

УДК 629.78:351.814.3

## **Разработка алгоритмов управления и исследование динамического поведения спутника с большим вращающимся солнечным парусом**

Е.А. Черемных, А.В. Зыков

### **Аннотация**

Изложены результаты исследования динамики движения составного космического аппарата (КА) с вращающимся бескаркасным солнечным парусом и управляющим силовым гироскопом в подвесе Гука. Солнечный парус используется для передачи импульса объекту управления, а его центральная жесткая вставка – момента импульса. Доказана устойчивость стационарной формы вращающейся мембраны при регулярной прецессии прямым методом Ляпунова. На основе модальной декомпозиции гибкого вращающегося диска предложена система управления с адаптивным наблюдателем, предназначенная для активного демпфирования упругих колебаний солнечного паруса.

### **Ключевые слова**

системы управления движением; теория колебаний; солнечный парус.

### **Введение**

Солнечный парус может использоваться для орбитального управления КА вместо привычной реактивной двигательной установки, чья масса может составлять 200-300 кг. На основании предварительных расчетов для спутника массой 200 кг и давления солнечного ветра  $5 \cdot 10^{-6}$  Н/м<sup>2</sup> масса солнечного паруса составит всего 20 кг. Таким образом, возможно увеличение относительной массы приборного отсека спутника за счет использования солнечного паруса.

Статья посвящена разработке алгоритмов управления таким КА и исследованию

динамического поведения солнечного паруса.

### Состав КА

КА состоит из приборного отсека с панелями солнечных батарей, вражающего пленочного отражателя с центральной жесткой вставкой и компенсирующего маховика (силового гироскопа), которые шарнирно соединены с корпусом корабля (рис.1). Силовой гироскоп предназначен для компенсации кинетического момента вращающейся пленки, растянутой центробежными силами инерции.

Солнечный парус используется для осуществления как орбитальных (коррекция орбиты), так и угловых маневров (поиск и поддержание ориентации) только за счет моментов и сил солнечного давления. Система «парус–силовой гироскоп» обладает скрытым кинетическим моментом, что позволяет спутнику совершать пространственные угловые маневры за счет гироскопического момента, возникающего при отклонении оси вращения ротора компенсирующего гироскопа от оси вращения паруса. Вокруг оси вращения приборный отсек стабилизируется, используя изменения скорости вращения ротора.

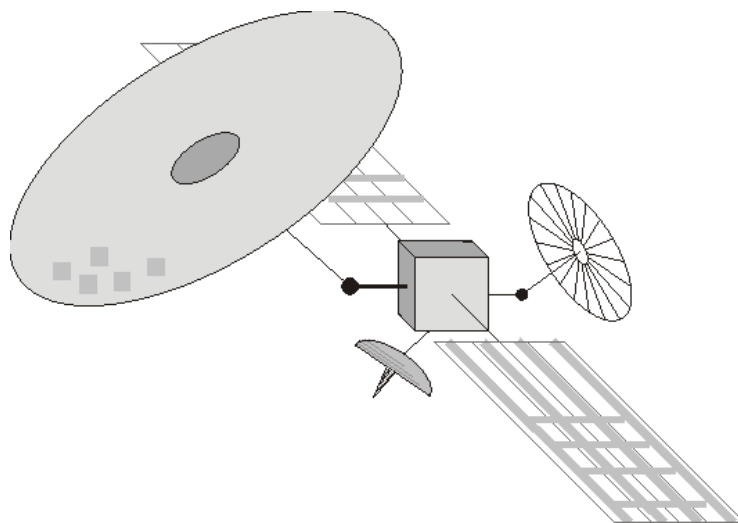


Рис. 1. Объект управления.

### Модальная декомпозиция вращающейся мембраны

Рассмотрим уравнение напряженно-деформированного состояния мембраны во вращающейся системе координат (ВСК), связанной с недеформированным полотном паруса [1]:

$$\Omega^2 \frac{3+\mu}{8} \left( R^2 - r^2 + \frac{a^2 R^2}{r^2} \frac{1-\mu}{1+\mu} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \Omega^2 \frac{3+\mu}{8} \left( R^2 - r^2 \frac{1+3\mu}{3+\mu} + \frac{a^2 R^2}{r^2} \frac{1-\mu}{1+\mu} \right) \cdot \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right) -$$

$$-\Omega^2 \cdot r \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\Omega \cdot \omega \cdot r \cdot \cos(\varphi - \Omega t) + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot r \cdot \sin(\varphi - \Omega t) + \dot{\omega} \cdot w$$
(1)

со следующими граничными условиями:

$$w(r, \varphi, t) = w(r, \varphi + 2\pi, t), \quad \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} = \frac{\partial w(r, \varphi + 2\pi, t)}{\partial \varphi};$$

$$w(a, \varphi, t) = 0, \quad w(R, \varphi, t) \text{-ограничено};$$
(2)

$$w(a, \varphi, 0) = w_0, \quad \frac{\partial w(r, \varphi, 0)}{\partial t} = \dot{w}_0,$$

где  $w(r, \varphi, t)$  – линейное смещение (деформации) из плоскости вращения мембраны;  $r, \varphi$  – полярные координаты;  $a = 5 \text{ м}$  – внутренний радиус мембраны;  $R = 50 \text{ м}$  – внешний радиус мембраны;  $\rho$  – плотность материала мембраны;  $\mu = 0.3$  – коэффициент Пуассона материала мембраны;  $\Omega = 1 \text{ рад/с}$  – угловая скорость вращения мембраны.

Используя метод разделения переменных Фурье, уравнение (1) в радиальном направлении сводится к задаче Штурма-Лиувилля для гипергеометрического уравнения (собственными функциями будут полиномы Якоби), в тангенциальном направлении – к задаче Штурма-Лиувилля для осцилляционного уравнения с периодическими граничными условиями, и по времени – к задаче Коши.

