

# МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ ВЫВЕДЕНИЯ КА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ НА ГСО

Михаил Сергеевич КОНСТАНТИНОВ родился в 1939 г. в городе Москве. Профессор МАИ. Доктор технических наук, профессор. Основные научные интересы — в области механики космического полета, оптимального управления. Автор более 100 научных работ. E-mail: mkonst@bk.ru

Mikhail S. KONSTANTINOV, D.Sci, was born in 1939, in Moscow. He is a Professor at the MAI. His research interests are in spaceflight mechanics and optimal control. He has published over 100 technical papers. E-mail: mkonst@bk.ru

Мин ТХЕЙН родился в 1977 г. в Мьянме. Аспирант МАИ. Основные научные интересы — в области механики космического полета, оптимального управления. E-mail: minntheino@gmail.com

Min THEIN was born in 1977, in Myanmar. He is a PhD student at the MAI. His research interests are in spaceflight mechanics and optimal control. E-mail: minntheino@gmail.com

*Анализируется метод оптимизации траектории выведения космических аппаратов (КА) на геостационарную орбиту (ГСО) с двигательной установкой малой тяги. Основные усилия направлены на регуляризацию процесса решения краевых задач оптимального управления. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина позволяет свести задачу оптимизации траектории перелёта КА с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Суть краевой задачи — решение нелинейной системы уравнений. В настоящей работе для решения нелинейной системы уравнений используется гибридный метод, который объединяет Левенберг—Марквардт-метод с модифицированным методом Ньютона. Сравняется эффективность этого метода и метода продолжения по параметру, который предложен в ряде работ В.Г. Петухова. Приводятся результаты численного анализа траектории выведения космического аппарата на ГСО и эффективности использования ЭРДУ для такого космического маневра. Как критерий оптимизации рассматривается или время выполнения космического маневра (оно минимизируется, задача быстродействия), или конечная масса КА (она максимизируется при фиксированном времени выведения).*

*This paper describes the trajectory optimization method for spacecraft insertion into geostationary orbit (GSO) with the use of electric propulsion. Special efforts are made to provide regularization for the solving of the boundary value problems of optimal control. By applying the Pontryagin's maximum principle, the low-thrust trajectory optimization problem is reduced to the boundary value problem for the ordinary differential equations system. The core sense of the boundary value problem is the solution of the non-linear system of equations. To solve the non-linear system of equations, we offer to use the hybrid method which combines the Levenberg — Markquardt method with the quasi-Newton method. We compare the effectiveness of this method with the use of the continuation method on parameter which offered in the works by V.G. Petukhov. The numerical results of the spacecraft's trajectory into GSO and the effectiveness of the electric propulsion application for such insertion are presented. Two factors are considered as the criteria of optimization — the time of flight (which is minimized for minimum-time transfer problem) and terminal mass of the spacecraft (which is maximized for fixed-time transfer problem).*

**Ключевые слова:** космический аппарат, геостационарная орбита, краевая задача, электроракетная двигательная установка.

**Key words:** spacecraft, geostationary orbit, boundary value problem, electric propulsion.

## Список сокращений

КА — космический аппарат

ЭРДУ — электроракетная двигательная установка

ГСО — геостационарная орбита

## 1. Введение

В настоящее время выведение космического аппарата на геостационарную орбиту — одна из

важных проблем современной космонавтики. В настоящей работе анализируется метод оптимизации траектории выведения КА с электроракетной двигательной установкой на геостационарную орбиту. Основные усилия при этом направлены на регуляризацию процесса решения краевой задачи оптимального управления. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина позволяет свести оптимизационную задачу к краевой задаче для систе-

мы обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2]. Решение краевой задачи и составляет основную трудность при использовании подхода принципа максимума (как и многих других непрямых методов).

Трудности решения таких краевых задач носят принципиальный характер и связаны, в частности, с вопросами существования и неединственности решения систем нелинейных уравнений. Методические сложности связаны с вычислительной неустойчивостью и с ограниченностью области сходимости численных методов решения таких систем уравнений. Традиционно для решения задач оптимизации траекторий КА с двигательными установками малой тяги используются различные модификации метода Ньютона. Основной проблемой при использовании этого класса методов (впрочем, и других итерационных методов) является определение начального приближения, достаточно близкого к оптимальному решению. Практически не разработано достаточно универсальных алгоритмов определения начальных значений этих параметров для обеспечения сходимости методов типа Ньютона. Усилия многих исследователей направлены на совершенствование методов в двух направлениях: в расширении области сходимости итерационных процедур к оптимальному решению; в увеличении скорости сходимости этих процедур. В ряде работ В.Г. Петухова (например, [2, 3]) предлагается использовать метод продолжения по параметру. Этот метод позволил автору для многих рассмотренных им задач увеличить и область сходимости (например, в задачах с идеально регулируемым двигателем оказалось возможным использовать нулевое начальное приближение для неизвестного вектора сопряженных переменных) и добиться высокой скорости сходимости.

