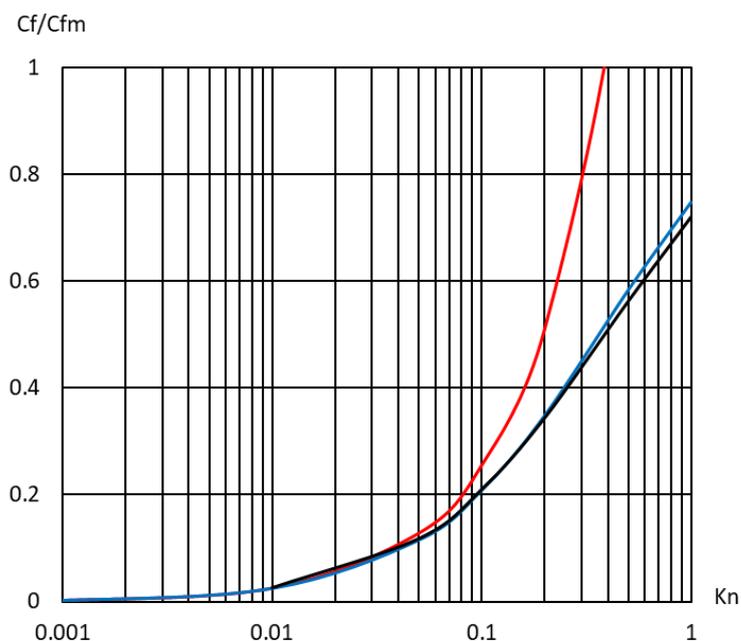


Рис. 5. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. $M=1$

На приведённых выше иллюстрациях, показаны графики зависимости отношения коэффициентов трения от числа Кнудсена для дозвуковых ($M=0.1, 0.5$) и трансзвуковых ($M=1$) чисел Маха. Из иллюстраций можно заметить, что для малых чисел Кнудсена значения коэффициентов для всех моделей практически совпадают. Это объясняется тем, что при малых числах Кнудсена модель НСФ теоретически обоснована. С увеличением числа Кнудсена модель НСФ с граничными условиями прилипания имеет наибольшее отклонение от кинетического решения, которое можно считать эталонным. Модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя имеет удовлетворительное совпадение со значениями, полученными с помощью кинетической модели, даже при высоких числах Кнудсена.

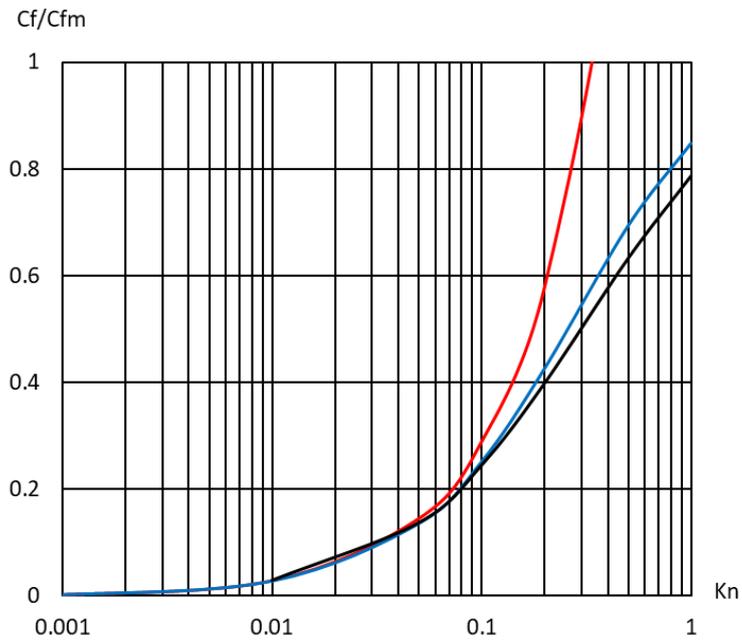


Рис. 6. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. $M=3$.

Из рис. 6 видно, что повышении числа Маха до сверхзвуковых значений не дает преимуществ кинетическим граничным условиям для течений с малым числом Кнудсена. Однако, для переходных течений заметное отклонение начинает показывать и модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя.