Итак, получившееся решение уравнения (1) через систему ортогональных полиномов Якоби может быть представлено в виде [2]:

$$w(x, \varphi, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{p,n} \cdot \cos(\lambda_{p,n} t + \theta_{p,n}) \cdot \cos p\varphi \cdot \frac{x^{-p}}{(p+1) \dots (p+n+1)} \cdot \frac{d^n}{d(x^2)^n} \cdot \left[ (x^2)^{p+n} (1-x^2)^n \right] \right\},$$

где  $\frac{x^{-p}}{(p+1) \dots (p+n+1)} \cdot \frac{d^n}{d(x^2)^n} \cdot \left[ (x^2)^{p+n} (1-x^2)^n \right] = F(-n, n+p+1, p+1, x^2)$  – полиномы Якоби,

амплитуды  $A_{p,n}$  и фазы  $\theta_{p,n}$  определяются из начальных условий; переменная  $x$  связана с текущим радиусом соотношением  $x = (r-a)/(R-a)$ ;  $p = 0, 1..$  - число узловых диаметров;  $n = 0, 1..$  - число узловых окружностей, и собственные частоты упругих колебаний:

$$\lambda_{p,n} = \frac{\Omega}{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{(R-a)}} \cdot \sqrt{(6+2\mu) \cdot [n^2 + n \cdot (p+1)] + (1-\mu) \cdot p^2 + (3+\mu) \cdot p}.$$

Для дальнейших исследований требуется провести модальную декомпозицию солнечного паруса в приборной системе координат (ПСК). При переходе из ВСК в ПСК собственные частоты аксиальных кососимметричных колебаний паруса для каждой формы колебаний раздваиваются на нутационную и прецессионную частоты. Физический смысл этого заключается в том, что две бегущие в противоположных направлениях волны упругих деформаций имеют в ВСК одинаковые по величине фазовые скорости  $\pm\lambda_{p,n}$  и создают одну стоячую волну. В ПСК волна, бегущая по направлению вращения паруса, имеет большую скорость по сравнению с волной, бегущей против вращения, причем разность угловых скоростей равна  $2\Omega$ . Итак, решение в ПСК имеет следующий вид:

$$w(x, \varphi, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{p,n} \cdot \left[ \cos(p\varphi - (\lambda_{p,n} + \Omega)t - \theta_{p,n}) + \cos(p\varphi + (\lambda_{p,n} - \Omega)t + \theta_{p,n}) \right] \cdot F(-n, n + p + 1, p + 1, x^2) \right\}.$$

Рассмотрим пример с одним узловым диаметром и без узловых окружностей ( $p = 1, n = 0$ ), в этом случае

$$\begin{aligned} w(x, \varphi, t) &= A_{1,0} \cdot \left[ \cos(\varphi - (\lambda_{1,0} + \Omega)t) + \cos(\varphi + (\lambda_{1,0} - \Omega)t) \right] \cdot x = \\ &= A_{1,0} \cdot \left[ \cos\left(\varphi - \Omega \cdot \left(\sqrt{\frac{R}{R-a}} + 1\right)t\right) + \cos\left(\varphi + \Omega \cdot \left(\sqrt{\frac{R}{R-a}} - 1\right)t\right) \right] \cdot x. \end{aligned}$$

Данное выражение соответствует решению системы дифференциальных уравнений для жесткого гироскопа в упругом подвесе с частотой нутационных колебаний  $\Omega \cdot \left(\sqrt{\frac{R}{R-a}} + 1\right)$  и прецессионных колебаний  $\Omega \cdot \left(\sqrt{\frac{R}{R-a}} - 1\right)$  [3]. Таким образом, вращающийся парус можно заменить системой плоских гироскопов в упругих подвесах [4].

### Графики напряжений солнечного паруса

Исходное уравнение поперечных колебаний вращающейся с постоянной скоростью  $\Omega$  кольцеобразной пленки с внутренним радиусом  $a$  и внешним  $R$  берем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \sigma_r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\sigma_\varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) = \rho r \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (3)$$

с граничными условиями:  $W(a, \varphi, t) = 0$ ;  $\sigma_r \frac{\partial W(R, \varphi, t)}{\partial r} = 0$ .

После разделения переменных  $W(r, \varphi, t) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot T(t)$  краевая задача имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dr} \left( r \sigma_r \frac{dR}{dr} \right) + \left( \omega^2 \rho r - n^2 \frac{\sigma_\varphi}{r} \right) R = 0, \quad (4)$$

$$R(a) = 0, \quad \sigma_r \frac{dR}{dr} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow R_+$$

Во всех приводимых ниже графиках собственная функция задачи выглядит следующим образом:

$$V_{nk}(r, \varphi) = f_{nk}(r) \cos(n\varphi),$$

где номер  $n$  – число узловых диаметров, номер  $k$  – число узловых окружностей. Функции  $f_{nk}$  нормировались единичным значением на правом крае. Параметры моделирования динамического поведения солнечного паруса в среде Simulink MATLAB принимались равными:  $a = 5 \text{ м}$ ,  $R = 50 \text{ м}$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $\rho = 1425 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^4$ ,  $\Omega = 0.5 \text{ рад/с}$ .