Считая методические разработки В.Г. Петухова весьма эффективными, мы полагаем, что целесообразно развивать и другие методические направления. В данной работе анализируется возможность использования гибридного метода, объединяющего метод Левенберга—Марквардта с модифицированным методом Ньютона, для решения нелинейных систем в задачах оптимального управления. Сравняется эффективность этого метода с упомянутым выше методом продолжения по параметру. Приводятся результаты численного анализа траектории выведения КА на ГСО и эффективности использования ЭРДУ для такого космического маневра. Как критерий оптимизации рассматривается или время выполнения космического маневра (оно минимизируется, задача быстродействия), или время работы двигателя (моторное время, оно ми-

нимизируется при фиксированном времени выведения).

## 2. Уравнения движения

Движение КА рассматривается под действием двух сил: гравитационной силы притягивающего центра и силы тяги ЭРДУ. Величина тяги и скорость истечения включенной ЭРДУ считаются постоянными, на ориентацию вектора тяги не накладывается каких-либо ограничений. Гравитационное поле притягивающего центра будем считать центральным ньютоновским.

Проекции реактивного ускорения на орты орбитальной системы координат имеют вид:

$$\begin{aligned} a_\tau &= \delta(P/m) \cos(\varphi) \cos(\psi); \\ a_r &= \delta(P/m) \sin(\varphi) \cos(\psi); \\ a_n &= \delta(P/m) \sin(\psi), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_\tau$ ,  $a_r$ ,  $a_n$  — соответственно трансверсальная, радиальная и бинормальная проекции реактивного ускорения;

$\delta$  — функция включения двигателя ( $\delta = 1$  на активном участке траектории при включенной ЭРДУ,  $\delta = 0$  при неработающей ЭРДУ);

$P$  — тяга ЭРДУ;

$m$  — масса КА;

$\varphi$  — угол тангажа (угол между проекцией вектора тяги на плоскость оскулирующей орбиты КА и трансверсальным направлением);

$\psi$  — угол рыскания (угол между вектором тяги и плоскостью оскулирующей орбиты КА).

Для исключения особенностей уравнений движения КА в окрестности нулевых значений эксцентриситета и наклона будем рассматривать уравнения движения в равноденственных элементах

[1, 2] ( $h = \sqrt{\frac{p}{\mu}}$ ; проекции вектора эксцентриситета

$e_x = \cos(\Omega + \omega)$ ,  $e_y = \sin(\Omega + \omega)$ ; проекции вектора

наклона  $i_x = \text{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega$ ,  $i_y = \text{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega$ ; истинная

долгота точки орбиты КА  $F = v + \omega + \Omega$ ):

$$\frac{dh}{dt} = \delta \frac{p}{m} \frac{h}{\xi} h \cos \theta \cos \psi; \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_x}{dt} &= \delta \frac{p}{m} \frac{h}{\xi} \{ \xi \sin F \sin \theta \cos \psi + \\ &+ (\xi + 1) \cos F \cos \theta \cos \psi - e_y \eta \sin \psi \}; \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\frac{de_y}{dt} = \delta \frac{p}{m} \frac{h}{\xi} \{ -\xi \cos F \sin \theta \cos \psi + [(\xi + 1) \sin F + e_y] \cos \theta \cos \psi - e_x \eta \sin \psi \}; \quad (2c)$$

$$\frac{di_x}{dt} = \delta \frac{p}{m} \frac{h}{\xi} \frac{1}{2} \varphi \cos F \sin \psi; \quad (2d)$$

$$\frac{di_y}{dt} = \delta \frac{p}{m} \frac{h}{\xi} \frac{1}{2} \varphi \sin F \sin \psi; \quad (2e)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\xi^2}{h^2} + \delta \frac{p}{m} \frac{h}{\xi} \frac{1}{2} \xi \eta \sin \psi; \quad (2f)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\delta \frac{p}{w}. \quad (2g)$$

Здесь  $p$  — фокальный параметр;  $e$  — эксцентриситет;  $\Omega$  — долгота восходящего узла;  $v$  — истинная аномалия;

$$\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F; \quad \eta = i_x \sin F - i_y \sin F;$$

$$\varphi = 1 + i_x^2 + i_y^2;$$

$w$  — скорость истечения ЭРДУ КА,  $\mu$  — гравитационный параметр центрального тела.

Требуется перевести КА начальной массы  $m_0$  с начальной орбиты

$$h = h_0, \quad e_x = e_{x0}, \quad e_y = e_{y0}, \quad i_x = i_{x0}, \quad i_y = i_{y0} \quad (3)$$

на конечную орбиту

$$h = h_k, \quad e_x = e_{xk}, \quad e_y = e_{yk}, \quad i_x = i_{xk}, \quad i_y = i_{yk} \quad (4)$$

за заданное или минимизируемое время  $T$ .

