

УДК 531.36; 531.352

## **Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты**

**Бардин Б.С.\*, Чекина Е.А.\*\***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*\*e-mail: [bardin@yandex.ru](mailto:bardin@yandex.ru)*

*\*\*e-mail: [chekina\\_ev@mail.ru](mailto:chekina_ev@mail.ru)*

### **Аннотация**

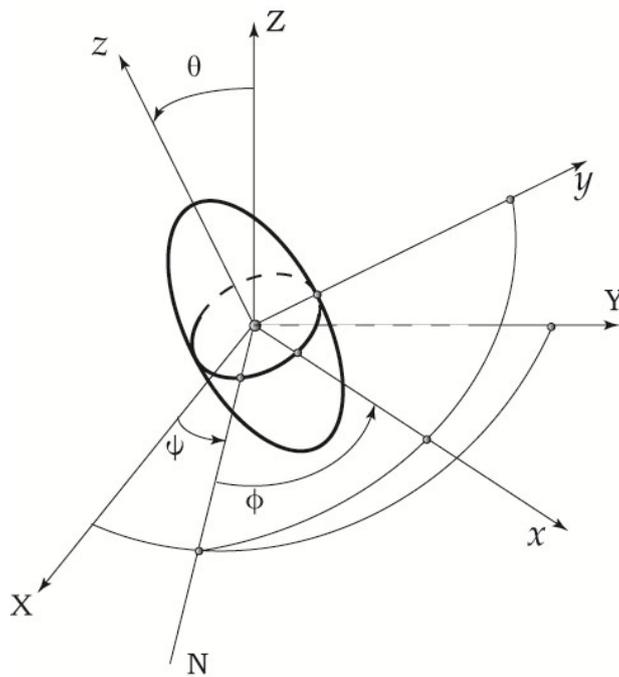
Исследуется задача об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного твердого тела относительно его центра масс на эллиптической орбите. Резонансное вращение представляет собой плоское движение, при котором за время, равное двум периодам обращения центра масс по орбите, твердое тело совершает в абсолютном пространстве три оборота вокруг своей экваториальной оси инерции, направленной по нормали к плоскости орбиты. В работах [3,4,5] был проведен строгий анализ устойчивости данного резонансного вращения с учетом плоских возмущений. В работе [6] для спутника с неравными моментами инерции исследовалась устойчивость резонансного вращения с учетом как плоских, так и пространственных возмущений.

В данной работе решается неисследованная ранее задача об устойчивости резонансного вращения для динамически симметричного спутника, при этом учитываются как плоские, так и пространственные возмущения. Анализируя линеаризованные уравнения возмущенного движения, была найдена область значений эксцентриситета, где резонансное вращение неустойчиво. За границей этой области был проведен нелинейный анализ и найдены области устойчивости для большинства начальных условий, а также область формальной устойчивости.

**Ключевые слова:** гамильтонова система, симплектическое отображение, нормальная форма, параметрический резонанс, спутник, устойчивость.

### **Постановка задачи**

Рассмотрим спутник, движущийся в центральном ньютоновском гравитационном поле сил. Спутник моделируется динамически симметричным твердым телом, центр масс которого движется по эллиптической орбите. Для описания движения спутника относительно центра масс введем следующие системы координат (Рис. 1)



1. Орбитальную систему координат  $OXYZ$ . Оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  которой направлены по радиус-вектору центра масс относительно притягивающего центра, по трансверсали и по нормали к орбите соответственно.
2. Жестко связанную со спутником систему координат  $Oxuz$ , оси которой направлены вдоль его главных центральных осей инерции. Ось  $Oz$  направлена вдоль оси симметрии.

Ориентацию связанной системы координат относительно орбитальной будем задавать углами Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  (Рис.1 1). Вводя соответствующие координатам  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  безразмерные импульсы  $p_\psi$ ,  $p_\theta$ ,  $p_\phi$  уравнения движения можно записать в гамильтоновой форме [1].

Для динамически-симметричного спутника угол собственного вращения  $\phi$  является циклической координатой, т.е функция Гамильтона явно от  $\phi$  не зависит. Вследствие этого, соответствующий импульс  $p_\phi$  сохраняет на

движениях спутника постоянное значение, т.е. является первым интегралом  $p_\varphi = \text{const}$ . Далее мы будем рассматривать только такие движения, для которых выполнено соотношение  $p_\varphi = 0$ . При таком предположении гамильтониан задачи имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{(1 + e \cos \nu)^2} - p_\psi + \frac{1}{2} (1 + e \cos \nu) \alpha \sin^2 \psi \sin^2 \theta \quad (1.1)$$

Где  $\alpha = 3(C - A)/A$ ,  $A$  и  $C$  соответственно экваториальный и полярный моменты инерции спутника. Истинная аномалия  $\nu$  входит в уравнения движения в качестве независимой переменной.

Если параметры  $\alpha$  и  $e$  удовлетворяют соотношению  $\alpha = 6e$  ( $0 < e < 1$ ), то каноническая система с гамильтонианом (1.1) имеет частное решение [2]

$$\psi^* = \frac{\nu}{2}, \quad \theta^* = \frac{\pi}{2}, \quad p_\psi^* = \frac{3}{2} (1 + e \cos \nu)^2, \quad p_\theta^* = 0. \quad (1.2)$$

Решение (1.2) представляет собой плоское движение спутника, при котором его ось динамической симметрии лежит в плоскости орбиты, а сам спутник совершает в абсолютном пространстве три полных поворота относительно нормали к плоскости орбиты за два оборота его центра масс по орбите.