Графики радиальной компоненты напряжений  $\sigma_r$  и тангенциальной составляющей  $\sigma_\varphi$  в зависимости от радиуса при данных значениях параметров показаны на рисунке 2:

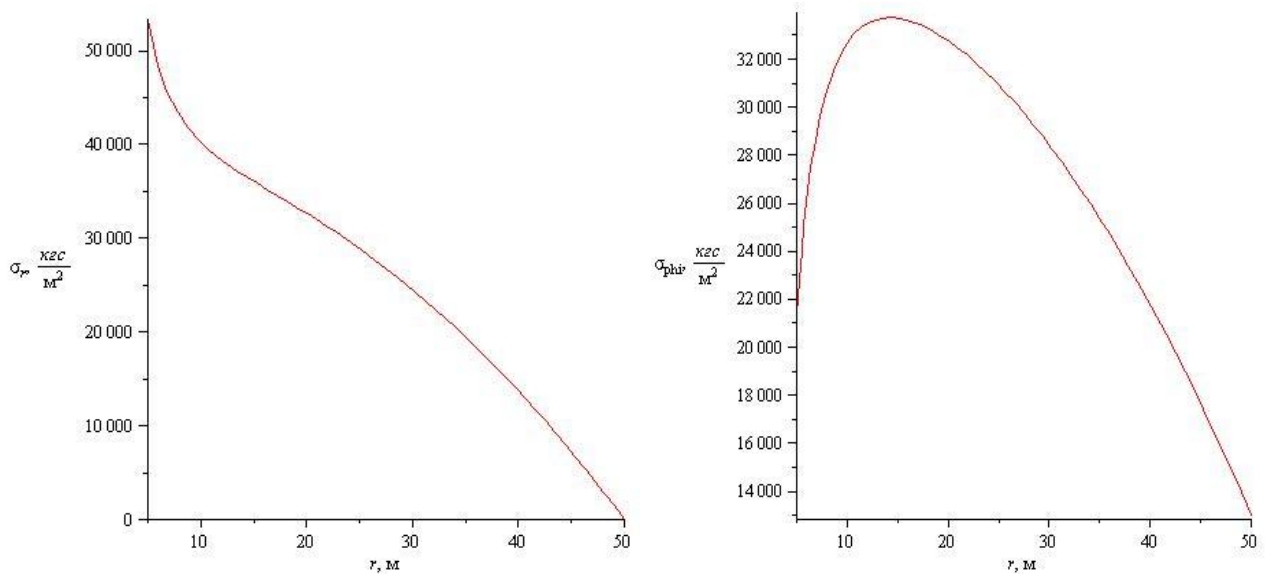


Рис. 2. Графики радиальной и тангенциальной составляющей напряжения.

Далее рассмотрим различные варианты графиков радиального профиля и собственных форм солнечного паруса в зависимости от числа узловых диаметров и узловых окружностей.

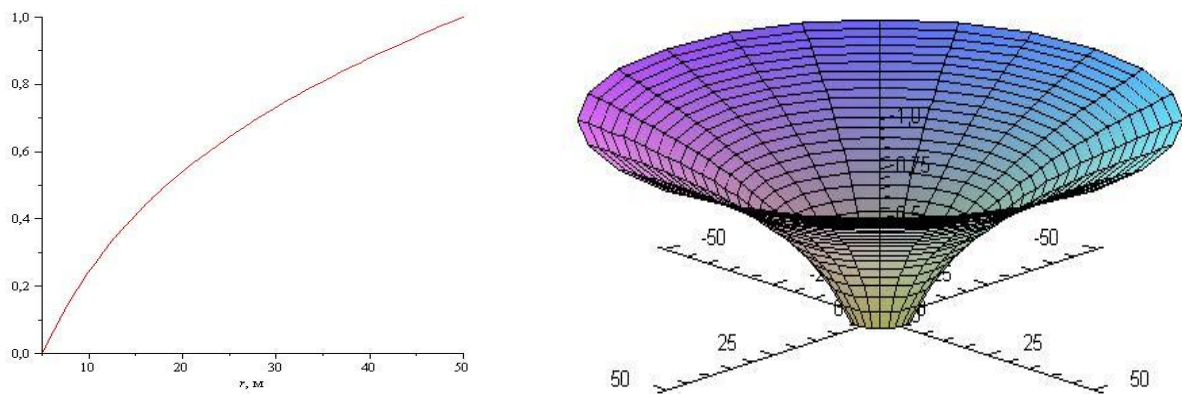


Рис. 3. Графики радиального профиля и собственной формы при  $n = 0$ ,  $k = 0$ .

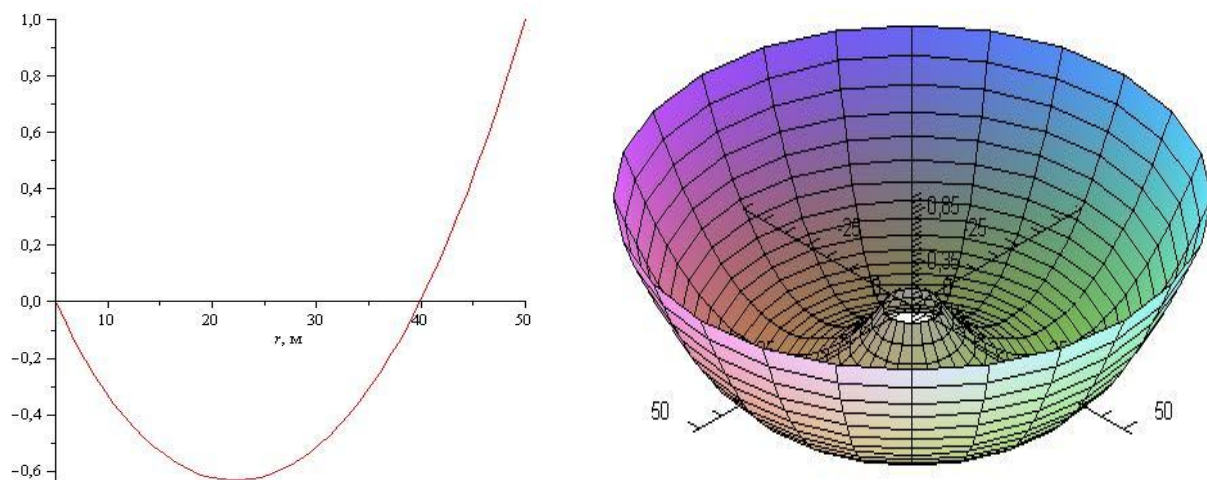


Рис. 4. Графики радиального профиля и собственной формы при  $n = 0$ ,  $k = 1$ .