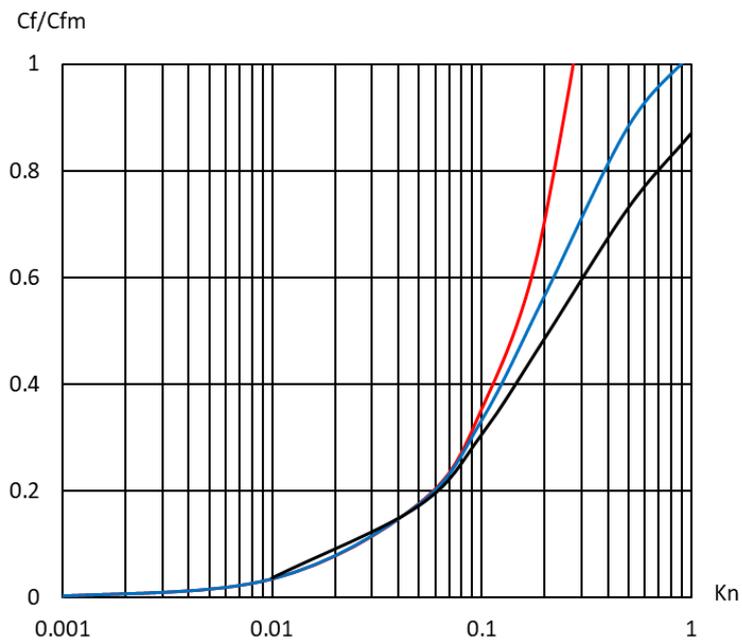


Рис. 7. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. $M=5$.

Для течений разреженного газа с гиперзвуковыми скоростями, физически адекватные величины для отношений коэффициентов трения дает лишь кинетическая модель с описанием взаимодействия газа с твёрдой поверхностью на молекулярном уровне, что показано на рис. 7. Для высоких чисел Кнудсена модель НСФ с граничными условиями скольжения погранслоя даёт значения отношения коэффициентов трения выше значения теоретического предела, что является физически неверным.

Заключение

Результаты расчетов коэффициента трения показывают:

- граничные условия прилипания могут быть использованы при $Kn < 0.1$;
- граничные условия скольжения погранслоя применимы для сверхзвуковых течений до $Kn < 1$, и для гиперзвуковых течений до $Kn < 0.1$.

В остальных областях, определяемых числами Маха и Кнудсена, целесообразно использовать комбинированные кинетико-гидродинамические модели [10, 11, 22].

Список источников

1. Выонг Ван Тьен, Горелов С.Л., Русаков С.В. Эффекты немонотонности аэродинамических характеристик пластины в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112844>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-9](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-9)
2. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов // Механика. 1952. № 4. С. 71-97.

3. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967. - 440 с.
4. Баранцев Р.Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. - М.: Наука, 1975. – 343 с.
5. Сакабеков А.С. Начально-краевые задачи для систем моментных уравнений Больцмана в произвольном приближении // Математический сборник. 1992. Т. 183. № 9. С. 67-88.
6. Becker M., Boyland D.E. Flow field and surface pressure measurements in the fullymerged and transition flow regimes on a cooled sharp flat plate // Rarefied Gas Dynamics, Suppl. 4, 1967, vol. 2, pp. 993 – 1014.
7. Tannehill J.C., Mohling R.A., Rakich J.V. Numerical computation of the hypersonicrarefied flow near the sharp leading edge of a flat plate // AIAA Journal, 1973, URL: <https://doi.org/10.2514/6.1973-200>
8. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Решетникова Ю.Г., Смотрова Л.В. Условия возникновения и величина эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатой смеси газов // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=83571>
9. Березко М.Э., Никитченко Ю.А., Тихоновец А.В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80922>
10. Никитченко Ю.А., Попов С.А., Тихоновец А.В. Комбинированная кинетико-гидродинамическая модель течения многоатомного газа // Математическое моделирование. 2019. Т. 31. № 2. С. 18-32.

11. Alofs D.J., Springer G.S. Cylindrical Couette flow experiments in the transition regime // *The Physics of Fluids*, 1971, vol. 14, no. 2, pp. 298-305.
12. P. Degond, S. Jin, L. Mieussens. A smooth transition model between kinetic and hydrodynamic equations // *Journal of Computational Physics*, 2005, vol. 209 (2), pp. 665–694. DOI:[10.1016/j.jcp.2005.03.025](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.025)
13. Березко М.Э., Никитченко Ю.А. Сравнение комбинированных кинетико-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта // *Труды МАИ*. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112842>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-8](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-8)
14. Никитченко Ю.А. Модели первого приближения для неравновесных течений многоатомных газов // *Труды МАИ*. 2014. № 77. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=52938>
15. Никитченко Ю.А. Модели неравновесных течений. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.
16. Никитченко Ю.А. Модельное кинетическое уравнение многоатомных газов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017. Т. 57. № 11. С. 1882–1894.
17. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // *Труды МАИ*. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102091>
18. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. - М.: Машиностроение, 1977. – 184 с.

19. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. – М.: Мир, 1991. Т. 1. – 502с.
20. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. Т. 1. – 384 с.
21. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Численные методы газовой динамики. – М.: Высшая школа, 1987. – 232 с.
22. Crouseilles N., Degond P., Lemou M. A hybrid kinetic/fluid model for solving the gas dynamics Boltzmann–BGK equation // Journal of Computational Physics, 2004, vol. 199, pp. 776 – 808. DOI:[10.1016/j.jcp.2004.09.006](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.09.006)

References

1. Vyong Van T'en, Gorelov S.L., Rusakov S.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112844>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-9](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-9)
2. Gred G. *Mekhanika*, 1952, no. 4, pp. 71-97.
3. Kogan M.N. *Dinamika razrezhennogo gaza* (Rarefied gas dynamics), Moscow, Nauka, 1967, 440 p.
4. Barantsev R.G. *Vzaimodeistvie razrezhennykh gazov s obtekaemyimi poverkhnostyami* (Interaction of rarefied gases with streamlined surfaces), Moscow, Nauka, 1975, 343 p.
5. Sakabekov A.C. *Matematicheskii sbornik*, 1992, vol. 183, no. 9, pp. 67 – 88.
6. Becker M., Boyland D.E. Flow field and surface pressure measurements in the fullymerged and transition flow regimes on a cooled sharp flat plate, *Rarefied Gas Dynamics, Suppl. 4*, 1967, vol. 2, pp. 993 – 1014.

7. Tannehill J.C., Mohling R.A., Rakich J.V. Numerical computation of the hypersonic rarefied flow near the sharp leading edge of a flat plate, *AIAA Journal*, 1973, URL: <https://doi.org/10.2514/6.1973-200>
8. Kuznetsov M.M., Kuleshova Yu.D., Reshetnikova Yu.G., Smotrova L.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=83571>
9. Berezko M.E., Nikitchenko Yu.A., Tikhonovets A.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80922>
10. Nikitchenko Yu.A., Popov S.A., Tikhonovets A.V. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2019, vol. 31, no. 2, pp. 18-32.
11. Alofs D.J., Springer G.S. Cylindrical Couette flow experiments in the transition regime, *The Physics of Fluids*, 1971, vol. 14, no. 2, pp. 298-305.
12. P. Degond, S. Jin, L. Mieussens. A smooth transition model between kinetic and hydrodynamic equations, *Journal of Computational Physics*, 2005, vol. 209 (2), pp. 665–694. DOI:[10.1016/j.jcp.2005.03.025](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.025)
13. Berezko M.E., Nikitchenko Yu.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112842>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-8](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-8)
14. Nikitchenko Yu.A. *Trudy MAI*, 2014, no. 77. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=52938>
15. Nikitchenko Yu.A. *Modeli neravnovesnykh techenii* (Unbalanced flows flows models), Moscow, Izd-vo MAI, 2013, 160 p.
16. Nikitchenko Yu.A. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2017, vol. 57, no. 11, pp. 1882–1894.

17. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 104. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102091>
18. Koshmarov Yu.A., Ryzhov Yu.A. *Prikladnaya dinamika razrezhennogo gaza* (Applied rarefied gas dynamics), Moscow, Mashinostroenie, 1977, 184 p.
19. Fletcher K. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkosti* (Computational techniques in fluid dynamics), Moscow, Mir, 1991, vol. 1, 502 p.
20. Anderson D., Tannehill Dzh., Pletcher R. *Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen* (Computational fluid mechanics and heat transfer), Moscow, Mir, 1990, vol. 1, 384 p.
21. Pirumov U.G., Roslyakov G.S. *Chislennyye metody gazovoi dinamiki* (Numerical methods of gas dynamics), Moscow, Vysshaya shkola, 1987, 232 p.
22. Crouseilles N., Degond P., Lemou M. A hybrid kinetic/fluid model for solving the gas dynamics Boltzmann–BGK equation, *Journal of Computational Physics*, 2004, vol. 199, pp. 776 – 808. DOI:[10.1016/j.jcp.2004.09.006](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.09.006)

Статья поступила в редакцию 19.01.2022; одобрена после рецензирования 06.02.2022; принята к публикации 21.02.2022.

The article was submitted on 19.01.2022; approved after reviewing on 06.02.2022; accepted for publication on 21.02.2022.