Исследования плоских периодических движений проводились ранее во многих работах, таких как [1-9, 16].

В работах [3,4,5] было выполнено исчерпывающее исследование устойчивости резонансного вращения (1.2) по отношению к плоским возмущениям, при

которых ось инерции спутника, направленная в невозмущенном движении по нормали к плоскости, сохраняет это направление неизменным.

В частности, в работе [3] был проведен анализ устойчивости резонансного вращения (1.2) в линейном приближении. В работах [4,5] был выполнен нелинейный анализ и получены строгие выводы об устойчивости по Ляпунову для всех возможных значений параметров задачи.

В работе [6] для спутника с неравными моментами инерции исследовалась устойчивость резонансного вращения (1.2) с учетом как плоских, так и пространственных возмущений.

В данной работе решается неисследованная ранее задача об устойчивости резонансного вращения (1.2) для динамически симметричного спутника, при этом учитываются как плоские, так и пространственные возмущения.

Для описания движения в окрестности резонансного вращения (1.2) введем новые канонические переменные  $q_i, p_i$  ( $i=1,2$ ) по формулам

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^* + \frac{q_1}{1 + e \cos \nu}, & p_\psi &= p_\psi^* + p_1(1 + e \cos \nu) + e \sin \nu q_1, \\ \theta &= \theta^* + \frac{q_2}{1 + e \cos \nu}, & p_\theta &= p_\theta^* + p_2(1 + e \cos \nu) + e \sin \nu q_2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Переменные  $q_1, p_1$  определяют плоские возмущения, а переменные  $q_2, p_2$  -- пространственные возмущения, т.е. возмущения при которых главная ось инерции  $Oy$  отклоняется от нормали к плоскости орбиты.

Таким образом, в переменных  $q_i, p_i$  ( $i=1,2$ ) задача об устойчивости резонансного вращения (1.2) сводится к задаче об устойчивости положения равновесия  $q_i = p_i = 0$ .

Замена переменных (1.3) является канонической и унивалентной поэтому уравнения движения в переменных  $q_i, p_i$  ( $i=1,2$ ) имеют гамильтонову форму

$$\frac{dq_i}{dv} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dv} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i=1,2). \quad (1.4)$$

Разложим функцию Гамильтона в ряд в окрестности  $q_i = p_i = 0$

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (1.5)$$

Необходимые для дальнейшего анализа устойчивости члены разложения (1.5) имеют вид

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{7e \cos \nu q_1^2}{2(1+e \cos \nu)} + \frac{1(25e \cos \nu - 12e + 9)q_2^2}{8(1+e \cos \nu)} + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2, \\ H_3 &= -2 \frac{e \sin \nu q_1^3}{(1+e \cos \nu)^2} - \frac{3e \sin \nu q_1 q_2^2}{2(1+e \cos \nu)^2} + \frac{3q_2^2 p_1}{2(1+e \cos \nu)}, \\ H_4 &= -\frac{e \cos \nu q_1^4}{(1+e \cos \nu)^3} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2 p_1^2}{(1+e \cos \nu)^2} + \frac{1(e \cos \nu + 2e + 3)q_2^4}{4(1+e \cos \nu)^3} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{e(7e(\cos \nu)^2 + 6\cos \nu - e)q_1^2 q_2^2}{(1+e \cos \nu)^4} + \frac{e \sin(\nu) q_2^2 q_1 p_1}{(1+e \cos \nu)^3}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Анализ устойчивости в линейном приближении

Рассмотрим линеаризованную в окрестности положения равновесия  $q_i = p_i = 0$  ( $i=1,2$ ) систему с гамильтонианом  $H_2$

$$\frac{dq_i}{dv} = \frac{\partial H_2}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dv} = -\frac{\partial H_2}{\partial q_i} \quad (i=1,2) \quad (1.7)$$

Вопрос об устойчивости системы (1.7) решается на основе анализа корней ее характеристического уравнения. В нашем случае линейная система (1.7) распадается на две следующие независимые подсистемы:

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dv} = p_1 \\ \frac{dp_1}{dv} = -7 \frac{e \cos v q_1}{1 + e \cos v}, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} \frac{dq_2}{dv} = p_2 \\ \frac{dp_2}{dv} = -\frac{1(25e \cos v - 12e + 9)q_2}{4(1 + e \cos v)}. \end{cases} \quad (1.9)$$

первая из которых описывает изменение переменных  $q_1, p_1$ , а вторая -- переменных  $q_2, p_2$ .