### 3. Оптимальное управление

Для решения задачи (2)—(4) используем формализм принципа максимума. Гамильтониан задачи оптимального управления (2)—(4) имеет вид

$$H = -\delta \frac{p}{m} (1 + p_m) + \frac{\xi^2}{h^2} p_F + \delta \frac{p}{m} \frac{h}{\xi} \{ A_\tau \cos \theta \cos \psi + A_r \sin \theta \cos \psi + A_n \sin \psi \}, \quad (5)$$

где

$$A_\tau = hp_h + [(\xi + 1) \cos F + e_x] p_{ex} + [(\xi + 1) \sin F + e_y] p_{ey};$$

$$A_r = \xi (\sin F \cdot p_{ex} - \cos F \cdot p_{ey});$$

$$A_n = \eta (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \varphi (\cos F \cdot p_{ix} + \sin F \cdot p_{iy}) + \xi \eta p_F;$$

$p_h, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_F, p_m$  — переменные, сопряженные к фазовым координатам  $h, ex, ey, ix, iy, F$  и  $m$  соответственно.

Оптимальное управление  $\delta(t), \theta(t), \psi(t)$  определяется из условия максимума гамильтониана (5):

$$\cos \theta = \frac{A_\tau}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}; \quad \sin \theta = \frac{A_r}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}; \quad (6)$$

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}}; \quad \sin \psi = \frac{A_n}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}}; \quad (7)$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_s > 0; \\ 0, & \text{если } \psi_s \leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\psi_s = -\frac{1 + p_m}{w} + \frac{h}{m\xi} (A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2}$  — функция

переключения. В задаче о перелёте за минимальное время вместо соотношения (8) используется тождество

$$\delta \equiv 1, \quad (9)$$

а дифференциальные уравнения для переменных  $m$  и  $p_m$  можно исключить из рассмотрения, используя явную зависимость массы КА  $m$  от времени:

$$m = m_0 - \frac{p}{w} t. \quad (10)$$

Полученные выражения для оптимального управления позволяют записать гамильтониан на оптимальном управлении в виде

$$H = \delta P \left[ \frac{h}{m\xi} (A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2} - \frac{1 + p_m}{w} \right] + \frac{\xi^2}{h^2} p_F = \delta P[kA + b] + H_F, \quad (11)$$

где

$$k = \frac{h}{m\xi}; \quad A = (A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2};$$

$$b = -\frac{1 + p_m}{w}; \quad H_F = \frac{\xi^2}{h^2} p_F.$$

Уравнения оптимального движения имеют вид [2, 3]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \delta P \left[ k \left( A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial p} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial p} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial p} \right) A^{-1} \right]; \quad (12a)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_F} =$$

$$= \delta P \left[ k \left( A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial p_F} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial p_F} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial p_F} \right) A^{-1} \right] + \frac{\partial H_F}{\partial p_F}; \quad (12b)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m} = \delta P \frac{\partial b}{\partial p_m}; \quad (12c)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H_F}{\partial x} -$$

$$-\delta P \left[ \frac{\partial k}{\partial x} A + k \left( A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial x} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial x} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial x} \right) A^{-1} \right]; \quad (12d)$$

$$\frac{dp_F}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial F} = -\frac{\partial H_F}{\partial F} -$$

$$-\delta P \left[ \frac{\partial k}{\partial F} A + k \left( A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial F} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial F} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial F} \right) A^{-1} \right]; \quad (12e)$$

$$\frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\delta P \frac{\partial k}{\partial m} A, \quad (12f)$$

где  $x = [h \ e_x \ e_y \ i_x \ i_y]^T$ ,  $p = [p_h \ p_{ex} \ p_{ey} \ p_{ix} \ p_{iy}]^T$ .

Так как рассматривается межорбитальный перелёт и значение истинной долготы  $F$  в конечной точке траектории перелета не фиксировано, из условия трансверсальности легко получить  $p_F(T) = 0$ . Этому необходимому условию оптимальности удовлетворяет тождественно нулевое (по времени полета) значение этой сопряженной переменной. Наши попытки рассмотреть общий случай и найти оптимальное изменение этой переменной вдоль всей траектории выведения не привели к положительному результату. Такое исследование не может служить доказательством того, что  $p_F(t)$  должно быть тождественно нулевым. Но мы считаем, что допускаемое при этом сужение области оптимального управления не должно сильно ухудшить характеристики получаемой траектории. Таким образом, мы рассматриваем тождество  $p_F(t) = 0$  как допущение, возможно сужающее область оптимального управления полетом КА.

#### 4. Краевая задача

Интегрирование уравнений (12) с произвольным набором недостающих начальных условий дает возможность определить значения фазового вектора  $x$  и вектора сопряженных переменных  $p$  в конечный момент времени  $T$ , так же как и значения невязок решения краевой задачи, например [2, 3]:

$$f = \begin{pmatrix} h(T) - h_k \\ e_x(T) - e_{xk} \\ e_y(T) - e_{yk} \\ i_x(T) - i_{xk} \\ i_y(T) - i_{yk} \\ p_m(T) \end{pmatrix} = 0 \quad (13a)$$

для задачи с фиксированным временем и

$$f = \begin{pmatrix} h(T) - h_k \\ e_x(T) - e_{xk} \\ e_y(T) - e_{yk} \\ i_x(T) - i_{xk} \\ i_y(T) - i_{yk} \\ H(T) \end{pmatrix} = 0 \quad (13b)$$

для задачи на оптимальное быстродействие.