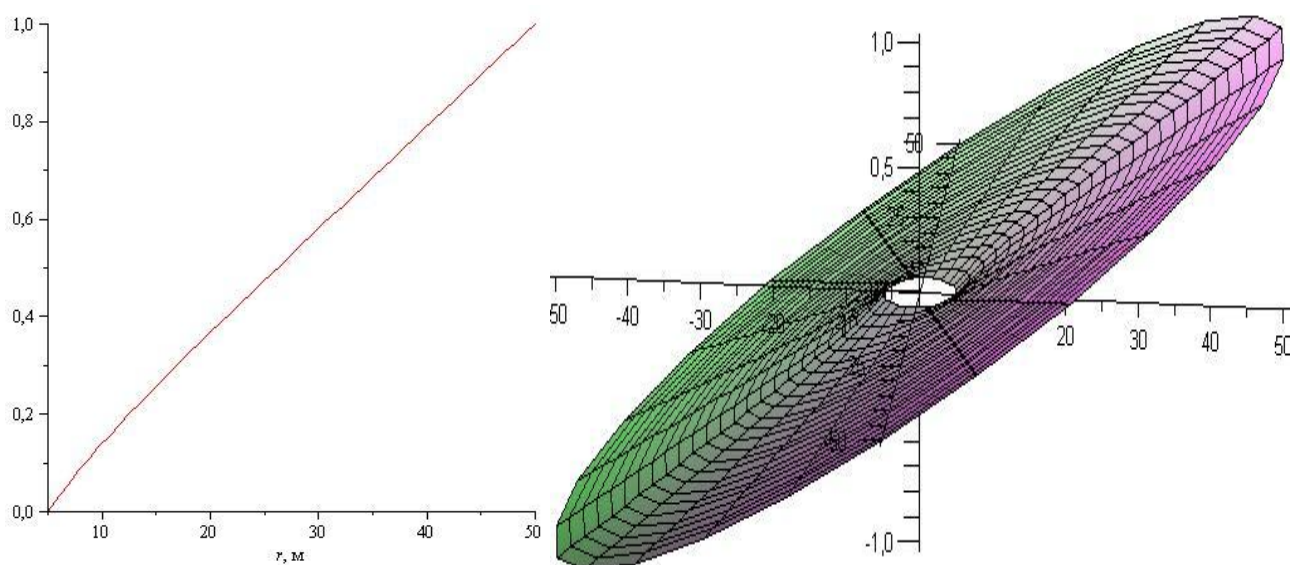


Рис. 5. Графики радиального профиля и собственной формы при  $n = 1$ ,  $k = 0$ .

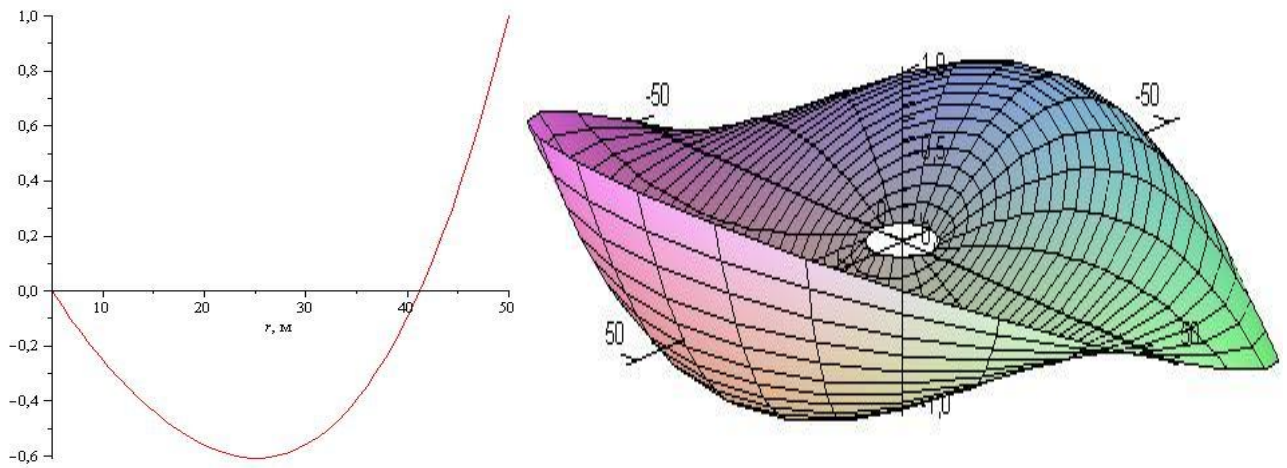


Рис. 6. Графики радиального профиля и собственной формы при  $n = 1, k = 1$ .