Обозначим через  $\mathbf{X}_1(v)$  и  $\mathbf{X}_2(v)$  фундаментальные матрицы решений систем (1.8) и (1.9) соответственно, с начальными условиями  $\mathbf{X}_i(0) = \mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{X}_i(0) = \mathbf{E}_2$ , ( $i=1,2$ ), где  $\mathbf{E}_2$  - единичная матрица второго порядка. Тогда характеристическое уравнение системы (1.7) будет иметь вид:

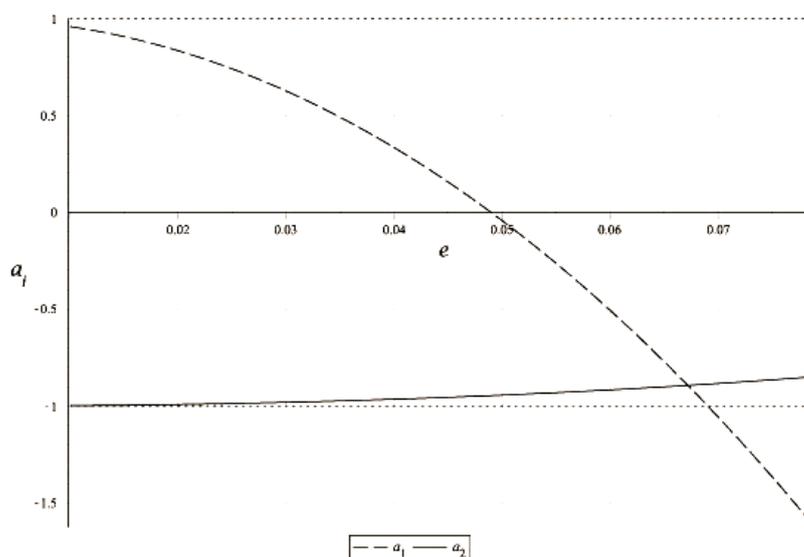
$$(\rho^2 - 2a_1\rho + 1)(\rho^2 - 2a_2\rho + 1) = 0, \quad (a_i = x_{11}^{(i)} + x_{22}^{(i)}, \quad i=1,2) \quad (1.10)$$

где  $x_{11}^{(i)}, x_{22}^{(i)}$  - диагональные элементы матриц  $\mathbf{X}_i(2\pi)$ .

Если  $|a_1| > 1$  или  $|a_2| > 1$ , то у характеристического уравнения (1.10) есть корень, превышающий по модулю единицу. В этом случае линеаризованная система (1.7) неустойчива. Из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому

приближению следует [10], что нелинейная система с гамильтонианом (1.5) также неустойчива, что, в свою очередь, означает неустойчивость соответствующего периодического движения (1.2).

Если  $|a_1| < 1$  и  $|a_2| < 1$ , то все корни характеристического уравнения комплексные с модулем равным единице. В этом случае система (1.7) устойчива [10], что не означает, однако, устойчивости соответствующей нелинейной системы (1.4). Для получения строгих выводов об устойчивости резонансного вращения (1.2) необходимо проведение нелинейного анализа с учетом членов третьей, четвертой, а иногда и более высокой степени в разложении гамильтониана (1.5). Путем численного интегрирования систем (1.8) и (1.9) были получены коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$ . Графики их зависимости от  $e$  представлены на Рис. 2.



Поскольку для главных центральных моментов инерции  $A$ ,  $B$  и  $C$  выполняются неравенства треугольника, то значения эксцентриситета

удовлетворяющие соотношению  $\alpha = 6e$  принадлежат интервалу  $[0, 1/2]$ . В этом интервале существует только одна область, удовлетворяющая условиям  $|a_1| < 1$ , и  $|a_2| < 1$ , а именно:  $0 < e < 0.06904107039$ .

Данная область соответствует области, полученной в [5], где исследование устойчивости резонансного вращения (1.2) проводилось с учетом только плоских возмущений. Таким образом, в линейном приближении пространственные колебания не влияют на устойчивость резонансного вращения.

### Линейная нормализация

В данном параграфе приводятся формулы линейной канонической замены переменных, позволяющей упростить алгоритм нормализации, описанный в следующем разделе.

Обозначим через  $q_i^{(0)}, p_i^{(0)}$  ( $i=1,2$ ) начальные значения переменных  $q_i, p_i$ , а через  $q_i^{(1)}, p_i^{(1)}$  -- их значения при  $\nu = 2\pi$ . Рассмотрим следующее симплектическое отображение, генерируемое линейной системой (1.7)

$$\begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{X}(2\pi) \begin{pmatrix} q_1^{(0)} \\ q_2^{(0)} \\ p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где матрица  $\mathbf{X}(\nu)$  имеет вид

$$\mathbf{X}(\nu) = \begin{vmatrix} x_{11}^{(1)}(\nu) & 0 & x_{12}^{(1)}(\nu) & 0 \\ 0 & x_{11}^{(2)}(\nu) & 0 & x_{12}^{(2)}(\nu) \\ x_{21}^{(1)}(\nu) & 0 & x_{22}^{(1)}(\nu) & 0 \\ 0 & x_{21}^{(2)}(\nu) & 0 & x_{22}^{(2)}(\nu) \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

Линейной унивалентной канонической заменой переменных

$$\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} = \mathbf{N} \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

симплектическое отображение (2.1) можно привести к следующей более простой (нормальной) форме

$$\begin{vmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{vmatrix} = \mathbf{G} \begin{vmatrix} Q_1^{(0)} \\ Q_2^{(0)} \\ P_1^{(0)} \\ P_2^{(0)} \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \cos 2\pi\sigma_1 & 0 & \sin 2\pi\sigma_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi\sigma_2 & 0 & \sin 2\pi\sigma_2 \\ -\sin 2\pi\sigma_1 & 0 & \cos 2\pi\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sin 2\pi\sigma_2 & 0 & \cos 2\pi\sigma_2 \end{vmatrix}, \quad \sigma_i = \delta_i \lambda_i \quad (i=1,2) \quad (2.5)$$

Величины  $\lambda_i, (i=1,2)$  являются характеристическими показателями линеаризованной системы (1.7). Они удовлетворяют соотношениям  $\cos 2\pi\lambda_i = a_i$ .