Эти невязки являются функциями вектора неизвестных параметров краевой задачи. Поэтому равенства (13a), (13b) следует рассматривать как уравнения относительно вектора неизвестных параметров краевой задачи:

$$z = \begin{pmatrix} P \\ p_m \end{pmatrix} \quad (14a)$$

для задачи с фиксированным временем и

$$z = \begin{pmatrix} P \\ T \end{pmatrix} \quad (14b)$$

для задачи на оптимальное быстродействие.

#### 5. Решение краевой задачи

Решение краевой задачи оптимального уравнения сводится к решению системы нелинейных уравнений, составленной из невязок заданных фазовых координат на правом конце траектории и из условий трансверсальности (13) относительно параметров (14). Для численного решения этой системы используется гибридный метод, который объединяет метод Левенберга—Марквардта с модифицированным методом Ньютона.

Пусть необходимо решить систему нелинейных уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0. \quad (15)$$

Поставим задачу нахождения таких компонентов вектора  $\mathbf{z}$ , которые минимизируют сумму квадратов невязок системы (15). Можно утверждать, что в определенных условиях решение системы уравнений (15) эквивалентно нахождению минимума функции  $F(\mathbf{z})$ :

$$F(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (f_i(\mathbf{z}))^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{f}(\mathbf{z})\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{z})^T \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad (16)$$

где  $j$  — размерность вектора  $\mathbf{f}$  (в нашем случае  $j = 6$ ).

Нами была рассмотрена возможность использования гибридного метода, который объединяет метод Левенберга—Марквардта с модифицированным методом Ньютона. Этот гибридный метод показал хорошую сходимость в рассматриваемой задаче при использовании величин управляющих итерационным процессом параметров, рекомендованных в [4]. Коротко опишем сущность этого гибридного метода.

Метод анализирует значение самой функции  $F$  и значение ее производной на каждом шаге итерационного процесса. Если оказывается, что само значение функции достаточно далеко от нулевого значения, а значение ее производной мало (приближенно выполняется необходимое условие минимума функции  $F$ ) на нескольких последовательных шагах итерационного процесса, то предлагается перейти от использования метода Левенберга—Марквардта к использованию квазиньютоновского метода. Приращение аргумента в квазиньютоновском методе основывается на использовании оцен-

ки матрицы вторых производных от  $F$   $B = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2(z_i)}$ ,

размер итерационного шага  $h_{qN}$  по аргументам находится из соотношения

$$h_{qN} = -B^{-1} \frac{\partial F}{\partial z(z_i)}, \quad (17)$$

выполнение которого должно обеспечить эффективное убывание величины первой производной минимизируемой функции.

Для оценки матрицы вторых производных Al-Vaali и Fletcher [5] предложили оригинальную процедуру, которая одновременно контролирует величину шага и обеспечивает положительную определенность матрицы вторых производных в процессе итерационного поиска.

Этот алгоритм оформлен в виде процедуры библиотеки программ MatLab, и этой процедурой удалось успешно воспользоваться.

Итерационный поиск начинается с ряда шагов, выполняемых с использованием метода Левенберга—Марквардта. Если выполнение этих шагов показывает, что значение  $F(\mathbf{x}^*)$  сильно отлично от нуля и слабо уменьшается по итерациям:

$$\frac{\partial F}{\partial z(z)} < 0,02F(\mathbf{z}) \quad (18)$$

(здесь число 0,02 — один из параметров управления итерационным процессом), то обеспечивается переход к использованию квазиньютоновского метода. Переход к квазиньютоновскому методу предлагается осуществлять, если условие (18) удовлетворено в трех последовательных, успешных итеративных шагах. Число три — это еще один параметр управления итерационным процессом.

Конечно, модифицированный метод Ньютона тоже не гарантирует сходимость итерационного процесса решения рассматриваемой задачи. Как только эффективность итерационного процесса

снижается (норма  $\frac{\partial F}{\partial z(z)}$  уменьшается медленно),

необходимо вернуться к использованию метода Левенберга—Марквардта. Подробнее с этим методом можно ознакомиться в [4].

## 6. Численные результаты для задачи оптимального быстрогодействия при выведении на ГСО

Пусть начальная орбита имеет следующие характеристики в рассматриваемой задаче:

- радиус перицентра начальной орбиты 10000 км;
- радиус апоцентра начальной орбиты 65000 км;
- наклонение начальной орбиты 30°;
- аргумент перигея 0°;
- долгота восходящего узла 0°.

Пусть космический аппарат на начальной орбите имеет следующие характеристики:

- начальная масса 1500 кг;
- тяга электроракетной двигательной установки 0,4 Н;
- удельный импульс электроракетной двигательной установки 2000 с.

Решение задачи по быстродействию показало, что минимальное время ( $T_{fmin}$ ) перелёта на ГСО равно 93,1 суток. Масса КА в момент выведения на ГСО равна 1335,93 кг. Характеристики оптимальной по быстродействию траектории движения показаны на рис. 1—5.