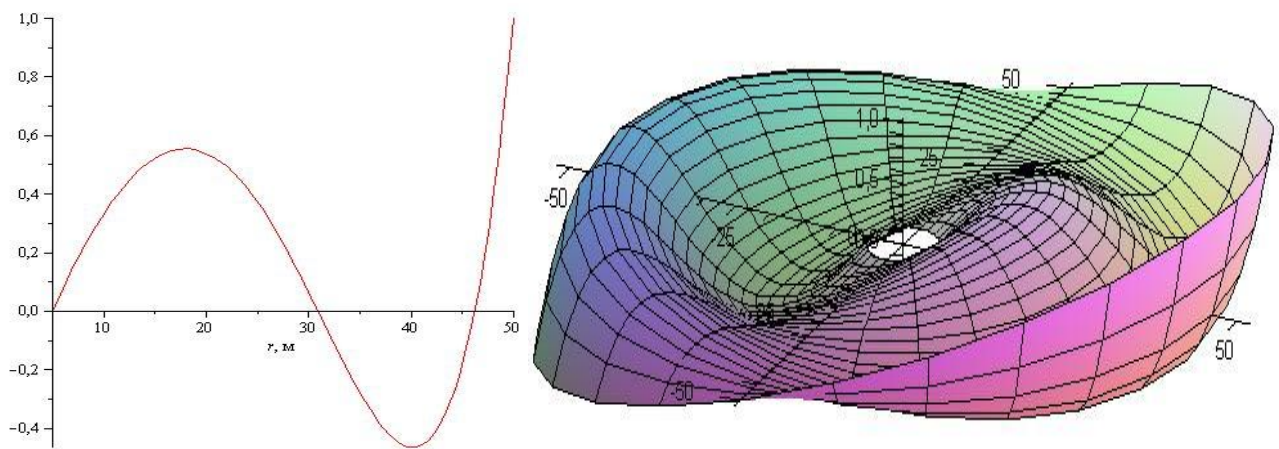


Рис. 7. Графики радиального профиля и собственной формы при  $n = 1, k = 2$ .

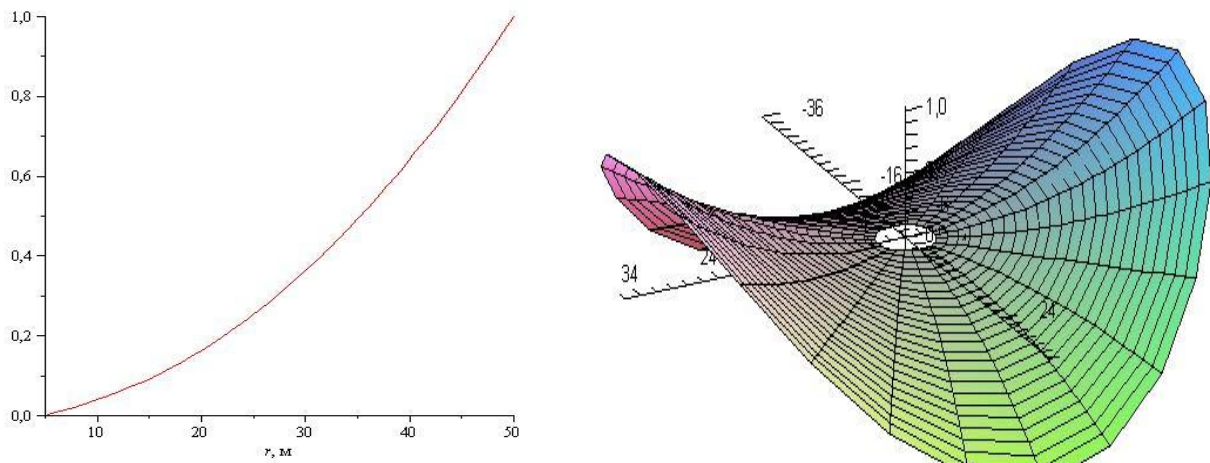


Рис. 8. Графики радиального профиля и собственной формы при  $n = 2, k = 0$ .

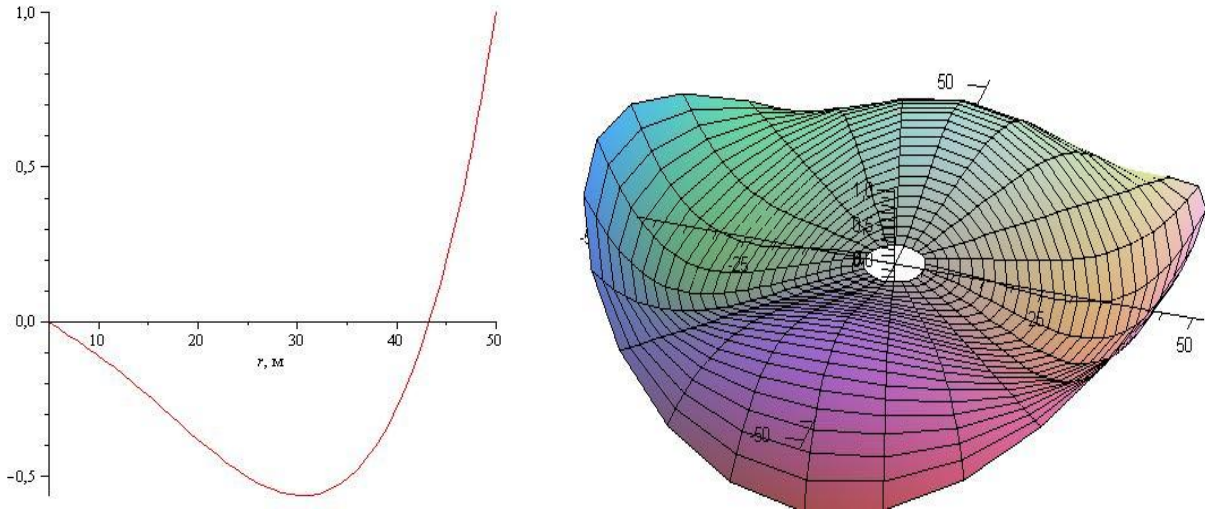


Рис. 9. Графики радиального профиля и собственной формы при  $n = 2$ ,  $k = 1$ .