Матрица  $\mathbf{N}$  нормализующей замены (2.3) имеет следующий вид

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_{11}^{(1)} & 0 & n_{12}^{(1)} & 0 \\ 0 & n_{11}^{(2)} & 0 & n_{12}^{(2)} \\ n_{21}^{(1)} & 0 & n_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & n_{21}^{(2)} & 0 & n_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где величины  $n_{ij}^{(k)}$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2$ ) вычисляются по формулам [4]:

$$n_{11}^{(j)} = -\delta_j \kappa_j x_{12}^j(2\pi), \quad n_{12}^{(j)} = 0, \quad n_{21}^{(j)} = \delta_j \kappa_j (x_{11}^{(j)}(2\pi) - a_j), \quad n_{22}^{(j)} = -\kappa_j \sqrt{1 - a_j^2},$$

$$\kappa_j = \left| x_{12}^{(j)}(2\pi) \sqrt{1 - a_j^2} \right|^{-1/2}, \quad \delta_j = \text{sign} \left( x_{12}^{(j)}(2\pi) \sqrt{1 - a_j^2} \right), \quad (j = 1, 2)$$

### Нелинейная нормализация

Как уже было отмечено ранее, устойчивость линеаризованной системы не является достаточным условием устойчивости резонансного вращения (1.2).

Таким образом, в интервале  $0 < e < 0.06904107039$  необходимо провести дополнительное исследование устойчивости с учетом нелинейных членов в правых частях уравнений (1.4). В общем случае, выводы об устойчивости можно получить на основании анализа коэффициентов нормальной формы гамильтониана, вычисленной до членов четвертой степени включительно.

В данной работе нелинейная нормализация гамильтониана была выполнена при помощи методики, основанной на построении симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком соответствующей канонической системы. Детальное описание данного подхода дано в [11]. Здесь мы коротко остановимся на его основных моментах и выпишем формулы, необходимые для дальнейшего исследования.

Сначала, с помощью линейной канонической замены (2.3) перейдем к переменным  $Q_i, P_i, (i = 1, 2)$ . Новый гамильтониан будет иметь вид:

$$H^* = H_2^* + H_3^* + H_4^* + \dots, \quad (3.1)$$

где

$$H_i^* = H_i(n_{11}^{(1)}Q_1 + n_{12}^{(1)}P_1, n_{11}^{(2)}Q_2 + n_{12}^{(2)}P_2, n_{21}^{(1)}Q_1 + n_{22}^{(1)}P_1, n_{21}^{(2)}Q_2 + n_{22}^{(2)}P_2, \nu). \quad (3.2)$$

Теперь построим симплектическое отображение, генерируемое канонической системой с гамильтонианом (3.1).

$$\begin{pmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q_1^{(0)} - \frac{\partial F_3}{\partial P_1^{(0)}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_3}{\partial P_1^{(0)} \partial Q_i^{(0)}} \frac{\partial F_3}{\partial P_i^{(0)}} - \frac{\partial F_4}{\partial P_1^{(0)}} + O_4 \\ Q_2^{(0)} - \frac{\partial F_3}{\partial P_2^{(0)}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_3}{\partial P_2^{(0)} \partial Q_i^{(0)}} \frac{\partial F_3}{\partial P_i^{(0)}} - \frac{\partial F_4}{\partial P_2^{(0)}} + O_4 \\ P_1^{(0)} + \frac{\partial F_3}{\partial Q_1^{(0)}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_1^{(0)} \partial Q_i^{(0)}} \frac{\partial F_3}{\partial P_i^{(0)}} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_1^{(0)}} + O_4 \\ P_2^{(0)} + \frac{\partial F_3}{\partial Q_2^{(0)}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_2^{(0)} \partial Q_i^{(0)}} \frac{\partial F_3}{\partial P_i^{(0)}} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_2^{(0)}} + O_4 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

Формы  $F_k$  ( $k = 3, 4$ ) имеют вид

$$F_k(Q_1^{(0)}, Q_2^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}) = \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2=k} f_{i_1 i_2 j_1 j_2} Q_1^{(0) i_1} Q_2^{(0) i_2} P_1^{(0) j_1} P_2^{(0) j_2} \quad (k = 3, 4) \quad (3.4)$$

где  $f_{i_1 i_2 j_1 j_2} = \varphi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(2\pi)$ . Функции  $\varphi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(\nu)$  удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{d\varphi_{i_1 i_2 j_1 j_2}}{d\nu} = g_{i_1 i_2 j_1 j_2} \quad (i_1 + i_2 + j_1 + j_2 = 3, 4) \quad (3.5)$$

с начальными условиями  $\varphi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(0) = 0$ .

