УДК 519.642.7

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ АЭРОДИНАМИКИ

В.Ю. СМИРНОВ

Изучаются несобственные интегралы по Адамару, встречающиеся в математических моделях аэродинамики и других задачах математической физики. Рассматривается интеграл, возникающий при вычислении скорости от дискретного вихревого отрезка в контрольной точке, расположенной внутри вихревого потока. Рассматриваются также другие интегралы, встречающиеся в задачах численного моделирования аэродинамической интерференции. Приводятся выражения для интегралов по Адамару, не содержащие производных под знаком интеграла, удобные для численного интегрирования. Приводится также процедура численного интегрирования несобственных интегралов и даются рекомендации по её применению в математических моделях.

Математические модели аэродинамической интерференции содержат уравнения с несобственными интегралами. В частности, несобственные интегралы возникают при использовании формулы Био-Савара-Лапласа. Как правило, они являются несобственными интегралами второго рода, которые не существуют ни по Риману, ни в смысле главного значения по Коши, так как содержат сильную особенность. Такие интегралы впервые были описаны Адамаром [1 -3]. Например, интеграл, возникающий при вычислении скорости от дискретного вихревого отрезка в контрольной точке, расположенной внутри вихревого потока, имеет вид:

$$I_1 = \int_{-0,5b_j}^{0,5b_j} \frac{K}{s^2}\left(1 + \frac{a(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\right)ds,$$

где

$$K = \frac{\cos(\psi_j - \psi_i)}{\sin^2\chi_j},$$

$$a(s) = \xi_i - \xi_j - s\cos\chi_j,$$

$$b(s) = s\sin\chi_j,$$

b_j – длина вихревого отрезка,

ψ_i - угол между плоскостью, на которой расположена i-ая контрольная точка и плоскостью $O\xi\zeta$,

ψ_j - угол между плоскостью, на которой расположен j-ый дискретный вихревой отрезок и плоскостью $O\xi\zeta$,

χ_j - угол наклона дискретного вихревого отрезка к оси $O\xi$,

$\xi_i = \dfrac{x_i}{l}$ - безразмерная координата i-ой контрольной точки,

$\xi_j = \dfrac{x_j}{l}$ - безразмерная координата середины j-ого дискретного вихревого отрезка,

l – характерный линейный размер.

Обозначив

$$f(s) = K\left(1 + \frac{a(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}\right),$$

получим

$$I_1 = \int_{-0,5b_j}^{0,5b_j} \frac{f(s)}{s^2} ds. \quad (1)$$

Интеграл (1) является частным случаем несобственного интеграла вида

$$* \int_a^b \frac{v(x)}{x^n} dx, \quad (2)$$

где n - некоторое натуральное число;

v(x) - функция, которая имеет в некоторой окрестности точки 0 производную порядка n и интегрируема по Риману на отрезке [a, b].

На основе доказательства теорем существования [4, 5] можно определить интеграл в смысле конечного значения по Адамару вида (2) следующим образом:

$$* \int_a^b \frac{v(x)}{x^n} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_L \frac{v(x)}{x^n} dx - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{i!} \frac{v^{(i)}(0)}{n-i-1} \frac{1-(-1)^{n-i-1}}{\varepsilon^{n-i-1}} \right). \quad (3)$$

С помощью интегрирования по частям интеграл в смысле конечного значения по Адамару типа

$$* \int_a^b \frac{v(x)}{(x - x_0)^n} dx \quad (4)$$

можно представить в следующем виде [4]:

$$
\begin{aligned}
&{*}\int_a^b \frac{v(x)}{(x-x_0)^n}dx = -\sum_{i=0}^{n-2}\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-i-1)}\frac{v^{(i)}(x)}{(x-x_0)^{n-i-1}}\Bigg|_a^b + \\
&+\frac{1}{(n-1)!}\left(v^{(n-1)}(x)\ln|x-x_0|\,\Bigg|_a^b - \int_a^b \ln|x-x_0|v^{(n)}(x)dx\right).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Несобственные интегралы, применяемые в математических моделях аэродинамики и в других задачах математической физики, вычисляются, как правило, с помощью численных методов. Однако при таких вычислениях возникают существенные трудности.