### Анализ устойчивости равновесной формы при равномерной прецессии мембранного диска

Устойчивость равновесной формы поверхности мембранного диска при равномерной прецессии оси его вращения доказывается прямым методом Ляпунова.

Необходимо отметить, что в данном случае метод Ляпунова применяется к системе с распределенными параметрами, описываемой уравнением движения (1). В качестве аргументов функции Ляпунова выбираются поперечные мембранные усилия, которые являются линейными комбинациями от угловых перемещений  $\frac{\partial w}{\partial r}$  и  $\frac{\partial w}{r \partial \varphi}$  и скорости

поперечных перемещений  $\frac{\partial}{\partial t} w(r, \varphi, t)$ . Эти две переменные полностью описывают состояние любого элемента мембранного диска, для каждого из которых можно построить положительно определенную квадратичную форму от перечисленных переменных и, проинтегрировав по всей поверхности мембраны, получить функцию Ляпунова в виде:

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{3 + \mu}{8} \int_0^{2\pi} \int_a^R (R^2 - r^2) \left[ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2\omega}{3 + \mu} \cdot \left( \ln\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right) - 2 \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right) \cdot \cos(\varphi - \Omega t) \right]^2 r dr d\varphi + \\
 & + \frac{3 + \mu}{8} \int_0^{2\pi} \int_a^R \left( R^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} \right) \cdot \left[ \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{2\omega}{3 + \mu} \cdot \ln\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right) \cdot \sin(\varphi - \Omega t) \right]^2 r dr d\varphi + \\
 & + \frac{1}{\Omega^2} \int_0^{2\pi} \int_a^R \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\omega r}{3 + \mu} \cdot \ln\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right) \cdot \sin(\varphi - \Omega t) \right]^2 r dr d\varphi,
 \end{aligned}$$

принимаящую нулевое значение при подстановке в нее равновесной формы:



$$w(r, \varphi, t) = -\frac{2\omega \cdot r}{(3+\mu) \cdot \Omega} \ln\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right) \cos(\varphi - \Omega t), \quad (5)$$

которая является частным решением неоднородного уравнения (1).

Покажем, что в случае, когда поверхность мембранного диска принимает равновесную форму (5), производная по времени  $\frac{\partial V}{\partial t}$ , взятая в силу уравнений движения (1),

равна нулю.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{3+\mu}{8} 2 \int_0^{2\pi} \int_a^R (R^2 - r^2) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} + \frac{2\omega}{3+\mu} \left( \ln\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right) - \frac{2r^2}{R^2 - r^2} \right) \sin(\varphi - \Omega t) \right] \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2\omega}{\Omega(3+\mu)} \left( \ln\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right) - \frac{2r^2}{R^2 - r^2} \right) \cos(\varphi - \Omega t) \right] r dr d\varphi + \\ &+ \frac{3+\mu}{8} 2 \int_0^{2\pi} \int_a^R \left( R^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right) \left[ \frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi \partial t} + \frac{2\omega}{3+\mu} \ln\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right) \cos(\varphi - \Omega t) \right] \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{2\omega}{\Omega(3+\mu)} \ln\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right) \sin(\varphi - \Omega t) \right] r dr d\varphi + \\ &+ \frac{1}{\Omega^2} 2 \int_0^{2\pi} \int_a^R \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\omega \Omega r}{3+\mu} \ln\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right) \cos(\varphi - \Omega t) \right] \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2\omega r}{3+\mu} \ln\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right) \sin(\varphi - \Omega t) \right] r dr d\varphi \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, принимая во внимание граничные условия  $w(a, \varphi, t) = 0$ , где  $a$  - радиус центральной жесткой вставки,  $w(r, \varphi, t)$  - ограничено, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{3+\mu}{8} 2 \int_0^R \int_a^R \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2\omega r}{3+\mu} \ln\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-a^2}\right) \sin(\varphi - \Omega t) \right) \cdot \right. \\
&\cdot \left[ (R^2-r^2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2\omega}{\Omega(3+\mu)} \left( \frac{-6rR^2+2r^3}{(R^2-r^2)^2} \right) \cos(\varphi - \Omega t) \right) + \right. \\
&+ (R^2-3r^2) \left( \frac{\partial w}{r\partial r} + \frac{2\omega}{\Omega r(3+\mu)} \left( \ln\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-a^2}\right) - \frac{2r^2}{R^2-r^2} \right) \cos(\varphi - \Omega t) \right) \left. \right\} r dr d\varphi - \\
&- \frac{3+\mu}{8} 2 \int_0^R \int_a^R \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2\omega r}{3+\mu} \ln\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-a^2}\right) \sin(\varphi - \Omega t) \right) \cdot \right. \\
&\cdot \left[ \left( R^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right) \left( \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - \frac{2\omega}{\Omega r(3+\mu)} \ln\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-a^2}\right) \cos(\varphi - \Omega t) \right) \right. \left. \right\} r dr d\varphi + \\
&+ \frac{1}{\Omega^2} 2 \int_0^R \int_a^R \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2\omega r}{3+\mu} \ln\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-a^2}\right) \sin(\varphi - \Omega t) \right) \cdot \right. \\
&\cdot \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\omega r \Omega}{3+\mu} \ln\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-a^2}\right) \cos(\varphi - \Omega t) \right. \left. \right\} r dr d\varphi = \\
&= -2 \int_0^R \int_a^R \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2\omega r}{3+\mu} \ln\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-a^2}\right) \sin(\varphi - \Omega t) \right) \cdot \right. \\
&\cdot \left[ \frac{3+\mu}{8} \left( (R^2-r^2) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left( R^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right) \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + (R^2-3r^2) \frac{\partial w}{r\partial r} \right) - \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\omega r}{\Omega} \cos(\varphi - \Omega t) + \right. \\
&+ \left( \frac{2\omega r}{\Omega} + \frac{2\omega}{8\Omega r} (R^2-3r^2) \left( -\frac{2r^2}{R^2-r^2} \right) + \frac{2\omega}{8\Omega} (R^2-r^2) \left( \frac{-6rR^2+2r^3}{(R^2-r^2)^2} \right) \right) \cdot \cos(\varphi - \Omega t) + \\
&+ \left. \ln\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-a^2}\right) \left( \frac{2\omega}{8\Omega r} (R^2-3r^2) - \frac{2\omega}{8\Omega r} \left( R^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right) + \frac{2\omega r}{\Omega(3+\mu)} \right) \cdot \cos(\varphi - \Omega t) \right. \left. \right\} r dr d\varphi = \\
&= -2 \int_0^R \int_a^R \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2\omega r}{3+\mu} \ln\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-a^2}\right) \sin(\varphi - \Omega t) \right) \left[ \frac{2\omega}{8\Omega} \left( 8r - \frac{2r(R^2-3r^2)}{(R^2-r^2)} + \frac{-6rR^2+2r^3}{(R^2-r^2)} \right) \cos(\varphi - \Omega t) \right] r dr d\varphi = 0
\end{aligned}$$