Величины  $g_{i_1 i_2 j_1 j_2}$  в правых частях уравнений (3.5) являются коэффициентами форм

$$G_k(U_1, U_2, V_1, V_2, \nu) = \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2=k} g_{i_1 i_2 j_1 j_2} U_1^{i_1} U_2^{i_2} V_1^{j_1} V_2^{j_2} \quad (k=3,4) \quad (3.6)$$

Явные выражения для коэффициентов  $g_{i_1 i_2 j_1 j_2}$  форм  $G_k$  ( $k=3,4$ ) получаются из следующих соотношений

$$G_3 = -\Gamma_3, \quad G_4 = -\Gamma_4 - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial V_i} \frac{\partial \Phi_3}{\partial U_i}, \quad (3.7)$$

где  $\Phi_3(U_1, U_2, V_1, V_2, \nu)$  -- форма третьей степени с коэффициентами  $\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(\nu)$ , то есть

$$\Phi_3(U_1, U_2, V_1, V_2, \nu) = \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2=3} \phi_{i_1 i_2 j_1 j_2} U_1^{i_1} U_2^{i_2} V_1^{j_1} V_2^{j_2}. \quad (3.8)$$

Формы  $\Gamma_k(U_1, U_2, V_1, V_2, \nu)$  получены подстановкой

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}(\nu) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

в формы  $H_k^*(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$  ( $k=3,4$ ). Элементы матрицы  $\mathbf{Y}(\nu)$  удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dy_{ij}}{d\nu} = \frac{\partial H_2^{(j)}}{\partial y_{i+2,j}}, \quad \frac{dy_{i+2,j}}{d\nu} = -\frac{\partial H_2^{(j)}}{\partial y_{ij}}, \quad (3.10)$$

$$H_2^{(j)} = H_2^*(y_{1j}, y_{2j}, y_{3j}, y_{4j}, \nu), \quad (i=1,2; \quad j=1,2,3,4)$$

с начальным условием  $\mathbf{Y}(0) = E_4$ , где  $E_4$  - единичная матрица четвертого порядка.

Таким образом, интегрируя систему из 71 уравнения (55 уравнений (3.5) для  $\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}$  и 16 уравнений (3.10) для  $y_{ij}$ ) на интервале  $[0, 2\pi]$ , мы получим коэффициенты форм  $F_3$  и  $F_4$ . В общем случае, интегрирование может быть проведено только численно.

Отметим, что в (3.3) матрица  $\mathbf{G}$  имеет вид (2.5). Таким образом, в переменных  $Q_i, P_i$ , мы получили симплектическое отображение с уже нормализованными линейными членами. Нелинейная нормализация может быть проведена при помощи канонического, близкого к тождественному преобразования

$$Q_i, P_i \rightarrow \xi_i, \eta_i \quad P_j = \eta_j + \frac{\partial R}{\partial Q_j}, \quad \xi_j = Q_j + \frac{\partial R}{\partial \eta_j} \quad (j=1,2) \quad (3.11)$$

где функция  $R$  является полиномом переменных  $Q_i, \eta_i$  ( $i=1,2$ ), а ее коэффициенты выбираются таким образом, чтобы симплектическое отображение (3.3) в новых переменных  $\xi_i, \eta_i$  имело наиболее простую форму. Метод нелинейной нормализации отображения (3.3) подробно описан в [11]. Там же были получены явные выражения для коэффициентов нормализованного отображения через коэффициенты  $f_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ . Зная нормализованное отображение, можно построить соответствующую ему гамильтонову систему (см., например, [12]) и, таким образом, получить нормальную форму исходного гамильтониана задачи.

При нелинейном анализе устойчивости приходится отдельно рассматривать нерезонансный и резонансные случаи. Обычно, бывает достаточно принять во

внимание лишь резонансы до четвертого порядка включительно. В данной работе мы исследуем устойчивость в нерезонансном случае и случаях резонансов третьего и четвертого порядков.

Перейдем к полярным координатам  $\varphi_i, r_i$  ( $i = 1, 2$ )

$$\xi_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad \eta_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$$

и выпишем вид нормальной формы гамильтониана для всех выше упомянутых случаев [12].

1. Если отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно, т.е., ( $n \in \mathbb{Z}$ ) для  $0 < |k_1| + |k_2| \leq 4$ , то нормализованный гамильтониан имеет следующий вид

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right). \quad (3.12)$$

2. При резонансе третьего порядка, т.е. при  $k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 = n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $|k_1| + |k_2| = 3$ , нормальная форма записывается так

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + \frac{\sqrt{2}}{4\pi} r_1^{k_1/2} r_2^{k_2/2} (a_{k_1 k_2} \sin \gamma + b_{k_1 k_2} \cos \gamma) + O\left((r_1 + r_2)^2\right). \quad (3.13)$$

3. При резонансе четвертого порядка, т.е. при  $k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 = n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $|k_1| + |k_2| = 4$ , имеем

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + r_1^{k_1/2} r_2^{k_2/2} (a_{k_1 k_2} \sin \gamma + b_{k_1 k_2} \cos \gamma) + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right), \quad (3.14)$$

где  $\gamma = k_1 \varphi_{(1)} + k_2 \varphi_2 - n \nu$ .