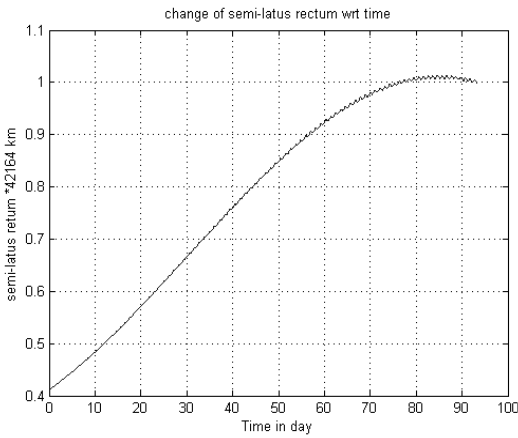


Рис. 1. Изменение фокального параметра оскулирующей орбиты (42164 км) как функции времени полета (сутки)

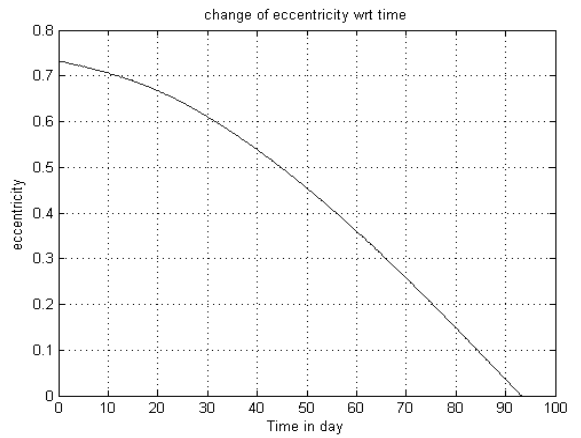


Рис. 2. Изменение эксцентриситета как функции времени полета (сутки)

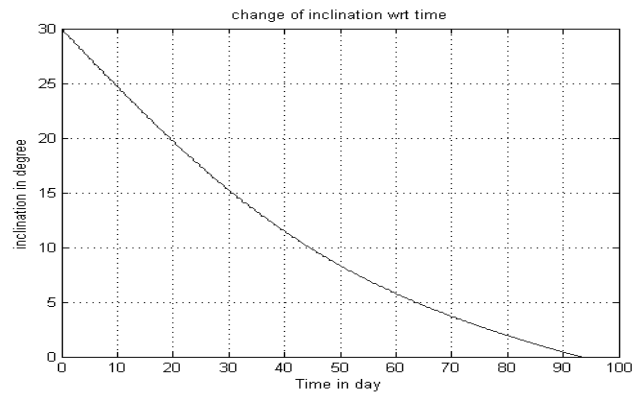


Рис. 3. Изменение наклона (град) как функции времени полета (сутки)

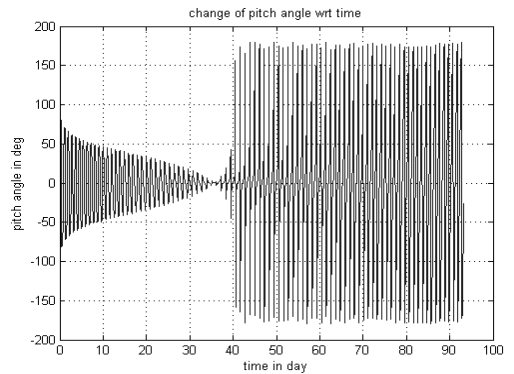


Рис. 4. Изменение угла тангажа (рад) как функции времени полета (сутки)

Изменение фокального параметра как функции времени перелета показано на рис. 1. Изменение фокального параметра приводится в безразмерном виде, когда единица длины принимается равной радиусу геостационарной орбиты. Видно (рис. 1), что вдоль траектории перелета фокальный параметр практически монотонно растет и только в самом конце траектории выведения становится чуть больше радиуса ГСО и затем уменьшается до радиуса ГСО. На рис. 2 показано изменение величины эксцентриситета оскулирующей орбиты как функции времени перелета. Здесь видно, что эксцентриситет монотонно уменьшается до нулевого значения, при этом скорость его убывания монотонно увеличивается.

На рис. 3 показано изменение наклона как функция времени перелета. На траектории перелета наклонение монотонно уменьшается до нулевого значения. На начальном участке перелета (до 30-х суток полета) наклонение оскулирующей орбиты уменьшается практически с постоянной скоростью. Затем скорость уменьшения наклона убывает.

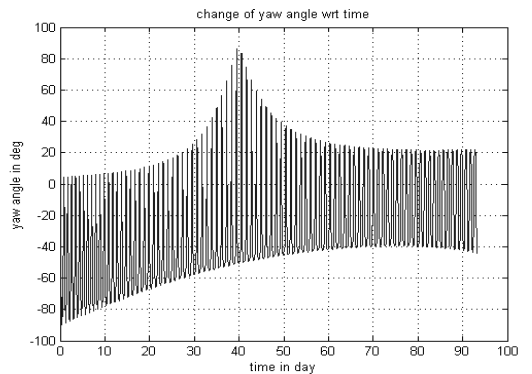


Рис.5. Изменение угла рыскания (рад) как функции времени полета (сутки)

Орбита все более «скругляется», скорость в апогее оскулирующей орбиты растет (из-за того что увеличивается высота перигея и одновременно понижается высота апогея), и поэтому условия для эффективного уменьшения наклона ухудшаются.