Таким образом, устойчивость равновесной формы (5) доказана.

Отметим, что равенство нулю производной по времени, взятой в силу уравнений движения (1) от функции Ляпунова является следствием того, что она сконструирована из первого интеграла движения консервативной системы, а именно, из интеграла энергии мембранных усилий.

### Движение вокруг центра масс

Как показано выше, с помощью модальной декомпозиции солнечного паруса можно перейти к жесткому гироскопу в упругом подвесе. Объект управления рассматриваем по

частям (рис. 10).

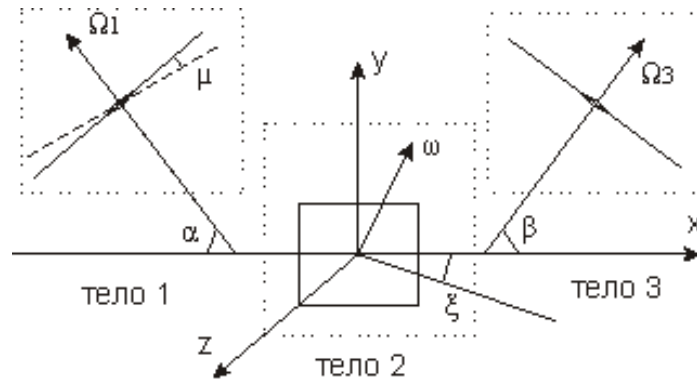


Рис. 10. Объект управления.

Тело 1 – вращающийся солнечный парус; тело 2 – приборный отсек; тело 3 – силовой гироскоп;  $\Omega_1, \Omega_3$  - скорости вращения тела 1 и тела 2;  $\alpha, \beta$  - углы слома осей вращения;  $\mu$  - угол между деформированным и недеформированным состоянием паруса;  $\xi$  - угол, связанный с осью чувствительности датчика угловой скорости;  $\omega$  - угловая скорость КА.

В итоге получаем следующие кинетические моменты каждого тела в ВСК:

$$\mathbf{h}_1 = \Lambda^T \mathbf{M}^T \mathbf{J}_1 (\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{M} \Lambda \boldsymbol{\omega}); \quad \mathbf{h}_2 = \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\Sigma} (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\xi}}); \quad \mathbf{h}_3 = \mathbf{N}^T \mathbf{J}_3 (\boldsymbol{\Omega}_3 + \mathbf{N} \boldsymbol{\omega}),$$

где  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$  - кинетические моменты каждого тела:

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} + \text{skew} \boldsymbol{\alpha}; \quad \Lambda = \mathbf{E} + \text{skew} \boldsymbol{\mu}; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{E} + \text{skew} \boldsymbol{\xi}; \quad \mathbf{N} = \mathbf{E} + \text{skew} \boldsymbol{\beta},$$

$\mathbf{E}$  - единичная матрица,  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$  - моменты инерции каждого тела:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = 2C_1; \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = 2C_3;$$

$A_1, C_1, J_x, J_y, J_z, A_3, C_3$  - компоненты моментов инерции;

$$\text{skew} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_0 & 0 \\ \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \text{матрица малого поворота.}$$

Применяем теорему об изменении кинетического момента ко всей системе:

$$\dot{\mathbf{h}}_1 + \dot{\mathbf{h}}_2 + \dot{\mathbf{h}}_3 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_3 = \mathbf{M}_{SP},$$

где  $\mathbf{M}_{SP}$  - момент сил солнечного давления.

После линеаризации в ВСК с точностью до второго порядка малости получаем следующие выражения для кинетических моментов:

$$h_1 = \begin{bmatrix} A_1\Omega_1 + (A_1 - C_1)(\alpha_z + \mu_z)\omega_y - (A_1 - C_1)(\alpha_y + \mu_y)\omega_z \\ A_1\Omega_1(\alpha_z + \mu_z) + C_1(\omega_y + \dot{\alpha}_y + \dot{\mu}_y) \\ -A_1\Omega_1(\alpha_y + \mu_y) + C_1(\omega_z + \dot{\alpha}_z + \dot{\mu}_z) \end{bmatrix};$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} (J_x - J_y)\xi_z\omega_y + (J_z - J_x)\xi_y\omega_z \\ J_y(\omega_y + \dot{\xi}_y) \\ J_z(\omega_z + \dot{\xi}_z) \end{bmatrix}; \quad h_3 = \begin{bmatrix} A_3\Omega_3 + (A_3 - C_3)\beta_z\omega_y - (A_3 - C_3)\beta_y\omega_z \\ C_3(\omega_y + \dot{\beta}_y) + A_3\beta_z\Omega_3 \\ C_3(\omega_z + \dot{\beta}_z) + A_3\beta_y\Omega_3 \end{bmatrix}.$$

Далее рассмотрим движение только вокруг поперечных осей вращающегося паруса.