В [11] были получены явные выражения для коэффициентов  $c_{20}, c_{11}, c_{02}, a_{k_1 k_2}, b_{k_1 k_2}$  через коэффициенты  $f_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ . В общем случае эти выражения довольно

громоздки, однако для рассматриваемой задачи они упрощаются, благодаря особой структуре гамильтониана (1.5). Действительно, можно заметить, что гамильтониана (1.5) не содержит членов нечетных степеней относительно переменных  $q_2, p_2$ . Более того, он имеет ту же самую структуру в переменных  $Q_2, P_2$ . Поэтому значительная часть коэффициентов  $f_{i_1 i_2 j_1 j_2}$  в правой части симплектического отображения (3.3) обращаются в ноль. В частности,

$$\begin{aligned} f_{0003} &= f_{0021} = f_{0102} = f_{0120} = f_{0201} = f_{0300} = f_{1011} = f_{1110} = f_{2001} = f_{2100} = 0, \\ f_{0013} &= f_{0031} = f_{0112} = f_{0130} = f_{0211} = f_{0310} = f_{1003} = f_{1021} = 0, \\ f_{1102} &= f_{1120} = f_{1201} = f_{1300} = f_{2011} = f_{2110} = f_{3001} = f_{3100} = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В приложении приведены формулы для коэффициентов  $c_{20}, c_{11}, c_{02}, a_{k_1 k_2}, b_{k_1 k_2}$ , полученные с учетом (3.15).

### Нелинейный анализ устойчивости

Приведем сначала достаточные условия, позволяющие делать выводы об устойчивости неавтономной периодической системы с двумя степенями свободы на основании коэффициентов нормальной формы ее функции Гамильтона.

Предположим, что в системе отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно, тогда гамильтониан представим в виде (3.12) и выполняются следующие достаточные условия устойчивости

1. Если выполняется неравенство [13]

$$c_{11}^2 - 4c_{02}c_{20} \neq 0, \quad (4.1)$$

то положение равновесия канонической системы с гамильтонианом (3.12) устойчиво для большинства начальных условий.

2. Более того [12, 14], если для  $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$  функция

$$F(r_1, r_2) = c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 \quad (4.2)$$

является знакоопределенной, то положение равновесия канонической системы с гамильтонианом (3.12) формально устойчиво.

Пусть теперь имеет место резонанс третьего или четвертого порядка, т.е.  $k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 = n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $|k_1| + |k_2| = 3, 4$ .

1. Если при наличии резонанса третьего порядка выполняется неравенство

$$a_{k_1k_2}^2 + b_{k_1k_2}^2 \neq 0, \quad (4.3)$$

то положение равновесия канонической системы с гамильтонианом (3.13) неустойчиво [12].

2. Если при резонансе четвертого порядка выполняется неравенство

$$|F(k_1, k_2)| > k_1^{\frac{1}{2}k_1} k_2^{\frac{1}{2}k_2} \sqrt{a_{k_1k_2}^2 + b_{k_1k_2}^2}, \quad (4.4)$$

то положение равновесия канонической системы с гамильтонианом (3.14) устойчиво в третьем приближении, иначе неустойчиво. [12].

В дальнейшем будем предполагать, что  $k_1k_2 \geq 0$  поскольку только такие резонансы могут привести систему к неустойчивости в нелинейном приближении [15].

Нелинейный анализ устойчивости на интервале  $0 < e < 0.06904107039$  был проведен следующим образом. Сначала, для значений эксцентриситета из данного интервала, используя алгоритм, приведенный в предыдущем разделе, было построено симплектическое отображение (3.3), затем были рассчитаны коэффициенты нормальных форм (3.12), (3.13), (3.14), и, наконец, на основании достаточных условий (4.1), (4.2) или (4.3), (4.4), были получены выводы об устойчивости вращения (1.2).

Для нерезонансного случая результаты анализа устойчивости приведены в таблице 1. За исключением нескольких резонансных и одной особой точки, решение (1.2) формально устойчиво в подобласти  $F_1$  и устойчиво для большинства начальных условий в подобластях  $I_1$  и  $I_2$ . Для особой точки  $e = 0.05665469653139$  условие (4.1) не выполнено, т.е.  $c_{11}^2 - 4c_{02}c_{20} = 0$ . Это означает, что при данном значении эксцентриситета для решения вопроса об устойчивости вращения (1.2) требуется проведение нелинейного анализа с учетом членов выше четвертой степени в разложении гамильтониана.

Таблица 1. Результаты анализа устойчивости в нерезонансных случаях

| Подобласть                    | Выводы об устойчивости (кроме резонансных и особых точек) |
|-------------------------------|---|
| $I_1 = (0, 0.05665469653139)$ | устойчивость для большинства начальных условий            |
| $F_1 = (0.0566546965314,$     | формальная устойчивость                                   |

|  |  |
|--|--|
| 0.059881351681)                          |  |
| $I_2 = (0.0598813516814, 0.06904107039)$ | устойчивость для большинства начальных условий |

Поскольку для рассматриваемой гамильтоновой системы выполняются равенства (3.15), то нетрудно показать, что в случае резонанса третьего порядка  $2\sigma_1 + \sigma_2 = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  коэффициенты  $a_{21}$  и  $b_{21}$  гамильтониана (3.13) будут равны нулю, т.е. резонансная часть в нормализованном гамильтониане исчезает. Поэтому данный резонанс не потребовал отдельного исследования и был рассмотрен в рамках анализа устойчивости в нерезонансном случае. В других резонансных случаях устойчивость исследовалась отдельно. Результаты этого исследования представлены в таблице 2