На рис. 4 и 5 показаны изменения угла тангажа и угла рыскания как функций времени перелета соответственно. Видно, что практически на всех витках траектории эти углы изменяются в очень больших интервалах. Видно (рис. 4), что угол тан-

тангажа на первых витках траектории изменяется примерно от плюс  $80^\circ$  до минус  $80^\circ$ . Затем амплитуда колебания величины угла тангажа уменьшается. Примерно на 36-е сутки полета значение угла тангажа практически равно нулю на некотором временном интервале. Затем на дальнейших витках траектории перелета значения угла тангажа оказываются практически любыми в диапазоне от плюс  $180^\circ$  до минус  $180^\circ$ .

Не менее интересно изменение угла рыскания вдоль оптимальной траектории выведения (рис. 5). На каждом витке траектории этот угол изменяется от некоторого положительного максимального значения (достигается в перигее оскулирующей орбиты) до отрицательного минимального значения (в апогее оскулирующей орбиты). До 40-х суток полета модуль отрицательного минимального значения существенно больше модуля положительного максимального значения. Это и понятно: изменять положение плоскости орбиты целесообразно, создавая бинормальную тягу в точке орбиты с минимальной скоростью (в апогее оскулирующей орбиты).

### 7. Анализ численных результатов для задачи с фиксированным временем

Для решения задачи с фиксированным временем перелета на ГСО (которое должно быть больше минимального времени перелета) как начальное приближение используется полученное ранее решение задачи на быстродействие. Общая схема решения имеет такой вид. Время перелета меняется с некоторым шагом от найденного ранее минимального времени. Оно фиксируется выбором параметра  $C_{tf}$  ( $C_{tf} \geq 1$ ):

$$T_f = T_{fmin} \cdot C_{tf}. \quad (19)$$

Когда  $C_{tf}$  равняется единице, то рассматриваемая задача есть задача оптимального быстродействия.

Начальные значения для сопряженных переменных берутся из решения предыдущей задачи (первая задача решается при начальном приближении для сопряженных переменных, полученных из решения задачи оптимального быстродействия).

Ниже представлены некоторые результаты анализа. На рис. 6 представлена функция переключения вдоль всей траектории перелета для различных времен перелета. Левый график соответствует случаю, когда время перелета очень близко к минимальному времени (превышает минимальное время на 0,1 %). Видно, что функция переключения бывает отрицательной на нескольких витках траектории в диапазоне 16—24 суток перелета. Именно на этих витках траектории появляются пассивные участки.

График, расположенный в центре рис. 6, соответствует случаю, когда время перелета на 1 % больше минимального времени ( $C_{tf} = 1,01$ ). Пассивные участки на витках траектории перелета появляются в диапазоне 10—39 суток перелета.

График, расположенный в правой части рис. 6, соответствует случаю, когда время перелета на 10 % больше минимального времени ( $C_{tf} = 1,1$ ). Минимальное значение функция переключения на всех витках траектории выведения на ГСО оказывается отрицательным. При этом на каждом витке траектории существуют пассивные участки.

Положение пассивных участков на витках траектории можно анализировать с помощью рис. 7. На нем представлена экваториальная проекция траекторий перелета на ГСО для трех уже рассмотренных времен перелета. Как и на предыдущем рисунке, слева представлен случай, когда время перелета больше минимального времени на 0,1%. В центре представлен случай, когда время перелета больше минимального времени на 1%. Справа представлен случай, когда время перелета больше ми-

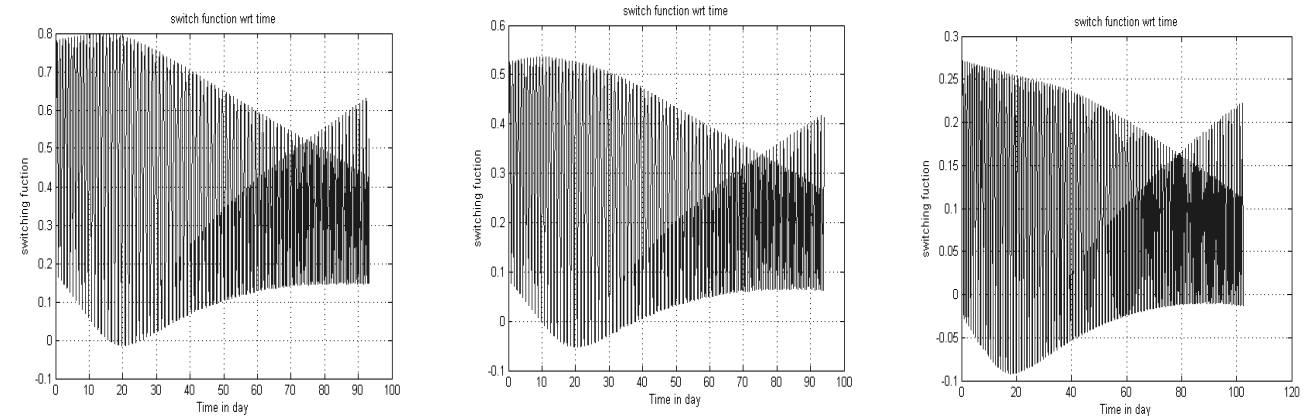


Рис. 6. Функция переключения как функция времени полета на всей траектории перелета