Например, формула для вычисления несобственного интеграла вида (5) имеет существенный недостаток, который состоит в том, что при вычислении на ЭВМ необходимо считать интегралы от производных функции v(x) до n-го порядка включительно. Эта процедура является чрезвычайно трудоемкой.

Поэтому хотелось бы иметь выражение для интеграла в смысле конечного значения по Адамару типа (4), которое не содержало бы интегралов от производных.

Для того чтобы избавиться от этого недостатка, преобразуем формулу (5) так, чтобы она содержала только значения производных в точке x_0 и на концах отрезка.

Для этого вычислим следующий интеграл:

$$
I = \int_a^b \frac{v(x) - \sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{v^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}}{(x-x_0)^n}dx = -\frac{1}{n-1}\int_a^b \left(v(x) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{v^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}\right)d\frac{1}{(x-x_0)^{n-1}} =
$$

$$
= -\frac{1}{n-1}\left[\left(v(x) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{v^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}\right)\frac{1}{(x-x_0)^{n-1}}\Bigg|_a^b - \int_a^b \frac{v'(x) - \sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{v^{(i)}(x_0)(x-x_0)^{i-1}}{(i-1)!}}{(x-x_0)^{n-1}}dx\right.
$$

Проинтегрировав по частям n-1 раз, получим

$$I=\left[-\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{n-j-1}\left(v^{(j)}(x)-\sum_{i=j}^{n-1}\frac{v^{(i)}(x_0)(x-x_0)^{i-j}}{(i-j)!}\right)\frac{1}{(x-x_0)^{n-j-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n-1)!}\left(v^{(n-1)}(x)-v^{(n-1)}(x_0)\right)\right]\Bigg|_a^b-\int_a^b v^{(n)}(x)\ln|x-x_0|dx.$$

Окончательно имеем следующее выражение для интеграла в смысле конечного значения по Адамару типа (4):

$$*\int_a^b\frac{v(x)}{(x-x_0)^n}dx=\int_a^b\frac{v(x)-\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{v^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}}{(x-x_0)^n}dx-$$

$$-\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{(n-1)\ldots(n-j-1)}\sum_{i=j}^{n-1}\frac{v^{(i)}(x_0)(x-x_0)^{i-j}}{(i-j)!}\frac{1}{(x-x_0)^{n-j-1}}\Bigg|_a^b-$$

$$-\frac{1}{(n-1)!}v^{(n-1)}(x_0)\ln|x-x_0|\Big|_a^b. \tag{6}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим интеграл, встречающийся в задачах численного моделирования аэродинамической интерференции, вида

$$\int_a^b\frac{v'(x)}{x-x_0}dx. \tag{7}$$

Имеем

$$I=\int_a^b\frac{v(x)-v(x_0)}{(x-x_0)^2}dx=-\int_a^b(v(x)-v(x_0))d\frac{1}{x-x_0}=\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\Bigg|_a^b+\int_a^b\frac{v'(x)}{x-x_0}dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int_a^b\frac{v'(x)}{x-x_0}dx=\int_a^b\frac{v(x)-v(x_0)}{(x-x_0)^2}dx+\frac{v(b)-v(x_0)}{b-x_0}-\frac{v(a)-v(x_0)}{a-x_0}.$$

Например,

$$\int_{-c}^{c}\frac{v'(x)}{x}dx=\int_{-c}^{c}\frac{v(x)-v(0)}{x^2}dx-\frac{2v(0)}{c}+\frac{v(c)-v(-c)}{c}.$$

Тогда

$$*\int_{-c}^{c}\frac{v(x)}{x^2}dx=\int_{-c}^{c}\frac{v(x)-v(0)}{x^2}dx-\frac{2v(0)}{c}.$$