Таблица 2. Результаты исследования устойчивости в случаях резонансов третьего и четвертого порядков

| Тип резонанса   | Значение эксцентриситета | Подобласть | Выводы об устойчивости |
|-----------------|--------------------------|------------|------------------------|
| $3\sigma_1 = 1$ | 0.059881351681           | $F_1, I_2$ | неустойчивость         |
| $4\sigma_1 = 1$ | 0.048966897164           | $I_1$      | неустойчивость         |

|                             |                |             |                                    |
|-----------------------------|----------------|-------------|------------------------------------|
| $3\sigma_1 + \sigma_2 = -1$ | 0.037096796907 | $I_1$       | устойчивость в третьем приближении |
| $4\sigma_2 = 1$             | 0.068824624602 | $F_2^{(1)}$ | устойчивость в третьем приближении |

В третьем столбце таблицы 2 указано, в какой подобласти лежит резонансное значение эксцентриситета, если оно является граничным для двух областей, то указаны обе области.

*Исследование выполнено за счет средств гранта РНФ № 14-21-00068 в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).*

## **Приложение.**

$$\alpha_{3000} = \beta_{0030} = \frac{1}{4\pi} [(f_{1020} - f_{3000}) + (f_{0030} - f_{2010})],$$

$$\alpha_{0030} = \beta_{3000} = \frac{1}{4\pi} [(f_{1020} - f_{3000}) - (f_{0030} - f_{2010})]$$

$$\alpha_{1200} = \beta_{0012} = \frac{1}{4\pi} [(f_{0111} + f_{1002} - f_{1200}) - (f_{0012} - f_{0210} - f_{1101})],$$

$$\alpha_{0012} = \beta_{1200} = \frac{1}{4\pi} [(f_{0111} + f_{1002} - f_{1200}) + (f_{0012} - f_{0210} - f_{1101})]$$