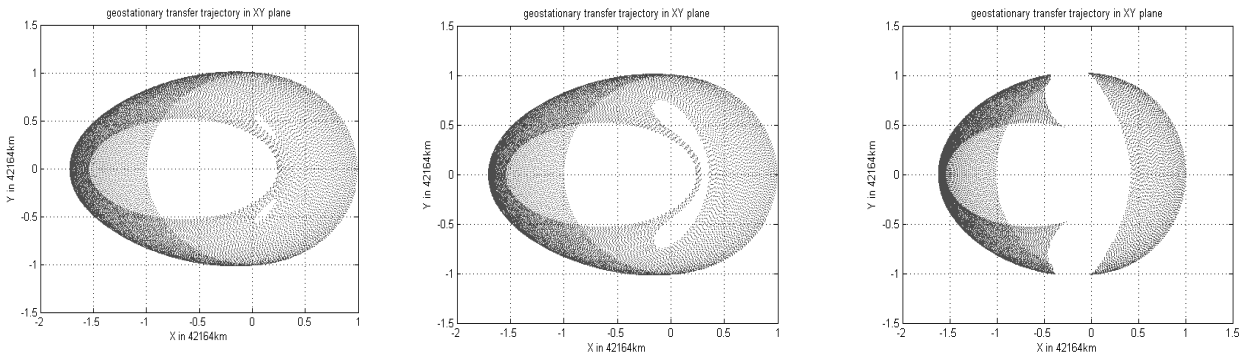


Рис. 7. Проекция траектории перелета КА на ГСО на плоскость экватора

нимального времени на 10%. Активные участки полета показаны сплошной линией. Светлые пятна на рис. 7 — пассивные участки полета.

Видно, что при достаточно малых временах перелета (например, при  $C_{tf} = 1,001$ ) на некотором витке траектории (например, на 16-е сутки полета) появляются сразу два пассивных участка. Они симметричны относительно линии узлов (совпадающей с линией апсид). Один из этих пассивных участков располагается примерно в диапазоне истинной аномалии  $45^\circ - 90^\circ$ . Диапазон истинной аномалии второго пассивного участка примерно минус  $90^\circ -$  минус  $45^\circ$  оскулирующего витка траектории.

При увеличении времени полета ( $C_{tf} = 1,01$ ) длительность пассивных участков на витках траектории увеличивается. Появляются витки траектории, на которых описанные два пассивных участка сливаются в один, который охватывает перигейную область оскулирующего витка траектории.

При дальнейшем увеличении времени выведения на конечную орбиту ( $C_{tf} = 1,1$ ) все витки траектории имеют один пассивный участок, расположенный в окрестности перигея оскулирующей орбиты (его можно считать и симметричным относительно линии узлов оскулирующей орбиты).

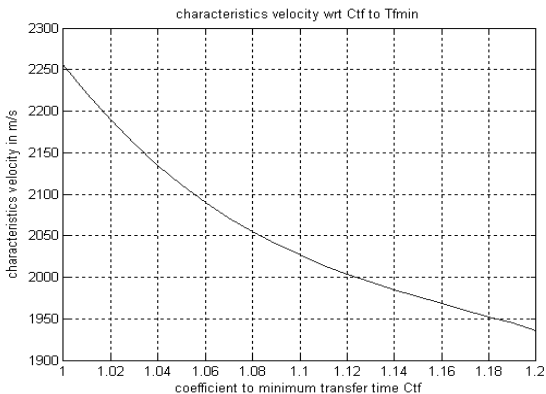


Рис. 8. Характеристическая скорость (м/с) как функция  $C_{tf}$  (времени выведения)

Можно отметить, что линия узлов практически не меняется вдоль всей оптимальной траектории перелета. Интересно и то, что пассивные участки на витках траектории располагаются центрально симметрично относительно этой линии узлов.

На рис. 8 характеристическая скорость маневра выведения КА на ГСО представлена как функция параметра  $C_{tf}$ . Видно, что увеличение времени выведения приводит к уменьшению характеристической скорости маневра. Увеличение времени выведения на 2% уменьшает характеристическую скорость КА на примерно 60 м/с (с 2242 до 2183 м/с). Увеличение времени выведения на 10% уменьшает требуемую характеристическую скорость КА до 2023 м/с. Увеличение времени выведения на 20% уменьшает характеристическую скорость КА до 1936 м/с.