### Построение адаптивного наблюдателя

Задача управления предложенным КА состоит в оценке упругих колебаний вращающегося солнечного паруса ( $\dot{\mu}$ ) по показаниям датчика угловой скорости ( $\dot{\xi}$ ), на основании чего формируется управляющий сигнал на привод качания оси вращения паруса с целью активного демпфирования колебаний. Для этой цели используем адаптивный подход управления ввиду параметрической неопределенности собственных частот упругих колебаний пленки. Суть такого подхода заключается в одновременном изучении объекта, то есть определении его параметров внутри замкнутого контура, и управлении им.

Введем невязку, формируемую как разность между измеренным (действительным) значением угловой скорости КА ( $\omega_{изм}$ ) и его прогнозом ( $\hat{\omega}$ ) с учетом измерения датчика угловой скорости ( $\dot{\xi}$ ):

$$\varepsilon = \omega_{изм} - \left( \hat{\omega} + \dot{\xi} \right).$$

Получившиеся уравнения движения КА исследуем на сходимость:

$$J_y\ddot{\xi}_y + C_1\ddot{\mu}_y - A_1\Omega_1\dot{\mu}_z + W_1 \cdot \varepsilon_y = 0,$$

$$J_y\ddot{\xi}_z + C_1\ddot{\mu}_z + A_1\Omega_1\dot{\mu}_y + W_1 \cdot \varepsilon_z = 0,$$

$$(J_y + C_1 + C_3) \cdot \dot{\tilde{\omega}}_y - (A_1\Omega_1 + A_3\Omega_3) \cdot \tilde{\omega}_z + W_2 \cdot \varepsilon_y = 0,$$

$$(J_z + C_1 + C_3) \cdot \dot{\tilde{\omega}}_z + (A_1\Omega_1 + A_3\Omega_3) \cdot \tilde{\omega}_y + W_2 \cdot \varepsilon_z = 0,$$

$$C_1(\dot{\tilde{\omega}}_y + \ddot{\mu}_y) - A_1\Omega_1(\tilde{\omega}_z + \dot{\mu}_z) + C_1K^2\tilde{\mu}_y + W_3 \cdot \varepsilon_y = 0,$$

$$C_1(\dot{\tilde{\omega}}_z + \ddot{\mu}_z) + A_1\Omega_1(\tilde{\omega}_y + \dot{\mu}_y) + C_1K^2\tilde{\mu}_z + W_3 \cdot \varepsilon_z = 0,$$

где  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  - весовые коэффициенты;

$K^2 = \Omega_1^2 \frac{R}{R-a}$  - жесткость (принимается известной). В данной версии наблюдателя

подстройка собственной частоты колебаний паруса не проводится, но может быть найдена с помощью метода градиентного спуска:

$$\dot{K}^2 = -W_4 (\varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Считаем, что в первом приближении скорость вращения спутника много меньше его относительной скорости, обусловленной колебаниями паруса, то есть  $W_2$  на данном этапе не определяем, поэтому характеристический полином полученной системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} C_1 s^2 + C_1 K^2 & -A_1 \Omega_1 s & W_3 & 0 \\ A_1 \Omega_1 s & C_1 s^2 + C_1 K^2 & 0 & W_3 \\ C_1 s^2 & -A_1 \Omega_1 s & J_y s + W_1 & 0 \\ A_1 \Omega_1 s & C_1 s^2 & 0 & J_z s + W_1 \end{vmatrix}.$$

Для найденного характеристического полинома в качестве эталонного многочлена выбираем полином Баттерворта 6-го порядка:

$$s^6 + 3.86 \cdot \rho_0 s^5 + 7.46 \cdot \rho_0^2 s^4 + 9.14 \cdot \rho_0^3 s^3 + 7.46 \cdot \rho_0^4 s^2 + 3.68 \cdot \rho_0^5 s + \rho_0^6 = 0,$$

где берем  $\rho_0 = 2$  и методом модального управления корнями характеристического полинома находим весовые коэффициенты:

$$W_1 = 0,44; \quad W_3 = -0,1.$$

При подобном выборе коэффициентов обратной связи можно говорить о том, что поведение фактических значений угловой скорости и углов рассогласования асимптотически устойчиво.

### Заключение

Таким образом создана модель управления КА, не требующего расхода ракетного топлива на коррекцию орбиты и угловые маневры. Исполнительным органом для создания как импульса, так и момента импульса с помощью сил солнечного давления в данном случае является бескаркасный вращающийся солнечный парус с компенсирующим тросовым маховиком.

Полученные результаты исследований могут быть использованы при создании нового класса космических платформ различного назначения (составные аппараты с двойным вращением).

### Библиографический список

1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. школа,

1982.

2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Ин. литература, 1951.

3. Лунц Я.Л. Введение в теорию гироскопов. – М.: Наука, 1972.

4. Магнус К. Гироскоп. Теория и применения. – М.: Мир, 1974.

### **Сведения об авторах**

Черемных Екатерина Александровна, инженер-математик Ракетно-космической корпорации «Энергия» имени С.П. Королёва, e-mail: [cheremnykh@inbox.ru](mailto:cheremnykh@inbox.ru)

Зыков Александр Владимирович, инженер-математик Ракетно-космической корпорации «Энергия» имени С.П. Королёва, аспирант Московского физико-технического института (государственного университета), e-mail: [zyvaldrvich@gmail.com](mailto:zyvaldrvich@gmail.com)