$$\begin{aligned}
c_{11} = & -\frac{1}{8\pi} \left[ 2((f_{1020} + 3f_{3000})(f_{1002} + f_{1200}) + (3f_{0030} + f_{2010})(f_{0012} + f_{0210})) \cot(\pi\sigma_1) + \right. \\
& + ((f_{0012} - f_{0210})(f_{0012} - f_{0210} - 2f_{1101}) + (f_{1002} - f_{1200})(f_{1002} + 2f_{0111} - f_{1200}) + \\
& + f_{1101}^2 + f_{0111}^2) \cot \pi(\sigma_1 + 2\sigma_2) - ((f_{0012} - f_{0210})(f_{0012} - f_{0210} + 2f_{1101}) + \\
& + (f_{1002} - f_{1200})(f_{1002} - 2f_{0111} - f_{1200}) + f_{1101}^2 + f_{0111}^2) \cot \pi(\sigma_1 - 2\sigma_2) - \\
& 2(2f_{0111} + f_{1020} + 3f_{3000})(f_{0012} + f_{0210}) + 4f_{0022} + 4f_{2002} - \\
& \left. - 2(f_{1002} + f_{1200})(3f_{0030} + 2f_{1101} + f_{2010}) + 4f_{0220} + 4f_{2200} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{20} = & -\frac{1}{32\pi} \left[ 3((3f_{0030} + f_{2010})^2 + (f_{1020} + 3f_{3000})^2) \cot(\pi\sigma_1) + \right. \\
& + 9((f_{0030} - f_{2010})^2 + (f_{1020} - f_{3000})^2) \cot(3\pi\sigma_1) - \\
& \left. - 36(f_{1020} + f_{3000})(f_{0030} + f_{2010}) + 16f_{2010}f_{1020} + 8f_{2020} + 24f_{0040} + 24f_{4000} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{02} = & -\frac{1}{32\pi} \left[ 4((f_{1002} + f_{1200})^2 + (f_{0012} + f_{0210})^2) \cot(\pi\sigma_1) + ((f_{0012} - f_{0210})(f_{0012} - f_{0210} - 2f_{1101}) + \right. \\
& + (f_{1002} - f_{1200})(f_{1002} + 2f_{0111} - f_{1200}) + f_{1101}^2 + f_{0111}^2) \cot \pi(\sigma_1 + 2\sigma_2) + \\
& + ((f_{0012} - f_{0210})(f_{0012} - f_{0210} + 2f_{1101}) + \\
& + (f_{1002} - f_{1200})(f_{1002} - 2f_{0111} - f_{1200}) + f_{1101}^2 + f_{0111}^2) \cot \pi(\sigma_1 - 2\sigma_2) - \\
& \left. - 4(f_{1200} + 3f_{1002})f_{0012} - 4(3f_{1200} + f_{1002})f_{0210} - 4f_{0111}f_{1101} + 24f_{0004} + 24f_{0400} + 8f_{0202} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{40} = & \frac{1}{4\pi} \left[ (f_{0030}f_{1020} - f_{2010}f_{3000}) 3\cot(\pi\sigma_1) + f_{1020}(f_{1020} - 3f_{3000}) - \right. \\
& \left. - f_{2010}(f_{2010} - 3f_{0030}) - f_{1030} + f_{3010} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{40} = & \frac{1}{16\pi} \left[ ((f_{1020} - 3f_{3000})^2 + (f_{2010} - 3f_{0030})^2 - 4f_{1020}^2 - \right. \\
& - 4f_{2010}^2) \cot(\pi\sigma_1) - 2(f_{1020} - 3f_{3000})(f_{2010} - 3f_{0030}) - \\
& \left. - 8f_{2010}f_{1020} - 4f_{4000} - 4f_{0040} + 4f_{2020} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{04} = & \frac{1}{8\pi} \left[ ((f_{1200} - f_{1002})f_{1101} - (f_{0012} - f_{0210})f_{0111}) \cot \pi(\sigma_1 - 2\sigma_2) + \right. \\
& \left. + (f_{0012} - f_{0210})f_{1101} + (f_{1002} - f_{1200})f_{0111} + 2f_{0301} - 2f_{0103} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{04} = & -\frac{1}{16\pi} \left[ ((f_{0012} - f_{0210})^2 + (f_{1002} - f_{1200})^2 - f_{0111}^2 - \right. \\
& - f_{1101}^2) \cot \pi(\sigma_1 - 2\sigma_2) - 2(f_{1002} - f_{1200})(f_{0012} - f_{0210}) + \\
& \left. + 2f_{0111}f_{1101} + 4f_{0400} - 4f_{0202} + 4f_{0004} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} = & \frac{1}{16\pi} \left[ ((f_{1002} + f_{0111} - f_{1200})(3f_{0030} + 4f_{0012} + 4f_{0210} + f_{2010}) + \right. \\
& + (f_{0012} - f_{0210} - f_{1101})(4f_{1200} + 4f_{1002} + f_{1020} + 3f_{3000})) \cot(\pi\sigma_1) - \\
& - (3(f_{0111} - f_{1002} + f_{1200})(f_{0030} - f_{2010}) + \\
& + 3(f_{1020} - f_{3000})(f_{0012} - f_{0210} + f_{1101})) \cot 3(\pi\sigma_1) + \\
& + 2(f_{0111} - 2f_{1200})(f_{0111} + 2f_{1002}) - 2(f_{1101} + 2f_{0210})(f_{1101} - 2f_{0012}) + \\
& + 4f_{1020}(f_{1002} - f_{1200}) + 4f_{2010}(f_{0012} - f_{0210}) - 2(f_{2010} - 3f_{0030})f_{1101} + \\
& \left. + 2(f_{1020} - 3f_{3000})f_{0111} - 4f_{0121} - 4f_{1012} + 4f_{1210} + 4f_{2101} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{22} = & \frac{1}{16\pi} \left[ ((f_{0012} - f_{0210} - f_{1101})(3f_{0030} + 4f_{0012} + 4f_{0210} + f_{2010}) - \right. \\
& - (4f_{1200} + 4f_{1002} + f_{1020} + 3f_{3000})(f_{1002} + f_{0111} - f_{1200})) \cot(\pi\sigma_1) + \\
& + 3((f_{1020} - f_{3000})(f_{0111} - f_{1002} + f_{1200}) - \\
& - (f_{0030} - f_{2010})(f_{0012} - f_{0210} + f_{1101})) \cot 3(\pi\sigma_1) + \\
& + 2(2f_{0111} + f_{1020} - 3f_{3000})(f_{0012} - f_{0210}) - 2f_{0111}(f_{1101} + 2f_{2010}) + \\
& + 2(f_{1002} - f_{1200})(3f_{0030} - 2f_{1101} - f_{2010}) - 2f_{1101}(f_{0111} + 2f_{1020}) - \\
& \left. - 8f_{0012}f_{1200} - 8f_{0210}f_{1002} - 4f_{2200} + 4f_{2002} + 4f_{0220} - 4f_{0022} + 4f_{1111} \right]
\end{aligned}$$

### Библиографический список

1. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. - М-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. - 396 с.
2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. - М.: Наука, 1965. - 416 с.

3. Хентов А.А.. Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс // Космические исследования. 1968. Т. 6. №5. С. 793-795.
4. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // Известия РАН. Механика твердого тела. 2004. №6. С. 3-12.
5. Маркеев А.П. Об одном способе аналитического представления отображений, сохраняющих площадь // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. № 5. С. 611-624.
6. Чуркина Т.Е. Об устойчивости одного плоского резонансного движения спутника при наличии пространственных возмущений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. №4. С. 14-25.
7. Маркеев А.П., Бардин Б.С. Об одном плоском вращательном движении спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. 1994. Т. 32. №6. С. 43-49.
8. Бардин Б.С., Чекин А.М. Об орбитальной устойчивости плоских вращений спутника-пластинки на круговой орбите // Вестник Московского авиационного института. 2007. Т.14. №2. С. 23-36.
9. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ, 2016, №85:  
<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=65212>
10. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1965. – 532 с.

11. Маркеев А.П. Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана // Прикладная математика и механика. 2005. Т.69. №3 С. 355-371.
12. Маркеев Л.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. - М.: Наука, 1978. - 312с.
13. Арнольд В.И. Математические методы классической механики // М.: - Наука, 1979. – 472 с.
14. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems. *Communs. Pure Appl. Math.*, 1964, 17(4):509-526.
15. Moser J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems. *Communs. Pure Appl. Math.*, 1958, 11(1):81-114.
16. Безгласный С.П., Краснов М.В., Мухаметзянова А.А. Параметрическое управление плоскими движениями спутника-гантели // Труды МАИ, 2015, № 82: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=58455>