На рис. 9 масса КА в момент выведения на ГСО представлена как функция параметра  $C_{tf}$ , определяющего, во сколько раз время выведения больше минимального времени (напомним, что минимальное время выведения в рассматриваемом случае равно 93,1 суток). Видно, что увеличение времени выведения приводит к росту массы КА на ГСО. Рассматриваемая зависимость существенно нелинейна. Если увеличение времени выведения на 2%

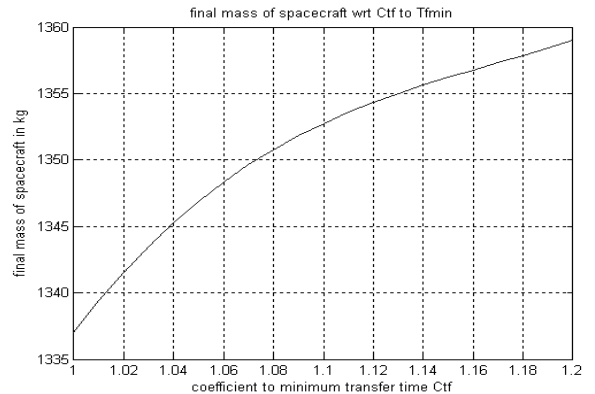


Рис. 9. Масса КА в момент выведения на ГСО (кг) как функция  $C_{tf}$  (времени выведения)



приводит к увеличению массы примерно на 4 кг (примерно на 0,3 %), то увеличение времени на 10 % (на 9 суток) приводит к увеличению массы КА на ГСО всего на 15 кг (примерно на 1,1 %). На наш взгляд, это обстоятельство объясняет то, что многие считают возможным использовать решение задачи оптимального перелета КА с ЭРДУ при минимизации времени выведения. Хотя, конечно, увеличивая это время, можно увеличить массовую отдачу транспортной операции.

## 8. Сравнение численных результатов с результатами, опубликованными в литературе

Проводилось сравнение полученных численных результатов с результатами, опубликованными другими авторами. В работе [6] приведено решение неосредненной задачи минимизации времени перелета КА с вытянутой эллиптической орбиты на ГСО. Были приняты следующие проектные параметры КА и параметры перелета: начальная масса КА 1500 кг, тяга ЭРДУ 0,2 Н, скорость истечения ЭРДУ 19561,82 м/с, фокальный параметр начальной орбиты 11625 км, начальный эксцентриситет 0,75, начальное наклонение 7°, конечная орбита — круговая экваториальная орбита радиусом 42165 км. Для этой задачи было получено минимальное время перелета, равное 177,738 суток. В работе В.Г. Петухова [2] для тех же входных условий получено минимальное время перелета 177,360 суток. Использование приведенного в настоящей статье алгоритма для соответствующей задачи привело к значению времени перелета 178,013 суток. С нашей точки зрения, точность полученной оценки времени перелета достаточно высока. Отметим, что точность удовлетворения условий выведения КА на ГСО оказывается очень высокой (сумма безразмерных квадратов невязок равна 0,00000775).

Для оценки вычислительной эффективности предлагаемого метода было разработано программное обеспечение, реализующее идеи метода продолжения [1, 2, 3, 7], и обеспечение, реализующее алгоритм с использованием решения модельной задачи [1, 6]. При нашей реализации отмеченных методов и алгоритмов предлагаемый подход оказался несколько эффективнее. Его использование позволило сократить время реализации итерационных процедур. Такой вывод несколько не умаляет значимость разработанных ранее методов (особенно метода продолжения по параметру), а лишь показывает возможность использования предлагаемого в работе метода.

Приведенные сравнения показывают возможность использования предлагаемого метода при проектно-баллистическом анализе транспортных систем с электроракетными двигательными установками.

## Выводы

В работе предложена методика оптимизации схем выведения КА с двигателями малой тяги с эллиптической на пространственную круговую орбиту. Представлены результаты использования разработанной методики и результаты анализа оптимальной траектории выведения КА с ЭРДУ на ГСО, оптимального управления движением КА при этом выведении. Полученные результаты сравниваются с результатами, опубликованными другими авторами. Предлагаемая методика показала достаточно высокую эффективность. Она может быть использована для оптимизации многовитковых перелетов с эллиптической начальной орбиты на ГСО для КА с ЭРДУ.

## Библиографический список

1. *Konstantinov M.* Optimization of Low Thrust transfer from elliptical orbit into noncoplanar circular orbit. Proceedings of 2nd International Symposium on Low-Thrust Trajectories LOTUS-2, Toulouse, France, 2002.
2. *Петухов В.Г.* Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004. Т. 42. №42. С.1—20.
3. *Petukhov V.* Spacecraft insertion into high working orbits using light class launcher and electric propulsion. 17th International symposium on space flight dynamics. Moscow, Russia, June 16, 2003.
4. *Madsen K., Nielsen H.B., Tingleff O.* Methods for nonlinear least square problems, 2nd Edition, April 2004.
5. *Al-Baali M. and Fletcher R.* Variation methods for nonlinear least-squares. J. Opl. Res. Soc. 36. № 5. Pp 405-421, 1985.
6. *Caillau J.B., Gerguad J., Noailles J.* 3D Geosynchronous Transfer of a Satellite: Continuation on the Thrust, journal of optimization theory and applications. Vol.118, No: 3, pp.541-565, September 2003.
7. *Konstantinov M.* Optimization of low thrust transfer between no coplanar elliptic orbits. Paper IAF-97-A.6.06, Turin, Italy, October 1997.

*Работа выполнена в Московском авиационном институте (государственном техническом университете) при частичной поддержке РФФИ, гранты № 09-08-01140-а, 09-08-01228-а.*

Московский авиационный институт  
Статья поступила в редакцию 19.11.2009