Полученное выражение не содержит производных функции v(x), но интеграл в правой части существует только в смысле главного значения, поэтому для вычислений лучше взять интеграл

$$\int_a^b \frac{v'(x)}{x-x_0}dx = \int_a^b v'(x) d \ln|x-x_0| = v'(x)\ln|x-x_0| \Big|_a^b - \int_a^b v''(x)\ln|x-x_0| dx \quad . \qquad (8)$$

Рассмотрим

$$\int_a^b \frac{v(x)-v(x_0)-v'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}dx = -\int_a^b \ (v(x)-v(x_0)-v'(x_0)(x$$

$$= -\frac{v(x)-v(x_0)-v'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \ \Bigg|_a^b + \int_a^b \ \frac{v'(x)-v'(x_0)}{x-x_0}dx =$$

$$= \frac{v(x)-v(x_0)-v'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \ \Bigg|_a^b + (v'(x)-v'(x_0))\ln|x-x_0| \ \Bigg|_a^b$$

Отсюда

$$\int_a^b \ v''(x)\ln|x-x_0|dx = -\int_a^b \frac{v(x)-v(x_0)-v'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}dx -$$

$$-\frac{v(x)-v(x_0)-v'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \ \Bigg|_a^b + (v'(x)-v'(x_0))\ln|x-x_0| \ \Bigg|_a^b .$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (8), найдем представление для интеграла вида (7)

$$\int_a^b \frac{v'(x)}{x-x_0}dx = \int_a^b v'(x) d \ln|x-x_0| = v'(x)\ln|x-x_0| \Big|_a^b + \int_a^b \frac{v(x)-v(x_0)-v'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}dx +$$

$$+\frac{v(x)-v(x_0)-v'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \ \Bigg|_a^b - (v'(x)-v'(x_0))\ln|x-x_0| \ \Bigg|_a^b . \qquad (9)$$

Выражение (9) для интеграла (7), также как и выражение (6) для интеграла (4), не содержит под знаком интеграла производных функции v(x) кроме значений производных в некоторых известных и фиксированных точках, и интеграл существует в обычном смысле.

Таким образом, для несобственного интеграла получено выражение, не содержащее производных под знаком интеграла, которое удобно для численного интегрирования.

Представление несобственных интегралов в виде (6) и (9) позволяет реализовать процедуру их вычисления на основе численных методов. Эта процедура заключается в следующем:

- одним из численных методов вычисления определенных интегралов (прямоугольников, трапеций, Симпсона, Котеса и т.д.), вычисляется значение собственного интеграла, входящего в правую часть формул (6) или (9). Причем значение интеграла вычисляется вне некоторой δ - окрестности особой точки, т.е. вне отрезка $[x_0-\delta;\ x_0+\delta]$, чтобы исключить возникновение программного деления на ноль;

- полное значение несобственного интеграла вычисляется по формулам (6) или (9).

Значение δ определяется в процессе вычисления интеграла из условия, что знаменатель подынтегрального выражения меньше некоторой заданной величины. Проведенные методические исследования показали, что для обеспечения приемлемой точности в практических задачах аэродинамической интерференции целесообразно выбирать эту величину равной 10^{-6}.

Полученные выше результаты и процедура численного интегрирования несобственных интегралов носят универсальный характер, так как могут найти применение не только в аэродинамике, но и в других областях науки, где встречаются сингулярные интегралы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар Ж. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978.
2. Мусхелишвили Н.Н. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995.
4. Смирнов В.Ю. Строгое определение несобственных интегралов по Адамару, встречающихся в математических моделях аэродинамики, для целых степеней особенности. Статья настоящего журнала.
5. Смирнов В.Ю. Строгое определение несобственных интегралов по Адамару, встречающихся в математических моделях аэродинамики, для дробных степеней особенности. Статья настоящего журнала.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Смирнов Владимир Юрьевич, заведующий кафедрой Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н., доцент.